

Giancarlo Buccella

Spigolature varie...

Alcuni scritti di fisica, biologia, religione.

Sommario

1	Alcuni cenni sulla propagazione degli errori	Pag. 1
2	Moto in presenza di forze viscosse	Pag. 18
3	Appunti sulla legge gravitazionale	Pag. 59
4	Tempo di caduta di un corpo in un campo centrale	Pag. 78
5	Teoria classica del corpo nero	Pag. 99
6	A proposito della trasmissione del calore (tempo di raffreddamento di una birretta)	Pag. 137
7	Bilancio termico terrestre ed effetto serra	Pag. 172
8	Bilancio energetico del corpo umano	Pag. 189
9	Perché in estate fa più caldo che in inverno	Pag. 242
10	Calcolo dell'abbassamento della linea di visuale	Pag. 248
11	Il fenomeno delle maree	Pag. 255
12	Problema delle formiche che si inseguono	Pag. 267
13	Piccola storia evolutiva della vita	Pag. 276
14	Compendio della storia evolutiva umana	Pag. 330
15	L'uomo non discende dalla scimmia	Pag. 356
16	Composizione del corpo umano e ringiovanimento cellulare	Pag. 362
17	Cause principali di morte	Pag. 379
18	Armamenti nel mondo ed effetti delle bombe atomiche	Pag. 385
19	Genocidi nella storia	Pag. 410
20	Alcune riflessioni sul tema del male e della vita	Pag. 426

Alcuni cenni sulla propagazione degli errori (o incertezze)

a cura di Giancarlo Buccella

La misura esatta di una grandezza fisica è un dato teorico sperimentalmente inaccessibile.

Ogni misura porta con sé inevitabilmente un certa incertezza, che nel caso di una misura singola corrisponde alla sensibilità dello strumento utilizzato per effettuare la misura, cioè alla minima variazione della grandezza che lo strumento riesce a rilevare. Un esempio per tutti è il seguente: se sopra una bilancia poniamo un oggetto di un peso inferiore alla sensibilità minima la lancetta non si sposterà dallo zero, la sensibilità sarà il peso minimo che la bilancia riesce a rilevare.

Facendo, ad esempio, una misura di lunghezza con un metro da sarto, che ha una sensibilità del millimetro, l'incertezza da associare alla misura sarà di 1 mm o se si è particolarmente attenti nella misura ci si potrebbe spingere alla metà della sensibilità ossia 0.5 mm, ma certamente non oltre.

In questa nota useremo come sinonimi le parole incertezza ed errore.

Misura diretta

Nel caso di una misura diretta di una singola grandezza fisica il risultato si scrive così:

$$(x \pm \Delta x) u$$

Dove u sta per 'unità di misura' e dipende dalla unità di misura adottata per la grandezza misurata, e il Δx rappresenta l'incertezza sulla misura, che in questo caso coincide alla sensibilità dello strumento (o tutt'al più alla sua metà). Per semplicità nel seguito ometteremo di scrivere le unità di misura.

Il valore numerico di Δx definisce il numero di cifre significative con cui ha senso esprimere x .

Vale la seguente regola:

la posizione decimale dell'ultima cifra diversa da zero deve essere la stessa sia nel valore della misura (x) che nell'incertezza (Δx).

Ad esempio, se il valore della misura è 186.77 cm con un'incertezza di 0.3 cm è errato scrivere 186.77 ± 0.3 dato che la posizione della cifra dell'incertezza è sui decimi anche il numero che esprime la misura dovrà fermarsi (cioè avere una cifra diversa da zero) ai decimi, e quindi andrà scritto così 186.8 ± 0.3 , se invece l'incertezza sarebbe 3 allora si dovrebbe scrivere 187 ± 3 , se ancora l'incertezza sarebbe 30 (ossia nelle decine) il risultato della misura dovrà avere cifre diverse da zero fino alle decine, e quindi si avrebbe non 187 ± 30 ma 190 ± 30 .

Misure ripetute

Per effettuare la misura di una grandezza, abbiamo bisogno di uno strumento di misura. È impossibile ottenere il valore esatto di una grandezza, perché ogni misura è soggetta a tre tipi di imprecisione di cui la prima riguarda solamente il caso della misura singola.

1. la sensibilità dello strumento di misura, cioè la grandezza più piccola che posso misurare.

Esempio: con un normale righello la divisione più piccola corrisponde a 1 mm. Perciò non possiamo misurare lunghezze più piccole di 1 mm e ogni misura ha un'incertezza pari 1 mm (o al più della mezza "tacca", cioè 0.5 mm).

2. l'errore casuale, causato da piccole e imprevedibili variazioni, che aumentano e diminuiscono di poco il risultato della misura.

Esempio: quando cronometriamo una corsa di velocità, la prontezza di riflessi aumenta o diminuisce casualmente, anche se di poco, e questo introduce una variabilità casuale dei risultati che misuriamo.

3. l'errore sistematico è causato da un difetto dello strumento di misura o del metodo utilizzato, e si ripete identico ad ogni misura.

Esempio: un orologio che va troppo piano o una bilancia tarata male modificano sistematicamente le misure.

Nel seguito **non terremo conto dell'errore sistematico** in quanto esso qualora si presenti è in genere facilmente identificabile ed eliminabile da un bravo operatore.

Al fine di fare misure più accurate è conveniente ripetere l'operazione di misura più volte, infatti in questo modo si ottiene un valore dell'incertezza più piccolo rispetto a quello ottenuto facendo una sola misura. Facendo N misure di una data grandezza x , si ottengono N risultati non tutti uguali fra loro, quindi è solo possibile dire che la nostra misura sarà compresa fra il valore massimo e minimo fra quelli ottenuti.

E' chiaro che nel caso in cui la sensibilità dello strumento maschera l'effetto degli errori casuali otterremo sempre lo stesso valore della misura, ad esempio se misuriamo la lunghezza di un tavolo con il metro di casa otterremo sempre lo stesso valore.

Quindi facendo N misure otterremo in generale N valori : $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$.

Fra questi valori ci sarà quello massimo $x_{\max}$ e quello minimo $x_{\min}$. Si definisce il valore più probabile (ossia il numero rappresentativo delle n misure, da scrivere come risultato della misura, che indicheremo con il simbolo $\bar{x}$) la media aritmetica dei valori ottenuti associando a questo valore una incertezza data dalla semidispersione Δx .

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N}{N}$$

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$$

Il risultato risulterà espresso nel seguente modo

$$x = \bar{x} \pm \Delta x$$

dove Δx viene detto incertezza assoluta (o errore assoluto).

Regola: Il valore fornito dall'incertezza deve essere espresso con una sola cifra diversa da zero;

ad esempio se il calcolo ci dà 0.0341 l'incertezza va espresso come 0.03, se invece il risultato è 93.2 si dovrà scrivere 90.

Eccezione: se la prima cifra dell'incertezza è 1 (o eventualmente 2) per non essere troppo brutali nell'approssimazione si potrebbe conservare due cifre anziché una soltanto. Ad esempio se $\Delta x = 0.138$ si potrebbe scrivere 0.14 anziché 0.1.

Oltre alla semidispersione ci sono altre modalità di calcolo per determinare l'errore.

Errore relativo

Si possono avere misure con lo stesso errore assoluto ma precisione molto diversa. Ad esempio, se misuriamo la lunghezza del pollice della mano (circa 2 cm) e facciamo un errore di 1 cm, abbiamo così una misura molto grossolana. Ma se facciamo lo stesso errore di 1 cm nel misurare l'altezza del Colosseo (circa 50 m), avremo una misura molto più precisa. Eppure, l'errore assoluto è identico. Per avere una indicazione della precisione della misura si introduce l'incertezza relativa definita come rapporto fra l'incertezza ed il valore della misura

$$\Delta_{rel} x = \frac{\Delta x}{\bar{x}}$$

A volte è utile esprimere tale numero percentualmente e si parla allora di incertezza percentuale:

L'**errore percentuale** è pari all'errore relativo moltiplicato per 100, e si indica con il segno %.

Ad esempio se la lunghezza di un pollice è di 2 cm e l'errore di misura è di 1 cm, l'errore relativo vale

$$\Delta_{rel} L = \frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\% \quad (\text{errore è di una parte su 2})$$

Nel caso invece della misura dell'altezza del Colosseo avremo

$$\Delta_{rel} L = \frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{5000} = 0.0002 = 0.02\% \quad (\text{errore di una parte su 5000})$$

Diremo perciò che la seconda misura è molto più precisa della prima.

Misure indirette - Propagazione degli errori

Quando siamo di fronte a dover **misurare delle grandezze derivate**, ossia quelle grandezze che si definiscono a partire dalle sette grandezze fondamentali che si ottengono moltiplicando o dividendo, tra loro due o più grandezze fondamentali, ci si pone il problema di capire quale errore associare alla **misura** che non sarà più una misura diretta ma **indiretta**. Ricordiamo che una **misura diretta si ottiene confrontando direttamente l'oggetto da misurare con la relativa unità di misura**. Se ad esempio volessimo misurare l'area di un pavimento quadrato, con una misura diretta dovremo dotarci di una unità di area (ad esempio un foglio A4) e vedere quante volte il foglio "ci stà" su tutto il pavimento, ovviamente un modo impraticabile quindi si ricorre alla misura indiretta, ci occorrerà fare solo una misura di lunghezza (grandezza fondamentale) e poi per calcolare l'area dovremo semplicemente elevare al quadrato tale valore: $A = L^2$. Si pone allora il seguente problema: che errore associare alla misura?

Somma e differenza

Siano A e B due grandezze omogenee,

$$\begin{cases} A = a \pm \Delta a \\ B = b \pm \Delta b \end{cases} \quad \begin{array}{ll} \text{somma} & C = (a + b) \pm (\Delta a + \Delta b) \\ \text{differenza} & C = (a - b) \pm (\Delta a + \Delta b) \end{array}$$

L'errore assoluto e relativo di una somma o differenza fra due o più grandezze omogenee è:

$$\Delta C = \Delta a + \Delta b$$
$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta a + \Delta b}{a \pm b}$$

Prodotto e divisione

Siano A e B due grandezze omogenee,

$$\begin{cases} A = a \pm \Delta a \\ B = b \pm \Delta b \end{cases} \quad \begin{array}{ll} \text{prodotto} & C = (a \cdot b) \pm (b\Delta a + a\Delta b) \\ \text{quoziente} & C = (a / b) \pm ((b\Delta a + a\Delta b) / b^2) \end{array}$$

L'errore assoluto e relativo di un prodotto e un quoziente fra due o più grandezze omogenee è:

$$\Delta C = (ab) \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \right); \quad \Delta C = (a/b) \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \right)$$
$$\frac{\Delta C}{C} = \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \right) \text{ in ambedue i casi.}$$

Quindi, generalizzando possiamo dire che:

l'errore relativo associato a una grandezza fisica che è il risultato del **prodotto, o del quoziente** o di una combinazione di essi, fra due o più grandezze, ciascuna misurata con la propria incertezza, si ottiene **sommando gli errori relativi** delle singole grandezze.

Potenza

Si tratta di un caso particolare del prodotto in quanto si sta moltiplicando per se stesso un numero n volte. L'errore relativo associato al risultato di un'operazione di potenza è dato da n volte l'errore relativo della base della potenza.

Data la grandezza $C = a^n$ si ha

Errore assoluto e relativo: $\Delta C = a^n n \frac{\Delta a}{a}; \quad \frac{\Delta C}{C} = n \frac{\Delta a}{a}$

Prodotto per una costante

Consideriamo adesso il caso in cui la grandezza di cui vogliamo stimare l'errore sia il risultato del prodotto di un'altra grandezza che misuriamo con una costante priva di indeterminazione. Sia cioè:

$$C = k b, \quad \text{con } k \text{ costante.}$$

Utilizzando la regola del prodotto si ha come errore relativo

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta k}{k} + \frac{\Delta b}{b}$$

siccome la costante k non ha incertezza si ha:

$$\Delta C = k \Delta b$$

L'incertezza assoluta è in questo caso pari a k volte il valore dell'incertezza della misura.

Es: Consideriamo la lunghezza di una circonferenza di cui misuriamo il raggio $r = 51.3 \pm 0.2$ m, si ha

$$C = 2 \pi r \pm \Delta C = 322.164 \pm \Delta C$$

l'errore è $\Delta C = 2 \pi \Delta r = 2 \pi \cdot 0.2 = 1.256$ quindi scriveremo

$$C = 322.164 \pm 1.256 \quad \text{cioè}$$

$$C = (322 \pm 1) \text{ m}$$

Come si vede se il valore della costante ha fatto passare il valore dell'incertezza da 0.2 ad 1!

Precisione e accuratezza

I termini precisione e accuratezza sono messi in relazione con gli errori casuali e sistematici. Una misura è tanto più precisa quanto più i singoli valori misurati in condizioni di ripetibilità si concentrano intorno alla media della serie di misure effettuate. Il concetto di precisione è qualitativo. La variabilità dei risultati viene quantificata, come di consueto, nella deviazione standard σ ma questa di per sé non è atta a quantificare la precisione della misura secondo il significato usuale del termine di "qualità della misura". Ad esempio una deviazione standard di 1 mm rappresenta ottima o pessima precisione a seconda che si stiano misurando lunghezze della decina di metri o inferiori al centimetro. Si preferisce quantificare la precisione con il modulo del coefficiente di variazione ossia come

$$\frac{\sigma}{\bar{x}}$$

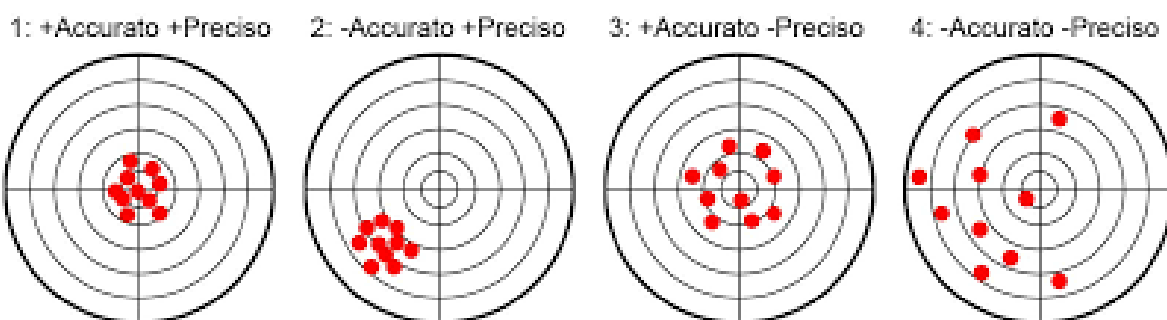
in genere espresso in percentuale. Una deviazione standard di 1 mm su una misura di 10 cm corrisponde ad una precisione dell'1%, mentre lo stesso errore su una misura di 1 cm corrisponde ad un errore relativo percentuale (precisione) del 10%.

Con il termine precisione si fa riferimento a quanto possano essere ripetibili o quanto possano essere vicini tra loro i risultati ottenuti. Da uno strumento di misura preciso, infatti, si otterrà lo stesso risultato per la maggior parte delle volte in cui verrà utilizzato. La precisione, dunque, permette di verificare l'affidabilità e la coerenza di uno strumento.

L'accuratezza esprime invece l'assenza di errori sistematici nella misura: una misura è tanto più accurata quanto più la media delle misure si approssima al valore vero della grandezza. La presenza d'errori costanti che "spostano" le letture reali dal valore vero, indicano dunque l'esistenza di *errori sistematici*.

L'**accuratezza** di uno **strumento di misura** indica quanto il risultato della misura di una grandezza, si avvicina al **valore vero**, ossia indica la concordanza fra la media ed il valore vero.

L'accuratezza indica quanto una misura vicina è al valore accettato. Ad esempio, ci aspettiamo che una bilancia legga 100 grammi se poniamo un peso standard di 100 grammi su di essa. In caso contrario, la bilancia non è accurata.



Esercizi

Esercizio n. 1

Per il volume di una bombola è stato trovato il valore (30.18 ± 0.04) L. Qual è il volume complessivo di 12 bombole identiche?

L'incertezza sulle 12 bombole è 12 volte l'incertezza su una singola bombola $\Delta V = 12 \cdot 0.04 = 0.48 = 0.5$ L

Il volume totale è $30.18 \cdot 12 = 362.16$ L. Quindi la risposta è 362.2 ± 0.5

Esercizio n. 2

Il peso di un foglio di carta di area 1 m^2 è stato valutato come (80.4 ± 0.7) g. Che cosa si può dire del peso di 1 cm^2 di quella carta?

Dato che $1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$ il valore più probabile del peso di 1 cm^2 sarà $80.4 \cdot 10^{-4}$ g con incertezza $0.7 \cdot 10^{-4}$ g

Esercizio n. 3

Il peso di un secchio vuoto è (1.44 ± 0.03) kg. Il peso dello stesso secchio pieno di acqua è (12.38 ± 0.06) kg. Qual è il peso dell'acqua nel secchio?

Il peso dell'acqua è $12.38 - 1.44 = 10.94$ kg. L'incertezza è la somma delle incertezze: $0.03 + 0.06 = 0.09$ kg. L'acqua contenuta nel secchio pesa quindi (10.94 ± 0.09) kg.

Esercizio n. 4

Sapendo che il diametro di una sfera è $d = (14.46 \pm 0.16)$ cm, se ne deduca la misura del volume.

Il raggio è la metà del diametro $d = 2R$

$$R = \frac{1}{2} d = 14.46 / 2 = 7.23 \text{ cm};$$

L'incertezza assoluta sul raggio è: $\Delta R = \frac{1}{2} \Delta d = 0.16 / 2 = 0.08 \text{ cm}$: $R = (7.23 \pm 0.08) \text{ cm}$

Il volume della sfera è

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 7.23^3 = 1582 \text{ cm}^3$$

L'errore sul volume è

$$\Delta V = \frac{4}{3} \pi \Delta(R^3) = 4.14 \Delta(R^3) = 4.14 \cdot (3 \cdot R^2 \frac{\Delta R}{R}) = 12.14 \cdot 7.23^2 \cdot \frac{0.08}{7.23} = 50.76 \text{ cm}^3$$

$$V = 1580 \pm 50 \text{ cm}^3$$

Oppure si poteva fare nel seguente modo

$$V = \frac{\pi}{6} D^3 = \frac{\pi}{6} \cdot 14.46^3 = 1582 \text{ cm}^3$$

$$\Delta V = \frac{\pi}{6} \Delta(D^3) = 0.523 \cdot 3 \cdot D^2 \frac{\Delta D}{D} = 1.57 \cdot 14.46^2 \cdot \frac{0.16}{14.46} = 52.5 \text{ cm}^3$$

$$V = 1580 \pm 50 \text{ cm}^3$$

Esercizio n. 5

Supponendo che il valore del diametro di una sfera sia $D = 10 \text{ cm}$, con quale incertezza dovrebbe essere dato tale valore per avere un'area della superficie sferica avente incertezza di 1 cm^2 ?

L'area della superficie sferica è $A = 4\pi R^2 = \pi D^2$

Se l'incertezza su A deve essere di 1 cm^2 significa scrivere $\Delta A = \pi \Delta(D^2) = 1 \text{ cm}^2$

l'incertezza su D vale $\Delta(D^2) = D^2 2 \frac{\Delta D}{D} = 2 D \Delta D = 2 \cdot 10 \Delta D = 20 \Delta D$

$$\Delta A = \pi \cdot 20 \cdot \Delta D = 1 \text{ cm}^2 \quad \text{quindi} \quad \Delta D = \frac{\Delta A}{20\pi} = \frac{1}{20\pi} = 0.02 \text{ cm}$$

Esercizio n. 6

Si determini la misura dell'ipotenusa c di un triangolo rettangolo aventi cateti a e b (tralasciando le unità di misura):

$$a = 102.3 \pm 0.6$$

$$b = 48.6 \pm 0.3$$

$$\text{L'ipotenusa vale } c^2 = (a^2 + b^2)^{1/2} = (102.3^2 + 48.6^2) = 12827.25; \quad c = 113.25$$

Svolgimento n. 1

Calcoliamo gli errori degli addendi usando la formula per le potenze,

$$\Delta(a^2) = 2 \cdot a^2 \frac{\Delta a}{a} = 2 \cdot 102.3^2 \frac{0.6}{102.3} = 122.76 \rightarrow 100$$

$$\Delta(b^2) = 2 \cdot b^2 \frac{\Delta b}{b} = 2 \cdot 48.6^2 \frac{0.3}{48.6} = 29.16 \rightarrow 30$$

Vale la seguente uguaglianza

$$\Delta(c^2) = \Delta(a^2) + \Delta(b^2) = 100 + 30 = 130 \rightarrow 100$$

Da cui possiamo scrivere $c^2 = 12827.25 \pm 100 = 12900 \pm 100$

Ma a noi interessa c e non c^2 .

$$\Delta(c^2) = 2c^2 \frac{\Delta c}{c} = 2c\Delta c = 130; \quad \Delta c = \frac{130}{2c} = \frac{130}{2 \cdot 113.25} = 0.57 \rightarrow 0.6$$

Se invece avessimo usato il valore approssimato dell'errore su c^2 (100) avremmo avuto

$$\Delta c = 0.4$$

In definitiva il risultato con questo approccio è **$c = 113.3 \pm 0.6$**

Svolgimento n. 2

Si può fare più velocemente calcolando direttamente l'errore di c scrivendolo nel seguente modo

$$c = (c^2)^{1/2}$$

$$\Delta c = \frac{1}{2} (c^2)^{1/2} \frac{\Delta(c^2)}{c^2} = \frac{1}{2} c \frac{\Delta(c^2)}{c^2} = \frac{1}{2} \frac{\Delta(c^2)}{c} = \frac{1}{2} \frac{100 + 30}{113.25} = 0.57 \rightarrow 0.6$$

Quindi **$c = 113.3 \pm 0.6$**

Svolgimento n. 3

Si poteva fare anche usando un ragionamento sui valori estremi di c , avendosi

$$c_{\max} = \sqrt{(a + \Delta a)^2 + (b + \Delta b)^2} = \sqrt{(102.3 + 0.6)^2 + (48.6 + 0.3)^2} = 113.98$$

$$c_{\min} = \sqrt{(a - \Delta a)^2 + (b - \Delta b)^2} = \sqrt{(102.3 - 0.6)^2 + (48.6 - 0.3)^2} = 112.59$$

Il cui valor medio è

$$c_{medio} = \frac{c_{max} + c_{min}}{2} = 113.3$$

$$\Delta c = \frac{c_{max} - c_{min}}{2} = 0.67 \rightarrow 0.7$$

Con semidispersione pari a

Avendo il seguente risultato finale

$$\mathbf{c = 113.3 \pm 0.7}$$

Per concludere vediamo come usando la relazione generale della propagazione degli errori si ha lo stesso risultato:

$$\begin{aligned} \Delta c &= \sqrt{\left(\frac{\partial c}{\partial a} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial b} \Delta b\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Delta b\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{102.3}{\sqrt{102.3^2 + 48.6^2}} 0.6\right)^2 + \left(\frac{48.6}{\sqrt{102.3^2 + 48.6^2}} 0.3\right)^2} = 0.6 \end{aligned}$$

La deviazione standard e suo significato statistico

Se si fanno delle misure ripetute, diciamo N misure, allora nella teoria degli errori si dimostra che la migliore stima del valore vero della misura della grandezza X della misura è la media aritmetica dei risultati

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots x_N}{N}$$

Al valore della misura va associato lo **scarto quadratico medio (o deviazione standard)**

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})^2}{N}}$$

Il cui significato statistico è il seguente: se si ripete una misura, la **probabilità che essa cada dentro l'intervallo di confidenza $x \pm \sigma$ è del 68%**, del **95%** entro $x \pm 2\sigma$ e del **99%** entro $x \pm 3\sigma$.

Una scoperta scientifica per essere accettata dalla comunità internazionale deve avere una significatività di 5σ (detta "Gold Standard"). E' chiaro però che si tratta di una soglia convenzionale.

Il termine "*standard deviation*" è stato introdotto in statistica da Pearson nel 1894 assieme alla lettera greca σ (sigma) che lo rappresenta. Il termine italiano "deviazione standard" ne è la traduzione più utilizzata nel linguaggio comune; il termine dell'Ente Nazionale Italiano di Unificazione è tuttavia "scarto tipo". A partire dallo scarto quadratico medio si definisce anche il coefficiente di variazione o la deviazione standard relativa come il rapporto tra lo scarto tipo e il valore assoluto della media aritmetica della variabile in esame sempreché quella media sia non nulla:

$$\sigma_{x,rel} = \frac{\sigma_x}{\bar{X}}$$

Questo indice relativo (che viene spesso espresso in termini percentuali e consente di effettuare confronti sulla precisione di misure diverse, indipendentemente dalle loro quantità assolute.

La deviazione standard dalla media

La deviazione standard, calcolata su un gruppo di N misure, assolve bene il compito di incertezza da associare alla singola misura della grandezza in esame, mentre per quello che riguarda l'**incertezza sulla media** si ricorre ad un'altra grandezza ancor più idonea allo scopo. Tale grandezza è la **deviazione standard della media** ed è definita come

$$\sigma_{x,media} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

Purtuttavia la teoria mostra che si può utilizzare questa formula anche per un singolo set di misure. Utilizzando questa nuova grandezza come incertezza da associare alla media di N misure. Così facendo si è supposto che le singole misure effettuate si siano distribuite seguendo la distribuzione di Gauss (assunto peraltro assai fondato) e di conseguenza abbiamo considerato la deviazione standard più come incertezza sulle singole misure che sulla media di quest'ultime.

C'è un'ultima **raffinatezza** della teoria che introduce un meno uno al denominatore della deviazione standard (dovuto al fatto che una singola misura x_i viene usata due volte al numeratore (una volta come singola misura ed un'altra come "membro" della media) che diventa quindi

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

In definitiva la formula della **deviazione standard dalla media da usare** per la stima di una misura, ripetuta N volte è

$$\sigma_{x,media} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}$$

Questa è la formula corretta da usare in tutti i casi in cui la distribuzione degli errori segua una distribuzione gaussiana.

N.B.

E' chiaro che per N sufficientemente grande il meno uno al denominatore è del tutto influente e va bene anche usare la relazione

$$\sigma_{x,media} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}}{N} \quad (se \ N \gg 1)$$

La somma quadratica degli errori (somma in quadratura)

Abbiamo visto che nel caso in cui le **grandezze misurate direttamente si debbano sommare**, allora possiamo stimare l'errore sul risultato come la **somma dei singoli errori assoluti**, mentre quando si procede a delle **moltiplicazioni o a delle divisioni** sono i **singoli errori relativi a venire sommati**.

In questa sezione vedremo come, sotto certe condizioni, le incertezze calcolate utilizzando le suddette regole possano essere più grandi del necessario: costituiscano cioè una sovrastima. Le condizioni affinché si possa applicare la somma quadratica sono fondamentalmente due e riguardano entrambe gli errori sulle grandezze originarie: questi devono essere

- indipendenti
- casuali

In questo modo le misure iniziali si possono considerare governate da una distribuzione normale (gaussiana): essendo inoltre indipendenti la composizione di due o più distribuzioni da luogo ad una distribuzione nuovamente di tipo normale e con deviazione standard pari alla radice quadrata della somma dei quadrati delle deviazioni standard iniziali.

Vediamo di chiarire questo concetto apparentemente complicato.

Supponiamo di avere misurato le due quantità x e y

$$x_m \pm \Delta x$$

$$y_m \pm \Delta y$$

e che queste soddisfino i requisiti che abbiamo illustrato: allora se supponiamo che esse siano governate da due distribuzioni normali di centro rispettivamente X e Y e deviazione standard σ_x e σ_y possiamo sostituire ai loro errori assoluti (Δx e Δy) le rispettive deviazioni standard.

Ora la probabilità di ottenere un particolare valore di x e di y è

$$P(x) \propto \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right); P(y) \propto \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)$$

dove abbiamo posto momentaneamente i valori X e Y uguali a zero per semplicità di calcolo. Dal momento che sia x che y sono misurati indipendentemente l'uno dall'altro, la probabilità di ottenere un particolare valore di x e contemporaneamente un particolare valore di y è data dal prodotto delle singole probabilità per cui si ha

$$P(x, y) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right]$$

A questo punto, applicando alcune proprietà matematiche che qui non riportiamo, si può vedere che la

probabilità di ottenere un dato valore $z = x + y$ ha la seguente forma

$$P(x + y) \propto \exp\left[-\frac{(x^2 + y^2)}{2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}\right]$$

Questo risultato mostra che i valori di $z = x + y$ sono normalmente distribuiti attorno all'origine con deviazione standard pari a

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

Se invece di considerare X e Y entrambe nulli li valutiamo con il loro valore reale, giungiamo alla medesima conclusione salvo il fatto che z sarà non più distribuita rispetto all'origine, ma rispetto alla quantità $X + Y$

Enunciato:

Se diverse grandezze $x, y, \dots, w$ sono misurate con incertezze "indipendenti e casuali" $\Delta x, \Delta y, \Delta x, \dots \Delta w$ e tali valori vengono utilizzati per calcolare quantità del tipo

$$z = x + \dots + y - (u + \dots + w)$$

allora l'errore su z è la somma quadratica degli errori originari.

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \dots + \sigma_w^2}$$

In ogni caso, l'errore σ_z su z non è mai più grande della somma ordinaria dei singoli errori originali

$$\sigma_z \leq \sigma_x + \sigma_y + \dots + \sigma_w$$

Si dimostra che vale anche il seguente enunciato.

Se diverse grandezze $x, y, \dots, w$ sono misurate con incertezze "indipendenti e casuali" $\Delta x, \Delta y, \Delta x, \dots \Delta w$ e tali valori vengono utilizzati per calcolare quantità del tipo

$$z = \frac{x \cdot \dots \cdot z}{u \cdot \dots \cdot w}$$

allora l'errore su z è la somma quadratica dei singoli errori relativi degli errori originari.

$$\frac{\Delta z}{z} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\Delta w}{w}\right)^2}$$

In ogni caso, l'errore relativo di z non è mai più grande della somma ordinaria dei singoli errori relativi

$$\frac{\Delta z}{z} \leq \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \dots + \frac{\Delta w}{w}$$

Formula generale della propagazione degli errori

Se invece abbiamo una **funzione di parecchie variabili** $q = q(x, y, \dots, z)$, allora se le incertezze di $x, y, \dots, z$ sono indipendenti e casuali allora l'incertezza di q è

$$\Delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y} \Delta y\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial q}{\partial z} \Delta z\right)^2}$$

Questa è la formula più generale che ci permette il calcolo dell'incertezza di una funzione, dove le incertezze sono le incertezze strumentali per misure singole e invece per misure ripetute saranno le deviazioni standard.

E' evidente che se q è funzione di una sola variabile si ha

$$\Delta q = \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| \Delta x$$

In altre parole questo termine costituisce da solo l'incertezza su q , che potremo anche chiamarla *incertezza parziale*, su q rispetto alla variabile x , allora allo stesso modo potremo considerare le altre incertezze parziali, rispetto a $y, \dots, z$, se q dipendesse da più variabili. In base a queste considerazioni la formula generale la si può pensare come somma quadratica delle incertezze parziali. in tal modo abbiamo un suggerimento su come usare la formula generale, dapprima si calcolano le incertezze parziali e poi si sommano in quadratura, e qualora le variabili non siano indipendenti comunque l'incertezza su q non supera la semplice somma delle incertezze parziali, ossia

$$\Delta q \leq \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right| \Delta y + \dots + \left| \frac{\partial q}{\partial z} \right| \Delta z$$

Esempio

Come semplice applicazione della formula supponiamo di aver effettuato la seguente misura di un angolo

$\theta = 20^\circ \pm 3^\circ$ e di voler calcolare $\cos \theta$. La miglior stima del coseno è ovviamente $\cos 20^\circ = 0.94$, per l'incertezza si ha

$$\Delta(\cos \theta) = \sqrt{\left(\frac{\partial(\cos \theta)}{\partial \theta} \Delta \theta\right)^2} = \left| \frac{\partial(\cos \theta)}{\partial \theta} \right| \Delta \theta = |\sin \theta| \Delta \theta \quad (\text{in rad})$$

Abbiamo indicato che il risultato è in radianti perché la derivata del coseno è $-\sin$ solo se l'angolo è espresso in radianti, perciò occorre trasformare i gradi in radianti: $3^\circ = 0.05 \text{ rad}$, allora si ha

$$\Delta(\cos \theta) = |\sin 20^\circ| \cdot 0.05 = 0.34 \cdot 0.05 = 0.02$$

In definitiva si ha $\cos \theta = 0.94 \pm 0.02$

Vediamo, in conclusione di queste note il caso in cui q sia funzione di più variabili.

Sia $q = x^2y - xy^2$

essendo $x = 3.0 \pm 0.1$ e $y = 2.0 \pm 0.1$

Calcoliamo dunque le incertezze parziali

$$\Delta q_x = \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| \Delta x = |2xy - y^2| \Delta x = |2 \cdot 3 - 4| \cdot 0.1 = 0.8$$

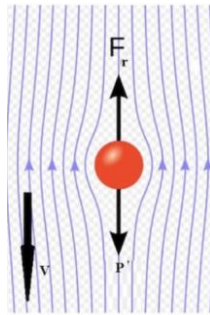
$$\Delta q_y = \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right| \Delta y = |x^2 - 2xy| \Delta y = |9 - 12| \cdot 0.1 = 0.3$$

$$\Delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x} \Delta x \right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y} \Delta y \right)^2} = \sqrt{0.8^2 + 0.3^2} = 0.9$$

Il risultato finale è $q = 6.0 \pm 0.9$

Moto con forze viscose

a cura di Giancarlo Buccella



Quando un oggetto si muove all'interno di un fluido, come l'aria o l'acqua, sperimenta una forza di resistenza che si oppone al suo moto, tendendo a ridurre la velocità. Questa forza, nota come resistenza del mezzo o attrito viscoso, aumenta con l'aumentare della velocità del corpo. La sua dipendenza dalla velocità, tuttavia, è complessa e influenzata da numerosi parametri, tra cui le dimensioni geometriche, la forma, le caratteristiche superficiali dell'oggetto e le proprietà del fluido come densità, viscosità e temperatura.

La trattazione di questa forza di resistenza si basa spesso su modelli empirici. Sebbene le relazioni generali tra i parametri possano essere talvolta dedotte da considerazioni dimensionali, i valori numerici specifici devono essere determinati sperimentalmente, ad esempio attraverso test in una galleria del vento. Solo in casi di geometrie molto semplici e condizioni di moto particolari è possibile determinare teoricamente la forza di resistenza.

In generale la forza di attrito viscoso viene descritta mediante due diversi modelli:

- 1) Il primo modello valido in caso di basse velocità (ad esempio una sfera che cade nell'acqua). In questo modello la forza di attrito viscoso aumenta proporzionalmente con la velocità.
- 2) Il secondo modello è invece valido quando si studia il moto di oggetti di grandi dimensioni che si muovono ad elevata velocità (aereo, paracadutista, automobile). In questo modello la forza aumenta con il quadrato della velocità.

Questa resistenza dipende, come già accennato, oltre che dalla velocità, dalla forma e dalle dimensioni dell'oggetto e dalle caratteristiche del fluido (es. densità, viscosità, ecc.).

Forma - Per descrivere come influenza il moto la forma del corpo si usa il cosiddetto "Il coefficiente di resistenza aerodinamica" (o coefficiente di penetrazione aerodinamica) C_x , esso è un coefficiente adimensionale usato per misurare la resistenza aerodinamica di un corpo in moto in un fluido. Comprende, per un corpo generico, i contributi di due tipi di resistenza fluidodinamica: la resistenza di attrito e la resistenza di forma. Ad esempio per un paracadute vale 1.4 mentre per un'auto 0.3.

Dimensione - Considerando che a parità di coefficiente di resistenza aerodinamica, due corpi possono subire una maggiore o minore resistenza aerodinamica semplicemente per una sezione frontale maggiore o minore, ecco che entra in gioco anche la dimensione del corpo ossia più precisamente l'area della sezione del corpo proiettata sul piano perpendicolare del moto.

Viscosità – La viscosità di un fluido viene descritta mediante il coefficiente di attrito viscoso **dinamico** (η) e **cinematico** (ν), essa è una grandezza che misura la propensione di un fluido a generare attrito interno tra i propri strati in movimento; è una caratteristica che dipende solamente dal tipo di fluido e che riguarda esclusivamente i fluidi reali.

L'unità di misura della viscosità più utilizzata nel SI è il poiseuille (PI) ed è definita come

$$PI = \frac{kg}{m \cdot s} = P_a \cdot s \quad \text{dove } P_a \text{ indica il pascal,}$$

mentre nel Sistema CGS si usa il poise (P) definito come

$$P = 0.1 \cdot PI = 0.1 \cdot P_a \cdot s$$

Occorre precisare che la viscosità varia con la temperatura e pertanto va specificato a quale valore di essa si riferisce.

Tabella esemplificativa con i valori di viscosità cinematica e dinamica

Liquidi	η / mPa*s a 20°C	η / mPa*s a 0°C	ν / mm²/s a 20°C
Acqua	1,002	1,792	1,004
Olio d'oliva	80,8		89
Etanolo	1,20	1,78	1,52
Metanolo	0,587	0,820	0,742
Benzolo	0,648	0,91	0,737

Gas a 0°C; 1013 hPa	η / μ Pa*s	ν / mm²/s
Aria	17,2	13,3
Anidride carbonica	13,7	6,93
Azoto	16,5	13,2
Ossigeno	19,2	13,4

Si noti che l'attrito viscoso è responsabile ad esempio della rotazione dei fluidi all'interno di un contenitore. Se vogliamo mettere in rotazione dell'acqua chiusa in una bottiglia, in modo da formare un vortice, quello che facciamo a far roteare la bottiglia. Il moto rotatorio del contenitore viene trasmesso al fluido grazie all'attrito viscoso. Quando il moto rotatorio ha inizio, sono gli strati che aderiscono alle pareti della bottiglia i primi che, sotto l'effetto della forza di attrito, vengono trascinati e messi in rotazione. Questi, a loro volta, trascinano con sé gli strati d'acqua immediatamente più interni che cominciano così a mettersi in moto e via così procedendo sempre verso l'interno, allontanandosi progressivamente dalle pareti del contenitore. Gli strati d'acqua più prossimi all'asse di rotazione si metteranno in moto per ultimi e quelli vicini alle pareti della bottiglia avranno già acquisito una buona velocità. Al termine del processo però tutti gli strati di fluido, indipendentemente dalla loro posizione, avranno raggiunto la medesima velocità angolare.

Esiste una formula per calcolare la forza di attrito viscoso all'interno di un fluido, ed è la seguente:

$$dF = \eta dS \frac{dv}{dn}$$

Dove η è il coefficiente viscoso dinamico, dS è la superficie di contatto tra due strati di fluido adiacenti mentre con il rapporto dv/dn viene indicata la variazione di velocità lungo la direzione ortogonale alla superficie di contatto.

Viscosità dinamica

Se pensiamo ad esempio ad un moto di un fluido in un condotto, indicando con

- F la forza applicata tangenzialmente alla superficie
- S l'area della lamina superficiale del liquido
- v la sua velocità e con h la sua distanza dalla lamina aderente sul fondo del recipiente

sussiste la seguente identità:

$$\frac{F}{S} = \eta \frac{v}{h}$$

In cui il coefficiente di proporzionalità η prende il nome di **viscosità dinamica** del liquido. Dalla relazione precedente si ricava:

$$\eta = \frac{F}{S} \frac{h}{v}$$

tenendo conto che la forza si esprime in Newton, la distanza in metri, la superficie in m^2 e la velocità in m/s si può ricavare l'equazione dimensionale di η :

$$\eta = N \cdot m / m^2 m/s = [N \cdot s / m^2] = Kg/m s$$

Viscosità cinematica

Essa è data semplicemente dal rapporto fra la viscosità dinamica e la densità del fluido.

$$\nu = \frac{\eta}{d}$$

Densità – La densità è un parametro che entra in modo diretto nella descrizione di un moto viscoso in varie relazioni ed anche attraverso la grandezza viscosità cinematica (o diffusività cinematica).

Essa è una misura della resistenza a scorrere di una corrente fluida sotto l'influenza della gravità. Questa tendenza dipende sia dalla viscosità dinamica sia dal peso specifico del fluido. Quando due fluidi di uguale volume sono messi in viscosimetri capillari identici e lasciati scorrere per gravità, il fluido avente maggior diffusività impiega più tempo a scorrere. Per esempio il mercurio risulta avere una viscosità dinamica 1,7 volte maggiore di quella dell'acqua, ma a causa del suo elevato peso specifico, esso percola molto più rapidamente da uno stesso foro a parità di volume. Infatti la viscosità cinematica del mercurio è nove volte minore di quella dell'acqua a temperatura ambiente (20 °C).

Per descrivere la viscosità cinematica è utile introdurre un parametro – detto numero di Reynolds - che ci permette di distinguere tra regime laminare e regime turbolento. Il numero di Reynolds (abbreviato in R_e) è un numero adimensionale usato in fluidodinamica, esso è proporzionale al rapporto tra le forze d'inerzia e le forze viscosi.

$$R_e = \frac{\rho v L}{\eta}$$

Dove v è la velocità del flusso del fluido (velocità media, nel caso di scorrimento in un condotto, oppure velocità rispetto al corpo in esame), ρ la sua densità, η è la viscosità dinamica ed L è una "lunghezza caratteristica" del problema (per es. nel caso del moto di un fluido in un condotto L è il diametro del condotto).

I valori critici del numero di Reynolds per i quali si passa dal regime laminare al regime turbolento dipendono ovviamente dalla forma geometrica dei sistemi. Esistono tuttavia dei criteri empirici approssimativi del tipo:

- $R_e < 1000$ il moto è sempre laminare
- $R_e < 2000$ in tubature diritte di sezione circolare di raggio r il flusso è sempre laminare
- $R_e > 2000$ in tubature diritte di sezione circolare si può avere moto laminare o turbolento a seconda di vari fattori, tra cui la rugosità della parete del tubo, ecc...
- $R_e > 10000$ il regime è sempre turbolento

Un caso interessante si presenta per valori di $R_e < 2000$ in tubature diritte di sezione circolare di raggio r , qualora si fissino i valori della densità e della viscosità, risulta che ad una certa velocità, detta velocità critica, avviene il passaggio dal moto laminare a quello turbolento, infatti:

$$v_c = \frac{\eta}{\rho r} R_e$$

Si verifica sperimentalmente che un fluido in un condotto cilindrico passa da un moto laminare a uno turbolento quando $Re \approx 1200$. Per valori prossimi a 1200 il passaggio avviene gradualmente e prendi il nome di regime di transizione. Quindi ragionando in termini di velocità critica abbiamo che per velocità inferiori a

$$v_c = 1200 \frac{\eta}{\rho r}$$

Il moto sarà laminare, per valori superiori sarà turbolento.

Ad esempio per il moto di acqua in un tubo circolare di raggio $r = 1 \text{ cm}$, essendo $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ed $\eta = 10^{-2}$ poiseuille la velocità critica sarà

$$v_c = 1200 \frac{10^{-2}}{10^3 \cdot 10^{-2}} = 1.2 \text{ m/s}$$

In generale la forza di attrito viscoso nel modello di proporzionalità con la velocità è data da

$$F_R = bv = K\eta v \quad (1)$$

Dove K è un coefficiente che tiene conto della forma del corpo mentre η è il coefficiente di viscosità del fluido.

Legge di Stokes

Limitiamo ora la nostra analisi fenomenologica ai casi in cui la forma dell'oggetto sia sufficientemente regolare e la sua velocità sufficientemente bassa affinché gli spostamenti di fluido provocati dal passaggio dell'oggetto in movimento non siano accompagnati da fenomeni vorticosi, cioè indagheremo solamente i moti laminari.

Con tale premessa e con l'aggiunta che il corpo sia dotato di simmetria intorno alla direzione del moto, si può dire che la forza resistente che il mezzo esercita al moto del corpo è direttamente proporzionale alla velocità:

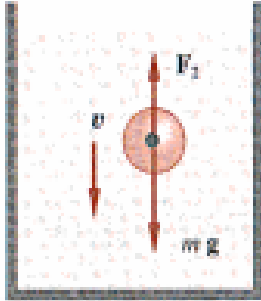
$$F_R \propto v^n$$

di solito la costante di proporzionalità – che dipende sia dalla forma dell'oggetto che dalle proprietà del fluido - viene indicata con la lettera b , quindi avremo:

$$F_R = bv^n$$

Discutiamo ora analiticamente i casi $n = 0$, $n=1$, $n = \frac{1}{2}$, $n = 2$.

Per iniziare semplificando l'approccio pensando al caso di un corpo di massa m che cada sotto l'azione della gravità in un mezzo viscoso.



L'equazione del moto è allora: $ma = mg - F_R = mg - b v^n$ (1 bis)

(avendo posto l'asse y verso il basso)

Posto che F_R non potrà essere maggiore di mg ma al massimo potrà essere uguale, nel qual caso si ha $ma = 0$ ossia $v = \text{cost}$, tale velocità è detta velocità limite ed in generale vale

$$v_L = \left(\frac{mg}{b} \right)^{1/n} \quad (2)$$

Se ora, come si usa, poniamo $\frac{m}{b} = \tau$ (detto tempo di rilassamento o tempo caratteristico)

si ha

$$v_L = (\tau g)^{1/n} \quad (3)$$

Anticipiamo il fatto che solo se $n < 1$ la soluzione analitica conduce a valori finiti per la velocità, in tutti gli altri casi la velocità tenderà asintoticamente, alla velocità limite.

Caso $n = 1$

L'equazione del moto è $ma = -bv$ (4)

In questo caso la forza motrice è assente: realisticamente significa che la forza motrice ha agito fino all'istante in cui scompare avendo impresso al corpo una certa velocità, come quando in una strada liscia (priva di attrito) un'auto spegne il motore, il fluido aria rallenterà il suo moto fino a fermarla.

Avremo

$$m \frac{dv}{dt} = -bv;$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}v = -\frac{1}{\tau}v$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{\tau}dt$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\frac{1}{\tau} \int dt$$

$$\log v + c_1 = -\frac{t}{\tau} + c_2$$

(N.B. Usiamo il simbolo log per indicare il logaritmo naturale)

Si possono senz'altro accorpate le due costanti avendo:

$$\log v = -\frac{1}{\tau}t + c$$

Imponendo che al momento iniziale sia $v = v_0$ e $t = t_0 = 0$ si ha

$$\log v_0 = c$$

$$\log v = -\frac{1}{\tau}t + \log v_0$$

$$\log \frac{v}{v_0} = -\frac{1}{\tau}t$$

$$\frac{v}{v_0} = \exp(-t/\tau)$$

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau};$$

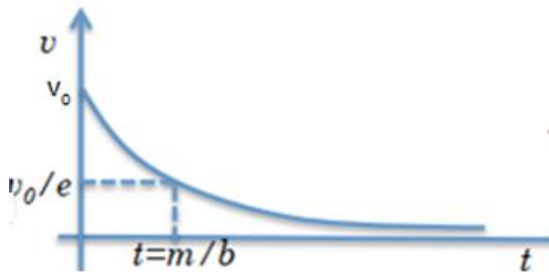
essendo $\tau = \frac{m}{b}$ (5)

Da questa relazione si vede subito il significato del parametro τ , infatti si ha

$$\begin{aligned}
 t = \tau & \quad v(t) = (1/e) v_0 = 0.37 v_0 \\
 t = 2\tau & \quad v(t) = (1/e)^2 v_0 = 0.14 v_0 \\
 t = 3\tau & \quad v(t) = (1/e)^3 v_0 = 0.12 v_0 \\
 t = 4\tau & \quad v(t) = (1/e)^4 v_0 = 0.018 v_0 \\
 t = 5\tau & \quad v(t) = (1/e)^5 v_0 = 0.0067 v_0 = 0.7\% v_0 \\
 & \dots \\
 t = 10\tau & \quad v(t) = 0.45 \cdot 10^{-3} v_0 \\
 t = 50\tau & \quad v(t) = 1.9 \cdot 10^{-22} v_0
 \end{aligned}$$

Spesso si prende come valore “asintotico” 5τ , valore per il quale la velocità vale meno dell’1% del valore iniziale, si vede comunque che ad esempio per $t = 50\tau$ la velocità è $10^{-22} v_0$.

Graficamente

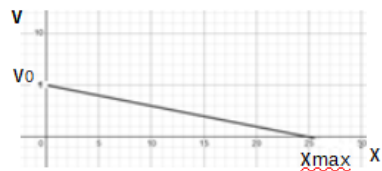


Dal punto di vista matematico e non fisico dovremmo dire che occorre un tempo infinito affinché il corpo si arresti. Questo è uno dei quei casi in cui il senso fisico corregge il verdetto matematico. Ora risolviamo l’equazione del moto in funzione dello spostamento x .

$$\begin{aligned}
 m \frac{dv}{dt} &= -bv; \\
 \frac{dv}{dt} &= -\frac{b}{m} v = -\frac{1}{\tau} v \\
 \frac{dv}{v} &= -\frac{1}{\tau} dt; \quad \text{sostituendo } v = \frac{dx}{dt} \\
 \frac{dv}{dx} dt &= -\frac{1}{\tau} dt \\
 dv &= -\frac{1}{\tau} dx \\
 \int_{v_0}^v dv &= -\frac{1}{\tau} \int_{x_0}^x dx \\
 v - v_0 &= -\frac{1}{\tau} (x - x_0)
 \end{aligned}$$

E quindi

$$v(x) = v_0 - \frac{b}{m} (x - x_0) \quad (6)$$



Il cui andamento qualitativo è il seguente.

Da questa relazione possiamo calcolare la distanza che il corpo percorre prima di arrestarsi (dopo un tempo infinito);

$$x_{\max} = \tau v_0 = \frac{m}{b} v_0 \quad (7)$$

Dalla relazione di $v(x)$ infine esplicitiamo la legge oraria.

$$\frac{dx}{dt} = v_0 - \frac{b}{m} x$$

$$\frac{dx}{v_0 - \frac{b}{m} x} = dt$$

$$\int_0^x \frac{dx}{v_0 - \frac{b}{m} x} = \int_0^t dt$$

$$\left[-\frac{\log(v_0 - \frac{x}{\tau})}{\frac{1}{\tau}} \right]_0^x = t$$

$$\left[\log(v_0 - \frac{x}{\tau}) \right]_0^x = -\frac{t}{\tau}$$

$$\log(v_0 - \frac{x}{\tau}) - \log v_0 = -\frac{t}{\tau}$$

$$\log \frac{(v_0 - \frac{x}{\tau})}{v_0} = -\frac{t}{\tau}$$

$$\frac{(v_0 - \frac{x}{\tau})}{v_0} = e^{-t/\tau}$$

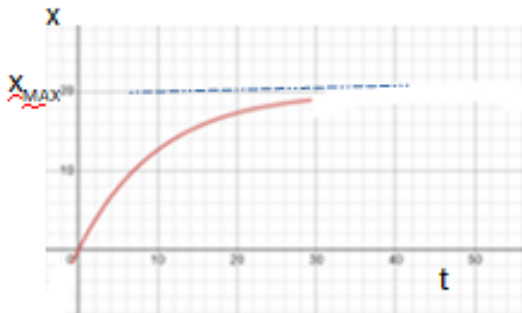
$$(v_0 - \frac{x}{\tau}) = v_0 e^{-t/\tau}$$

$$-\frac{x}{\tau} = v_0 e^{-t/\tau} - v_0$$

$$x(t) = v_0 \tau (1 - e^{-t/\tau}) \quad (8)$$

Si noti che si poteva più agevolmente ricavarla dalla relazione $v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$.

Il cui grafico qualitativo è il seguente



Nel caso il moto partisse all'istante zero con coordinata x_0 si avrebbe

$$x(t) = x_0 + v_0 \tau (1 - e^{-t/\tau}) \quad (9)$$

Esempio 1

Un oggetto di massa 5 kg, inizialmente fermo, è sottoposto ad un impulso $I = 10 \text{ N s}$. Quale distanza percorre prima di arrestarsi su un piano liscio orizzontale considerando l'attrito viscoso dovuto alla presenza di aria (la costante di rilassamento sia $\tau = 5 \text{ s}$)?

Calcoliamo la velocità che l'oggetto, sottoposto alla forza impulsiva di 10 N s , acquisterà

$$I = \Delta p = m \Delta v = m(v_f - v_i) = m v_f$$

$$v_f = I / m = 10 / 5 = 2 \text{ m/s}$$

Usando la relazione trovata della distanza massima percorsa da un oggetto sottoposto alla sola forza viscosa si ha

$$x_{\max} = \tau v_0 = 5 \cdot 2 = 10 \text{ m}$$

Osservazione: il modello ci informa della distanza percorsa dall'oggetto prima di fermarsi ma lo fa supponendo un tempo infinito, questo è un limite della nostra rappresentazione semplificata della realtà, infatti ad un certo punto quando la velocità si approssima allo zero intervengono altri fattori, quali ad esempio l'attrito statico, il moto browniano, ecc... che fanno arrestare l'oggetto in un tempo finito.

Caso n = 1

L'equazione del moto in questo caso è $ma = mg - b v$ (10)

Dove $(b v)$ è la forza di attrito viscoso, il coefficiente di proporzionalità è dato dal prodotto di due parametri $b = K \eta$ dove K è il fattore di forma

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv$$

Considerando un moto con $v(t) = v_0$ per $t = 0$ si ha

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{mg/b - v} = \int_0^t \frac{b}{m} dt$$

Sfruttando la (2): $mg/b = v_L$ si ha

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v_L - v} = \int_0^t \frac{b}{m} dt$$

Ricordando che

$$\int \frac{dx}{A-x} = -\log(A-x) + \text{cost} \text{ si ha}$$

$$-\left[\log(v_L - v(t)) - \log(v_L - v_0)\right] = \frac{b}{m} t$$

$$\log \frac{v_L - v(t)}{v_L - v_0} = -\frac{t}{\tau}$$

$$\frac{v_L - v(t)}{v_L - v_0} = e^{-t/\tau}$$

$$v(t) = v_L - (v_L - v_0)e^{-t/\tau} \quad (11)$$

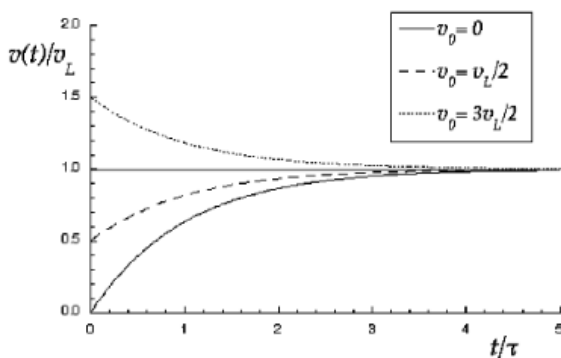
Oppure in termini del tempo di rilassamento

$$v(t) = \tau g - (\tau g - v_0)e^{-t/\tau} \quad (12)$$

Da cui vediamo che per $t \rightarrow \infty$ $v(t) \rightarrow v_L = \frac{mg}{b}$

Si noti come v_L sia indipendente dal valore della velocità iniziale. Il valore della costante di rilassamento dà una misura di quanto rapidamente il corpo raggiunge la velocità limite.

L'andamento della velocità normalizzata con la velocità limite, per diversi valori di v_0 , è mostrata di seguito – si noti in particolare che quando il corpo viene lanciato con una velocità iniziale maggiore di v_L , essa diminuirà progressivamente per raggiungere, asintoticamente, il valore v_L .



Un semplice ragionamento consente di ricavare direttamente il valore della velocità limite senza risolvere alcuna equazione differenziale. Supponiamo, per comodità, che il corpo sia lasciato, all'istante $t = 0$, con velocità nulla. Inizialmente, quindi, la forza di attrito ha modulo nullo e il corpo risente esclusivamente della forza di gravità, per cui accelera verso il basso con accelerazione g . All'aumentare della velocità, anche la forza di attrito aumenta e quindi il corpo presenta un'accelerazione via via minore. La condizione limite viene raggiunta quando la forza di attrito uguaglia esattamente (in modulo) la forza peso, per cui la risultante delle forze agenti sul corpo è nulla. In queste condizioni il corpo si muoverà di moto rettilineo uniforme. Dall'uguaglianza delle due forze agenti sul corpo si ha (ed a quel punto la v diventa v_L):

$$ma = 0 = mg - b v_L$$

$$b v_L = mg \rightarrow v_L = \frac{mg}{b}$$

Ricaviamo l'espressione della velocità in funzione dello spostamento.

$$m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = mg - bv$$

$$\frac{dv}{dx} v = g - \frac{b}{m} v$$

$$\frac{dv}{g - \frac{b}{m} v} v = dx$$

$$\text{sostituendo } \frac{m}{b} = \tau; \quad v_L = \frac{mg}{b} \equiv \tau g$$

$$\int_{v_0}^v \frac{v}{v_L - v} dv = \frac{1}{\tau} \int_{x_0}^x dx$$

Ricordando che

$$\int \frac{x}{x-A} dx = -A \log(x-A) - x + \text{cost}$$

$$\frac{b}{m} x - \frac{b}{m} x_0 = -v_L \log(v - v_L) - v + v_L \log(v_0 - v_L) + v_0$$

$$v_L \log(v - v_L) + v = -\frac{b}{m} x + \frac{b}{m} x_0 + v_L \log(v_0 - v_L) + v_0$$

$$v_L \log(v(x) - v_L) + v(x) = K - \frac{b}{m} x \quad (13)$$

$$K = \frac{b}{m} x_0 + v_L \log(v_0 - v_L) + v_0$$

Si vede quindi che non è possibile ottenere una soluzione analitica in forma chiusa,

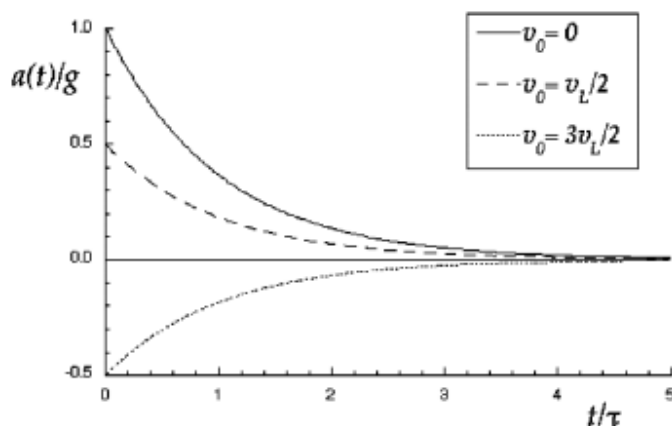
Cioè non è possibile ottenere esplicitamente $v = v(x)$ in quanto l'equazione contiene sia v che $\log(v - v_L)$, ma è possibile avere $x(v)$ oppure la curva in forma parametrica $(x(t), v(t))$, il che ci permette di avere un'idea abbastanza precisa di come vanno le cose.

Oppure si potrà procedere con metodi numerici.

Vediamo come vanno le cose per l'accelerazione, la possiamo ricavare derivando la (12)

$$a(t) = \frac{d}{dt} v(t) = \frac{d}{dt} [\tau g - (\tau g - v_0) e^{-t/\tau}] = \frac{1}{\tau} (v_L - v_0) e^{-t/\tau} = \left(g - \frac{v_0}{\tau} \right) e^{-t/\tau} \quad (14)$$

Notiamo che l'accelerazione vale $(g - v_0/\tau)$ per $t = 0$ e tende ad annullarsi con legge esponenziale, governata dal parametro τ . L'andamento grafico, normalizzata con g , è il seguente.



Al fine di ricavare la legge oraria basta integrare la (12)

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \tau g - (\tau g - v_0) e^{-t/\tau}$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_L - (v_L - v_0) e^{-t/\tau}$$

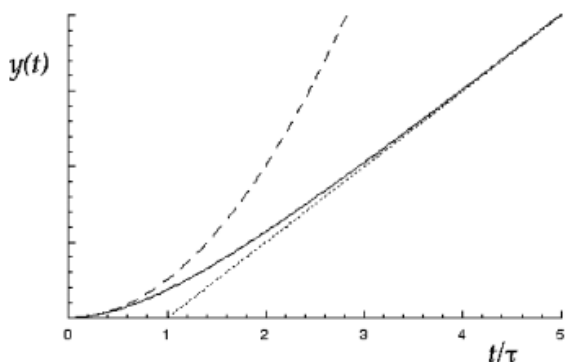
$$[v_L - (v_L - v_0) e^{-t/\tau}] dt = dx$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t [v_L - (v_L - v_0) e^{-t/\tau}] dt$$

$$x - x_0 = v_L t + (v_L - v_0) \tau (e^{-t/\tau} - 1)$$

$$x(t) = x_0 + v_L t + \tau (v_L - v_0) (e^{-t/\tau} - 1) \quad (15)$$

L'andamento, in funzione di t/τ è il seguente:



Dalla (15) si vede che per valori di t molto grandi l'andamento dello spostamento è lineare, infatti per t grandi la velocità assume un valore costante pari a v_L .

Si può notare, altresì, come per valori di t/τ molto piccoli, l'andamento sia simile a quello uniformemente accelerato che si avrebbe in assenza di forze di attrito (linea tratteggiata). Questo

fatto si può dimostrare partendo dall'espressione (15) – limitandoci per semplicità al caso di velocità iniziale nulla $v_0 = 0$ – ed approssimandola per valori molto piccoli di t/τ : In tale situazione, per l'esponenziale è lecito adottare uno sviluppo di Taylor troncato al secondo ordine, cioè

$$e^{-t/\tau} \approx 1 - \frac{t}{\tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \text{ che sostituito nella (15) dà}$$

$$x(t) = x_0 + v_L t + \tau(v_L - v_0)(e^{-t/\tau} - 1)$$

$$x(t) \approx x_0 + v_L t + \tau(v_L)(1 - \frac{t}{\tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 - 1) =$$

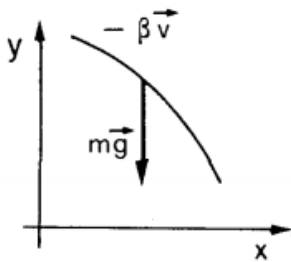
$$= x_0 + v_L t + \tau(v_L) \left(-\frac{t}{\tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \right) = x_0 + v_L t - \tau v_L \frac{t}{\tau} + \tau v_L \frac{1}{2} \frac{t^2}{\tau^2} =$$

$$= x_0 + v_L t - v_L t + \frac{1}{2} v_L \frac{t^2}{\tau} = x_0 + \frac{1}{2} \frac{mg}{b} \frac{b}{m} t^2 = x_0 + \frac{1}{2} g t^2$$

Consideriamo il vettore $\mathbf{v}_0$ non perpendicolare al terreno, avremo così un moto in due dimensioni.

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{g} - b\mathbf{v}$$

Scegliamo un SR con l'asse x orizzontale e asse y verticale orientato verso l'alto.



Avremo:

$$\begin{cases} -bv_x = m \frac{dv_x}{dt} \\ -mg - bv_y = m \frac{dv_y}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = -\frac{m}{b} \frac{dv_x}{dt} \\ mg + bv_y = -\frac{m}{b} \frac{dv_y}{dt} \end{cases} \quad (16)$$

Esse sono due equazioni differenziali disaccoppiate del tipo

$$A + v = -B \frac{dv}{dt} \quad (17)$$

Essendo

$$\begin{cases} B = \frac{m}{b}; A = 0 & \text{per la prima della (16)} \\ B = \frac{m}{b}; A = \frac{mg}{b} & \text{per la seconda della (16)} \end{cases} \quad (18)$$

La (17) è un'equazione differenziale del primo ordine in $v(t)$ che si integra facilmente per separazione di variabili: cost

$$\frac{dv}{A+v} = -\frac{dt}{B}$$

$$\log(A+v) = -\frac{t}{B} + \text{cost}$$

$$A+v = e^{-t/B + \text{cost}} = Ce^{-t/B}$$

Sia $v = 0$ per $t = 0$,

allora avremo $C = A + v_0$, quindi la relazione precedente diventa

$$A+v = e^{-t/B + \text{cost}} = (A+v_0)e^{-t/B}$$

Ovvero

$$v(t) = (A+v_0)e^{-t/B} - A$$

Tenendo conto della (18) la soluzione è

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0,x} e^{-t/\tau} \\ v_y &= (v_L + v_{0,y})e^{-t/\tau} - v_L \end{aligned} \quad (19)$$

Notiamo che all'aumentare del tempo la componente orizzontale della velocità diminuisce con legge esponenziale e tende a zero per valori grandi di t . La componente verticale, invece, qualunque sia il valore di $v_{0,y}$ per t grande tende al valore asintotico $v_L = -mg/b$, e vediamo che il suo valore è tanto più piccolo quanto più grande è il rapporto b/m : poiché fissato il fluido, il parametro b dipende solo dalla forma dell'oggetto, la velocità limite è tanto maggiore quanto più grande è la sua massa. Fissata invece la massa, la v_L è tanto minore quanto più grande è b .

Possiamo infine ricavare le equazioni orarie.

$$\int_0^x dx = \int_0^t v_{0,x} e^{-t/\tau} dt; \quad \int_{y_0}^y dy = \int_0^t [(v_L + v_{0,y})e^{-t/\tau} - v_L] dt$$

$$x(t) = v_{0,x}(\tau - \tau e^{-t/\tau}) = v_{0,x}\tau(1 - e^{-t/\tau}) \quad (20)$$

$$y(t) = y_0 + \tau[(v_L + v_{0,y}) - (v_L + v_{0,y})e^{-t/\tau}] - v_L t = y_0 + \tau(v_L + v_{0,y})(1 - e^{-t/\tau}) - v_L t$$

Troviamo per concludere l'equazione della traiettoria.

Isoliamo l'esponenziale dalla prima equazione e troviamo t in funzione di x :

$$x(t) = v_{0,x}\tau(1 - e^{-t/\tau})$$

$$1 - e^{-t/\tau} = \frac{x(t)}{v_{0,x}\tau}; \quad e^{-t/\tau} = 1 - \frac{x(t)}{v_{0,x}\tau}; \quad -\frac{t}{\tau} = \log\left(1 - \frac{x(t)}{v_{0,x}\tau}\right);$$

$$t = -\tau \log\left(1 - \frac{x(t)}{v_{0,x}\tau}\right)$$

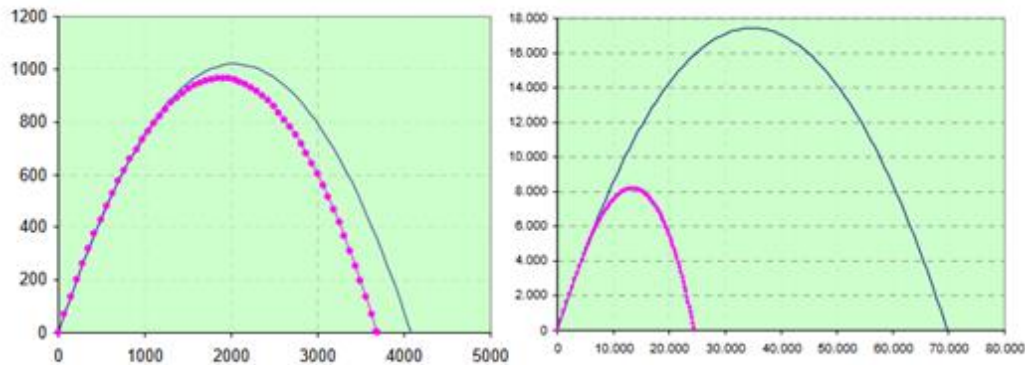
Sostituendo quindi questa espressione in $y(t)$

$$y(t) = y_0 + \tau(v_L + v_{0,y})\left[1 - \left(1 - \frac{x(t)}{v_{0,x}\tau}\right)\right] - v_L \left[-\tau \log\left(1 - \frac{x(t)}{v_{0,x}\tau}\right)\right]$$

Dunque l'equazione della traiettoria è

$$y(t) = y_0 + \frac{(v_L + v_{0,y})}{v_{0,x}} x(t) + \tau v_L \log \left(1 - \frac{x(t)}{v_{0,x} \tau} \right) \quad (21)$$

Il cui andamento qualitativo è il seguente



Traiettoria di un proiettile di artiglieria (calibro 155, 44kg, sparato a 45°) a sinistra con velocità iniziale 200m/s, a destra con velocità iniziale 827m/s. I punti rappresentano la traiettoria con resistenza dell'aria, le linee continue la traiettoria che avrebbe seguito in vuoto.

Esempio 2

Calcolare la velocità limite per le gocce d'acqua che cadono in presenza di aria.
(raggio = 10^{-5} m; $\eta = 1.7 \cdot 10^{-5}$ Pa · s)

Per risolvere questo esercizio sarà utile richiamare la legge di Stokes che riguarda la forza di attrito viscoso a cui è soggetta una sfera in moto in un fluido con numero di Reynolds minore di 0.6: essa fu dedotta da George Stokes nel 1851. Costituisce un'applicazione al caso pratico della sfera della più generale legge di Newton-Stokes - la legge costitutiva dei fluidi a viscosità lineare.

La forza di resistenza detta anche forza di Stokes su una sfera è espressa dalla seguente relazione

$$F_R = bv = K\eta v = 6\pi r \eta v$$

Dove K è un coefficiente che tiene conto della forma del corpo, r è il raggio della sfera ed η è il coefficiente di viscosità (dinamica) del fluido, mentre v è la velocità relativa fra la sfera ed il fluido. Per forme geometrie semplici è possibile ricavare l'espressione di K, che nel caso della sfera vale $K = 6\pi r$

Mentre ad esempio per un cilindro che cade verticalmente con l'asse di simmetria verticale si ha:

$$K = 2\pi L (\log(L/r) - 0.5)$$

dove L è la lunghezza del cilindro ed r il suo raggio.

Non tenendo conto della forza di Archimede si ha (moto unidimensionale, asse y verso il basso)

$$ma = mg - bv \quad \text{a regime si ha}$$

$$v_L = \frac{mg}{b} = \frac{mg}{K\eta}$$

Occorre ricavare la massa della goccia $m = d \cdot V$

dove d è la densità dell'acqua, il cui valore è noto essere 10^3 kg/m^3 e V il volume della goccia che ricaviamo dalla relazione del volume di una sfera

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi (10^{-5})^3 = \frac{4}{3} \pi 10^{-15} \text{ m}^3$$

$$m = d \cdot V = 10^3 \cdot 1.3 \pi \cdot 10^{-15} = 1.3 \pi 10^{-12} \text{ kg}$$

Quindi la velocità limite vale

$$v_L = \frac{mg}{K\eta} = \frac{1.3 \pi \cdot 10^{-12} \cdot 9.81}{6 \pi \cdot 10^{-5} \cdot 1.7 \cdot 10^{-5}} = 1.25 \cdot 10^{-2} \text{ m/s} = 1.25 \text{ cm/s}$$

Per gocce più grandi aventi raggio di 1 mm si ha

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi (10^{-3})^3 = 4.19 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3$$

$$m = d \cdot V = 10^3 \cdot 4.19 \cdot 10^{-9} = 4.19 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$$

$$v_L = \frac{mg}{K\eta} = \frac{4.19 \cdot 10^{-6} \cdot 9.81}{6 \pi \cdot 10^{-3} \cdot 1.7 \cdot 10^{-5}} = \frac{41.1 \cdot 10^{-6}}{32.0 \cdot 10^{-8}} = 1.28 \cdot 10^2 \text{ m/s} = 460 \text{ km/h}$$

Consideriamo ora il contributo della forza di Archimede che è pari al peso del volume di fluido spostato. L'equazione del moto è ora

$$ma = mg - bv + F_A$$

Quando si raggiunge la condizione di regime l'accelerazione si annulla e si ha

$$bv_L = mg - F_A$$

$$v_L = \frac{mg - F_A}{K\eta}$$

$$\text{con } F_A = m_f g = d_f \cdot V \cdot g = d_f \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot g$$

dove d_f è la densità del fluido che in questo caso è l'aria, quindi $d_f = 1.23 \text{ kg/m}^3$

Nel caso della goccia precedente ($r = 1 \text{ mm}$) si ha

$$F_A = m_f g = d_f \cdot V \cdot g = d_f \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 g = 1.23 \frac{4}{3} \pi \cdot (10^{-3})^3 \cdot 9.81 = 50.5 \cdot 10^{-9} \text{ N}$$

$$m = d_{\text{acqua}} \cdot V = d_{\text{acqua}} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = 10^3 \frac{4}{3} \pi (10^{-3})^3 = 4.18 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$$

$$v_L = \frac{mg - m_f g}{K\eta} = \frac{4.18 \cdot 10^{-6} \cdot 9.81 - 50.5 \cdot 10^{-9}}{6 \pi 10^{-3} \cdot 1.7 \cdot 10^{-5}} = \frac{41.07 \cdot 10^{-6} - 50.5 \cdot 10^{-9}}{32.0 \cdot 10^{-8}} =$$

$$= \frac{41.01 \cdot 10^{-6}}{32.0 \cdot 10^{-8}} = 1.28 \cdot 10^2 \text{ m/s} = 461 \text{ km/h}$$

Più elegantemente la velocità limite si può esprimerla nel seguente modo

$$v_L = \frac{2}{9} \frac{r^2 g}{\eta} (d_{\text{acqua}} - d_{\text{aria}})$$

Per gocce con raggio di 0.5 mm si ha un valore più basso

$$v_L = \frac{2}{9} \frac{(0.5 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 9.81}{1.7 \cdot 10^{-5}} (1000 - 1.23) = 32 \text{ m/s} = 115 \text{ km/h}$$

Si tenga presente che i valori sperimentali della velocità limite che una goccia di pioggia può avere (con raggio compreso fra 0.25 mm e 4 mm (se più grande si spezza) variano da 8 km/h a 40 km/h.

Sono diversi i fattori che riducono drasticamente i valori precedentemente trovati con il nostro modello semplificato, si consideri ad esempio che valori maggiori di 10^{-4} m intervengono fattori di turbolenza e la dipendenza lineare dalla velocità non è più una ipotesi accettabile.

Esempio 3

Una particella di massa m viene lanciata verticalmente verso l'alto con velocità iniziale v_0 in presenza della gravità e di attrito viscoso. Siano noti i valori dell'accelerazione di gravità g , del coefficiente di resistenza viscosa K e del coefficiente di viscosità η . Calcolare il tempo a cui la particella raggiunge la quota massima e il valore di quest'ultima e confrontarli con il caso in cui l'attrito sia assente. Quale errore si fa nel trascurare l'attrito nel calcolo della quota massima?

In moto è puramente unidimensionale: scegliamo l'asse y rivolto verso l'alto.

Possiamo allora usare la seconda delle (19) considerando ora che v_0 ha solo componente y : $v_{0y} = v_0$

$$v(t) = (v_L + v_0)e^{-t/\tau} - v_L \quad (a)$$

A partire da questa espressione possiamo ricavare il tempo, T , che passa dall'istante iniziale ($t=0$; $y=0$)

fino a quando la particella salendo rallenta fino a fermarsi $v(t) = 0$.

$$0 = (v_L + v_0)e^{-T/\tau} - v_L; \quad e^{-T/\tau} = \frac{v_L}{(v_L + v_0)}; \quad -\frac{T}{\tau} = \log\left(\frac{v_L}{(v_L + v_0)}\right) \quad (b)$$

$$T = -\tau \log\left(\frac{v_L}{(v_L + v_0)}\right)$$

Si noti che il tempo è sicuramente positivo in quanto il valore del logaritmo, avendo argomento minore di 1, è negativo.

Ricordando che $\tau = v_L/g$ si ha

$$T = \frac{v_L}{g} \log\left(1 + \frac{v_0}{v_L}\right) \quad (c)$$

Possiamo anche calcolare la quota massima raggiunta dalla particella usando la seconda delle (20), ponendo $y_0 = 0$ e $t = T$, a tal uopo integriamo la (a)

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = (v_L + v_0)e^{-t/\tau} - v_L; \quad dy = [(v_L + v_0)e^{-t/\tau} - v_L] dt$$

$$\int_0^{y_{\max}} dy = \int_0^T [(v_L + v_0)e^{-t/\tau} - v_L] dt$$

$$y_{\max} = -v_L T + \tau(v_L + v_0)(1 - e^{-T/\tau})$$

Sfruttando la seconda relazione della (b)

$$y_{\max} = -v_L T + \tau(v_L + v_0)(e^{-T/\tau} - 1) = -v_L T + \tau(v_L + v_0) \left(1 - \frac{v_L}{(v_L + v_0)} \right)$$

$$y_{\max} = -v_L T + \tau v_0$$

$$y_{\max} = -v_L \frac{v_L}{g} \log \left(1 + \frac{v_0}{v_L} \right) + \tau v_0$$

Che possiamo riarrangiare nel seguente modo

$$y_{\max} = -\frac{v_L^2}{g} \log \left(1 + \frac{v_0}{v_L} \right) + \frac{v_L}{g} v_0$$

$$y_{\max} = \frac{v_L v_0}{g} \left[1 - \frac{v_L}{v_0} \log \left(1 + \frac{v_0}{v_L} \right) \right] \quad (d)$$

Le soluzioni trovate per T e $y_{\max}$ possono essere confrontate con gli analoghi risultati del problema balistico in assenza di attrito. In tal caso, il tempo di salita, come noto, vale $T_0 = v_0/g$, che equivale a metà del tempo di volo in una traiettoria parabolica con ritorno alla stessa quota di partenza. Graficamente, il tempo v_0/g corrisponde all'intersezione della retta $v(t) = v_0 - gt$ con l'asse dei tempi nel diagramma t - v .

La quota massima è $y_{\max}' = v_0^2/(2g)$ e corrisponde all'area del triangolo sotteso dalla stessa retta (si veda la linea tratto-punto nella figura qui sotto).

Dunque, l'errore assoluto che si fa trascurando l'attrito è dato dalla differenza $\Delta y = y_{\max}' - y_{\max}$.

$$\Delta y = y_{\max}' - y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_L v_0}{g} \left[1 - \frac{v_L}{v_0} \log \left(1 + \frac{v_0}{v_L} \right) \right] \quad (e)$$

Usando le espressioni precedenti, l'errore relativo diventa

$$\frac{\Delta y}{y_{\max}'} = \frac{\frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_L v_0}{g} \left[1 - \frac{v_L}{v_0} \log \left(1 + \frac{v_0}{v_L} \right) \right]}{\frac{v_0^2}{2g}} \quad (f)$$

Facciamo un esempio numerico, sia $v_0 = 30$ m/s $v_L = 10$ m/s, si ha

$$y_{\max} = \frac{10 \cdot 30}{9.81} \left[1 - \frac{10}{30} \log \left(1 + \frac{30}{10} \right) \right] = 21.2 \text{ m}$$

$$y_{\max}' = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{30^2}{2 \cdot 9.81} = 45.9 \text{ m}$$

$$\Delta y = y_{\max}' - y_{\max} = 45.9 - 21.2 = 24.7 \text{ m}$$

$$\frac{\Delta y}{y_{\max}'} = \frac{24.7}{45.9} = 54\%$$

Possiamo infine andare a verificare se le soluzioni trovate in presenza di viscosità convergono alle soluzioni note in assenza di viscosità. Per farlo occorre studiare il comportamento delle espressioni trovate nel caso in cui $K\eta \rightarrow 0$. Questo caso implica che sia $\tau \rightarrow \infty$ e $v_L \rightarrow \infty$ e dunque, per un qualsiasi valore ragionevole di v_0 e per tempi dell'ordine di T_0 (tempo di salita in assenza di attrito), si avrà $t/\tau \ll 1$ e $v_0/v_L \ll 1$. Si tratta quindi di andare a vedere come si comportano gli esponenziali del tipo e^{-x} ed i logaritmi del tipo $\log(1+x)$ per x piccoli.

[Qui si vede bene come l'esistenza di scale tipiche di tempi e di velocità permette di dare un significato fisico alla procedura di limite. Quando in fisica diciamo che un certo risultato deve essere ottenuto in un particolare limite in cui qualcosa diventa trascurabile, intendiamo che la soluzione generale deve assumere una forma nota quando una certa quantità è molto piccola rispetto ad una scala tipica fissata dai parametri del sistema. Individuare quale sia, di volta in volta, il "parametro piccolo" da usare come variabile in uno sviluppo in serie attorno ad un valore assegnato è una delle arti che si imparano nel mestiere del fisico].

Lo sviluppo di queste funzioni nell'intorno $x = 0$, come noto, è

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + \dots; \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

Quindi se prendiamo la velocità $v(t)$ data dalla (a) e tronciamo lo sviluppo dell'esponenziale al primo ordine nel parametro t/τ (piccolo), troviamo

$$v(t) = (v_L + v_0)e^{-t/\tau} - v_L \rightarrow v(t) \approx -v_L + (v_L + v_0)\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$$

sostituendo $\tau = v_L/g$ si ha

$$v(t) \approx -v_L + (v_L + v_0)\left(1 - g \frac{t}{v_L}\right) = v_0 - \left(1 + \frac{v_0}{v_L}\right)gt \quad \text{ed infine usando il fatto che } v_0/v_L \ll 1 \text{ si ha}$$

$$v(t) \approx v_0 - gt$$

Che corrisponde al moto balistico in assenza di attrito.

Analogamente possiamo prendere l'espressione del tempo di salita, dato dalla (c) e sviluppare il logaritmo, troncandolo al primo ordine nel parametro (piccolo) v_0/v_L , avendosi

$$T = \frac{v_L}{g} \log\left(1 + \frac{v_0}{v_L}\right) \rightarrow T \approx \frac{v_L}{g} \left(\frac{v_0}{v_L}\right) = \frac{v_0}{g} = T_0$$

Che di nuovo corrisponde al caso senza attrito, lo stesso vale per la quota massima raggiunta dal grave, infatti si ha dalla (d)

$$y_{\max} = \frac{v_L v_0}{g} \left[1 - \frac{v_L}{v_0} \log\left(1 + \frac{v_0}{v_L}\right)\right]; \rightarrow y_{\max} \approx \frac{v_L v_0}{g} \left[1 - \frac{v_L}{v_0} \left(\frac{v_0}{v_L} - \frac{v_0^2}{2v_L^2}\right)\right] \frac{v_0^2}{2g} = y'_{\max}$$

Ne concludiamo che le soluzioni generali ottenute prima sono consistenti con quanto ci aspettiamo nel limite in cui l'attrito sia assente, notiamo che per trovare il limite corretto per la quota massima abbiamo dovuto usare un troncamento fino al secondo ordine.

Moto armonico con attrito viscoso

Dopo l'analisi del moto di un grave in presenza di attrito viscoso, dipendente linearmente dalla velocità, concludiamo questo caso studiandolo nel caso di moto armonico.

Consideriamo dunque un oscillatore che si muove armonicamente di moto unidirezionale.

Richiamiamo il concetto di moto oscillatorio ed armonico.

La differenza principale tra moto oscillatorio e moto armonico riguarda il tipo di movimento e le forze che lo causano. In pratica, il moto armonico è un caso particolare di moto oscillatorio. Vediamo le differenze in dettaglio:

1. Moto Oscillatorio

Il moto oscillatorio è un movimento in cui un oggetto si sposta avanti e indietro attorno a una posizione di equilibrio in modo periodico. Questo tipo di movimento può essere causato da diverse forze, ma non necessariamente deve seguire una legge matematica semplice come quella del moto armonico.

Esempi di moto oscillatorio che non sono armonici:

Un pendolo con smorzamento (quando l'attrito è presente).

Un corpo attaccato a una molla con forze non lineari.

In generale, il moto oscillatorio può essere descritto come periodico, ma le forze che lo causano possono essere non lineari o non conservative, il che significa che la forma dell'oscillazione potrebbe non essere perfettamente sinusoidale.

2. Moto Armonico

Il moto armonico è un tipo di moto oscillatorio molto specifico in cui l'oggetto si muove in modo periodico seguendo una traiettoria che può essere descritta matematicamente da una funzione sinusoidale (o cosinusoidale).

Questo movimento si verifica quando la forza che richiama l'oggetto verso la posizione di equilibrio è proporzionale e opposta allo spostamento dell'oggetto stesso. La relazione tra la forza e lo spostamento segue la legge di Hooke.

Matematicamente, il moto armonico può essere descritto con l'equazione:

$$F = -kx$$

Dove:

F è la forza di richiamo

k è la costante elastica (di una molla, ad esempio)

x_0 è lo spostamento dalla posizione di equilibrio (ampiezza iniziale).

Esempi di moto armonico:

Un oggetto attaccato a una molla che oscilla senza smorzamento (senza resistenza dell'aria o attrito).

Un pendolo semplice con piccole oscillazioni (dove il movimento è quasi armonico, in quanto la forza gravitazionale può essere approssimata come proporzionale allo spostamento per angoli piccoli).

Tutti i moti armonici sono oscillatori, ma non tutti i moti oscillatori sono armonici. Il moto armonico è una forma ideale di moto oscillatorio che avviene quando la forza di richiamo è proporzionale allo spostamento, mentre il moto oscillatorio è un concetto più ampio che include anche movimenti che non seguono la legge di Hooke o che sono influenzati da forze dissipative.

La legge del moto è quella del moto armonico con il più il termine della forza viscosa $F_R = bv$:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b\dot{x} \text{ ovvero}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

E' comodo introdurre due parametri che si riveleranno essere molto utili nella discussione della soluzione e cioè la *pulsazione propria* dell'oscillatore $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e il coefficiente di smorzamento

$\gamma = \frac{b}{2m}$, con tali sostituzione l'equazione (22) diventa

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (22)$$

Trattasi di una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti che ammette dunque una soluzione generale del tipo

$$x(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} \quad (23)$$

Dove a e B sono due costanti di integrazione determinabile attraverso le condizioni iniziali; mentre α_1 e α_2 sono le soluzioni della seguente equazione algebrica associata

$$\alpha^2 + (2\gamma)\alpha + \omega_0^2 = 0$$

risolvendo

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (24)$$

Le caratteristiche del moto risultano diverse a seconda che α_1 e α_2 siano reali o complesse, cioè a seconda del segno del discriminante, si possono avere tre casi possibili.

Smorzamento forte

$$\text{Caso } \Delta > 0; \quad \gamma^2 > \omega_0^2 \quad \text{ossia} \quad \frac{b^2}{4m^2} > \frac{k}{m}; \rightarrow \underline{b^2 > 4mk}$$

In questo caso le due radici α_1 e α_2 sono reali ed entrambe negative, la soluzione in questo caso è la somma di due esponenziali decrescenti

$$x(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} = Ae^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + Be^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}$$

$$x(t) = e^{-\gamma t} (Ae^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + Be^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t}) \quad (25)$$



Smorzamento critico

Caso $\Delta = 0$; $\gamma^2 = \omega_0^2$ ossia $\frac{b^2}{4m^2} = \frac{K}{m} \rightarrow \underline{b^2 = 4mk}$

Le due radici α_1 e α_2 sono coincidenti e negative: $\alpha_{1,2} = -\gamma$

Si dimostra in tal caso che la soluzione diviene

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A + Bt) \quad (26)$$

Avendo un andamento qualitativamente simile al caso precedente.



Smorzamento debole

Caso $\Delta < 0$; $\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m} < 0$; ossia $\frac{k}{m} > \frac{b^2}{4m^2} \rightarrow \underline{b^2 < 4mk}$

Essendo il discriminante negativo le soluzioni saranno immaginarie

$$\alpha_1 = -\gamma + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma + i\omega$$

$$\alpha_2 = -\gamma - i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma - i\omega$$

che sostituito alla (23) ci dà

$$x(t) = Ae^{(-\gamma+i\omega)t} + Be^{(-\gamma-i\omega)t} = e^{-\gamma t} (Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t})$$

Utilizzando la formula di Eulero $e^{\pm i\omega} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$ si ha

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} e^{i\omega t} + Be^{-\gamma t} e^{-i\omega t} = e^{-\gamma t} ((A+B)\cos \omega t + i(A-B)\sin \omega t)$$

Il risultato di questa espressione deve essere reale (poiché lo spostamento $x(t)$ è una grandezza reale) e questo comporta che i coefficienti A e B devono essere complessi coniugati e diversi fra loro.

Quindi si deve avere

$$A = a + ib; \quad B = a - ib \quad A = a + ib; \quad B = a - ib \quad \rightarrow A + B = 2a, \quad A - B = 2ib$$

Sostituendo nella (26) si ha

$$x(t) = e^{-\gamma t} (2a \cos \omega t + i(2ib) \sin \omega t) = e^{-\gamma t} (2a \cos \omega t - 2b \sin \omega t)$$

Dove a e b sono due costanti di integrazione determinabili con la conoscenza delle condizioni iniziali, ossia della posizione e velocità all'istante $t = 0$; a tal uopo si pone:

$$2a = C_0 \sin \varphi; \quad 2b = C_0 \cos \varphi$$

dove ora C_0 è una costante che non rappresenta più la posizione iniziale ma è ad essa legata dalla relazione

$$C_0 = x(0) \sin \varphi,$$

Arriviamo così alla soluzione canonica:

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} (\cos \omega t \sin \varphi + \sin \omega t \cos \varphi)$$

$$x(t) = C_0 e^{-\gamma t} (\sin \omega t + \varphi) \quad (27)$$

Con le costanti di integrazioni C_0 e φ . La fase istantanea è: $\theta(t) = (\omega t + \varphi)$ indica il punto dell'oscillazione in cui si trova in corpo oscillante al tempo t.

$$\text{Ad esempio se } \varphi = 0 \text{ si ha } x(t) = x_0 e^{-\gamma t} (\sin \omega t) \rightarrow x(0) = 0$$

ci dice che l'oscillatore inizia il moto dall'origine, se invece lo sfasamento iniziale è di 90° $\varphi = \pi / 2$ si ha

$$x(t) = C_0 e^{-\gamma t} (\sin \omega t + \pi / 2) = C_0 e^{-\gamma t} (\cos \omega t) \rightarrow x(0) = C_0$$

l'oscillatore inizia il moto dal punto di massima elongazione (ampiezza iniziale = C_0).

la costante C_0 rappresenta l'ampiezza iniziale "massima possibile" dell'oscillazione in assenza di smorzamento. Essa è anche nota come "ampiezza iniziale modulata": il valore massimo dell'ampiezza che l'oscillazione avrebbe all'istante iniziale $t=0$ se non fosse per il termine esponenziale di smorzamento.

Nel grafico della funzione $x(t)$, la fase si può interpretare come lo sfasamento tra l'oscillazione attuale e un'oscillazione di riferimento (come $\sin(\omega t)$ senza fase iniziale).



Concludendo notiamo come l'attrito viscoso riduce la pulsazione rispetto al caso libero. La (26) rappresenta una sinusoide di ampiezza $x_0 e^{-\gamma t}$, cioè di ampiezza decrescente esponenzialmente con il tempo.

Esempio 4

Un blocco di massa $m = 0.5 \text{ kg}$ è collegato a una molla ideale di costante elastica $k = 100 \text{ N/m}$ e può oscillare orizzontalmente su una superficie senza attrito. Il blocco è immerso in un mezzo viscoso che esercita una forza di smorzamento proporzionale alla velocità, di forma $F_v = -bv$, con $b = 1 \text{ kg/s}$.

- Calcola la frequenza angolare naturale dell'oscillatore (in assenza di smorzamento) e il coefficiente di smorzamento critico b_{crit} .
- Determina la frequenza angolare dell'oscillatore smorzato.
- Trova l'andamento della posizione $x(t)$ nel tempo se il blocco viene spostato di una distanza $x_0 = 0.1 \text{ m}$ dalla posizione di equilibrio e poi rilasciato senza velocità iniziale.
- Calcola il tempo $t_{1/2}$ dopo il quale l'ampiezza si riduce a metà rispetto al valore iniziale x_0 .

Per risolvere questo banale esercizio è sufficiente applicare le varie formule direttamente.

La frequenza naturale dell'oscillatore è

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{0.5}} = 14.14 \text{ s}^{-1}$$

Il coefficiente di smorzamento critico vale

$$b_{\text{rit}} = 2m\omega_0 = 2 \cdot 0.5 \cdot 14.14 = 14.14 \text{ kg/s}$$

La frequenza angolare dell'oscillatore immerso nel mezzo viscoso vale

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{14.14^2 - \left(\frac{1}{2 \cdot 0.5}\right)^2} = 14.10 \text{ s}^{-1}$$

L'andamento nel tempo della posizione dell'oggetto è data dalla relazione (26)

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} (\sin \omega t + \varphi)$$

che nel nostro caso, essendo la fase iniziale pari a zero, diventa

$$x(t) = x_0 e^{-8b/2m t} \cos \omega t = 0.1 e^{-(1/2 \cdot 0.5)t} \cos(14.10t) = 0.1 e^{-t} \cos(14.10t)$$

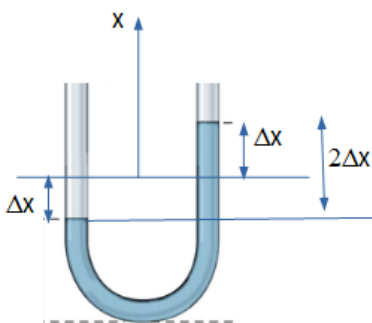
Il tempo $t_{1/2}$ è il tempo per cui l'ampiezza $x(t)$ si riduce della metà del suo valore iniziale. Ricordando che l'ampiezza del moto oscillatorio è dato dal fattore $x_0 e^{-(b/2m)t}$, si ha

$$x(t_{1/2}) = \frac{1}{2} x_0 = x_0 e^{-(b/2m)t_{1/2}} \rightarrow t_{1/2} = \frac{2m}{b} \log 2 = \frac{2 \cdot 0.5}{1} 0.69 = 0.69 \text{ s}$$

N.B Si pensi ad esempio all'ammortizzatore delle automobili, esso è una molla (con un opportuno valore della costante elastica) immersa in un fluido con opportuna viscosità tale che quando è sollecitata non compia oscillazioni, anzi si vuole proprio che lavori in regime di smorzamento critico in modo da portarsi a zero più velocemente possibile.

Esempio 5

Un tubo di vetro a sezione costante ($S = 1 \text{ cm}^2$) è piegato ad U: esso è disposto verticalmente e contiene una massa m d'acqua, che occupa la lunghezza di $L = 1 \text{ m}$. In uno dei due rami il livello d'acqua viene abbassato di $h = 10 \text{ cm}$ al di sotto della posizione di equilibrio con una opportuna pressione che all'istante $t = 0 \text{ s}$ viene annullata. Ricavare l'equazione del moto della massa d'acqua. Supponiamo poi che la massa d'acqua nel suo moto oscillatorio che si instaura sia sottoposta ad attrito proporzionale alla velocità con coefficiente $b = 0.6 \text{ kg/s}$. Verificare in queste condizioni che il moto risulta debolmente smorzato e scrivere la nuova equazione del moto.



La massa d'acqua è $m = \rho V = \rho(S \cdot L) = 10^3(10^{-4} \cdot 1) = 0.1 \text{ kg}$

Quando il livello dell'acqua è spostato di un dislivello Δx rispetto alla posizione di equilibrio, si instaura una forza di richiamo dovuta alla differenza di pressione tra i due rami. Questa forza è causata dalla differenza di peso delle colonne d'acqua nei due rami del tubo, e può essere espressa come (ricordando che la pressione idrostatica di un liquido di altezza h è $P = \rho gh$)

$$F = \Delta P \cdot S = \rho g \cdot 2\Delta x \cdot S$$

Questa forza di richiamo è a tutti gli effetti una forza elastica, per cui possiamo scrivere

$$F = -k\Delta x \equiv \rho g \cdot 2\Delta x \cdot S \rightarrow$$

$$k = 2\rho g S = 2 \cdot 10^3 \cdot 9.81 \cdot 10^{-4} = 1.96 \text{ N / m}$$

L'equazione del moto è

$$F \equiv m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \Delta x; \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2g}{L} \Delta x = 0$$

Questa è l'equazione differenziale di un'oscillazione armonica semplice, con pulsazione naturale:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{L}} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1.96}{0.1}} = 4.43 \text{ s}^{-1} \text{ e periodo}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}} = 2\pi \sqrt{\frac{0.1}{1.96}} = 1.42 \text{ s}$$

Si osservi che questo periodo è uguale a quello di un pendolo semplice lungo $L/2$.

La cui soluzione come noto è

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Con velocità data da

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [A \cos(\omega_0 t + \varphi)] = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Con A e φ da determinarsi dalle condizioni iniziali che sono $x(0) = h$; $v(0) = 0$

$$x(0) = h = A \cos(\omega_0 \cdot 0 + \varphi) = A \cos \varphi = 0.1 \text{ m}$$

$$v(0) = -A \omega_0 \sin(\omega_0 \cdot 0 + \varphi) = -\omega_0 A \sin \varphi = 0$$

Dalla seconda si vede che dovendo essere nullo il prodotto, l'unico termine che può assumere il valore nullo è il seno, per cui dovrà essere $\varphi = 0$ ed allora dalla prima equazione si ha

$$A \cos 0^\circ = 0.1 \rightarrow A = 0.1 \text{ m} \quad \text{e l'equazione del moto, senza attrito, diventa}$$

$$x(t) = 0.1 \cos(4.43t)$$

In presenza di attrito al fine di determinare, in quale dei tre casi discussi sopra si ricade, applichiamo i criteri visti sopra, si ha:

$$b = 0.6; \quad b^2 = 0.36$$

$$4km = 4 \cdot 1.96 \cdot 0.1 = 0.78 \rightarrow b^2 < 4km$$

Quindi siamo nel caso di smorzamento debole.

Ricaviamo la pulsazione

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$\gamma = \frac{b}{2m} = \frac{0.6}{2 \cdot 0.1} = 3 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{4.43^2 - 3^2} = 3.26 \text{ s}^{-1}$$

L'equazione del moto, come visto sopra, in questo caso è

$$x(t) = C_0 e^{-\gamma t} (\sin \omega t + \varphi)$$

E la velocità è

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (C_0 e^{-\gamma t} (\sin \omega t + \varphi)) = C_0 e^{-\gamma t} [-\gamma \sin(\omega t + \varphi) + \omega \cos(\omega t + \varphi)]$$

Troviamo le due costanti imponendo $x(0) = h$ e $v(0) = 0$.

$$x(0) = C_0 \sin \varphi = h$$

$$v(0) = C_0 [-\gamma \sin(\varphi) + \omega \cos(\varphi)] = 0$$

Risolvendo questo sistema si ottiene

$$C_0 = 0.136 m$$

$$\varphi = 0.827^{rad}$$

L'equazione del moto è

$$x(t) = 0.136 e^{-3t} \sin(\omega t + 0.827^{rad})$$

Notiamo che la costante di tempo dell'esponenziale $\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{3} = 0.33 s$ è molto più piccola del

periodo delle oscillazioni smorzate $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3.26} = 1.93 s$ per cui ad esempio dopo un tempo pari essendo $T > 5\tau = 1.65 s$ il moto è praticamente terminato.

Caso $n = 1/2$

L'equazione del moto, nel caso di assenza di una forza attiva, è

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -b\sqrt{v} \quad (28)$$

La forza di attrito viscoso, di solito, è proporzionale alla velocità dell'oggetto in movimento attraverso un fluido, secondo la legge di Stokes, oppure al quadrato della velocità nei regimi turbolenti. Tuttavia, esistono condizioni particolari in cui l'attrito può essere proporzionale alla radice quadrata della velocità. Questo si verifica in situazioni intermedie tra il regime laminare e il regime turbolento, chiamato regime di transizione.

Dettagli del regime di transizione

In un fluido, il passaggio tra il regime laminare e quello turbolento avviene per numeri di Reynolds intermedi, solitamente attorno a $Re \approx 1000$. In questa fase, il comportamento dell'attrito viscoso è più complesso e la sua dipendenza dalla velocità non è lineare. La dipendenza della forza di attrito può variare con la radice quadrata della velocità per:

Scorrimento su superfici porose o ruvide: quando la superficie di contatto non è completamente liscia, il flusso attorno all'oggetto si distorce, causando una dipendenza non lineare che talvolta è approssimabile alla radice quadrata della velocità.

Fluido a densità variabile: in alcuni fluidi con densità non uniforme o variabile in funzione della velocità (come schiume o liquidi non newtoniani), il rapporto tra attrito e velocità può risultare alterato.

Flusso con oscillazioni: in presenza di flussi oscillanti o con piccoli vortici localizzati, l'attrito può assumere una forma intermedia con dipendenza non lineare, dove il termine radice quadrata può comparire come approssimazione.

Flusso prossimo alla separazione: nelle zone dove il flusso inizia a distaccarsi dalla superficie (tipico di forme poco aerodinamiche), la forza di attrito si discosta dal comportamento lineare o quadratico, tendendo verso una proporzionalità alla radice quadrata della velocità.

Modelli di attrito viscoso nel regime di transizione

In questi casi particolari, la modellazione della forza di attrito può richiedere correzioni empiriche, che talvolta includono un termine in $v^{1/2}$ tuttavia, la dipendenza esatta dell'attrito viscoso in questi casi è difficile da modellare con precisione teorica e viene spesso determinata sperimentalmente.

Integrando la (28) si ha

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= -b\sqrt{v}; \quad \frac{dv}{\sqrt{v}} = -\frac{b}{m} dt; \quad \int_{v_0}^v \frac{dv}{\sqrt{v}} = -\frac{b}{m} \int_0^t dt; \quad 2\sqrt{v} \Big|_{v_0}^v = -\frac{b}{m} t \\ 2\sqrt{v} &= 2\sqrt{v_0} - \frac{b}{m} t; \quad \sqrt{v} = \sqrt{v_0} - \frac{b}{2m} t; \\ \sqrt{v} &= \sqrt{v_0} - \frac{t}{2\tau} \quad (\tau = m/b) \quad (29) \end{aligned}$$

Al fine di ottenere la $v(t)$ osserviamo che l'equazione non può essere elevata al quadrato perché si perderebbe dell'informazione! Occorrerà invece considerare che la $v(t)$ può essere pensata provenire dall'estrazione di radice della seguente espressione:

$$v = \left(\sqrt{v_0} - \frac{1}{2\tau} t \right)^2 \rightarrow \sqrt{v} = \sqrt{v_0} - \frac{1}{2\tau} t$$

Analizziamo l'aspetto matematico di questa relazione. Poniamo per compattezza di scrittura

$$v = y, \quad t = x; \quad \sqrt{v_0} = a, \quad \frac{1}{2\tau} = b \quad \text{avendosi}$$

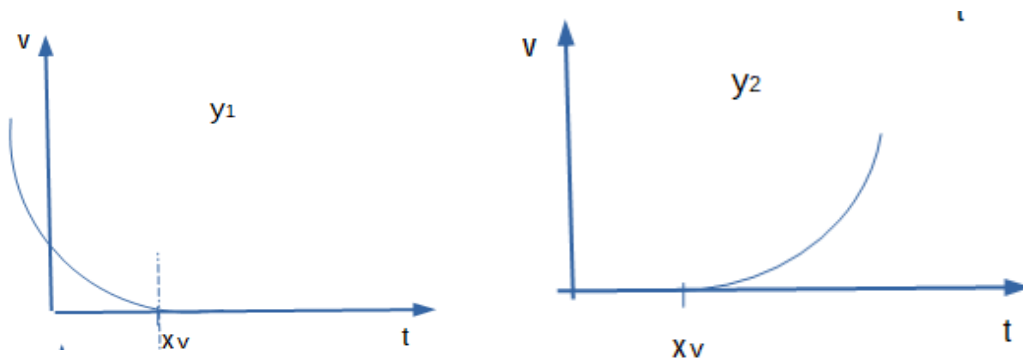
$$y = (a - bx)^2$$

Estraendo la radice quadrata abbiamo due funzioni

$$y_1 \rightarrow +\sqrt{y} = a - bx \rightarrow y = bx^2 - 2abx + a^2 \quad \text{definita per } y \geq 0$$

$$y_2 \rightarrow -\sqrt{y} = a - bx \quad \text{ossia} \quad \sqrt{y} = bx - a \rightarrow y = bx^2 - 2abx + a^2 \quad \text{definita per } y < 0$$

Graficamente è immediato vedere che esse rappresentano le due metà di una parabola avente vertice ($x_v = a/b$; $y_v = 0$)



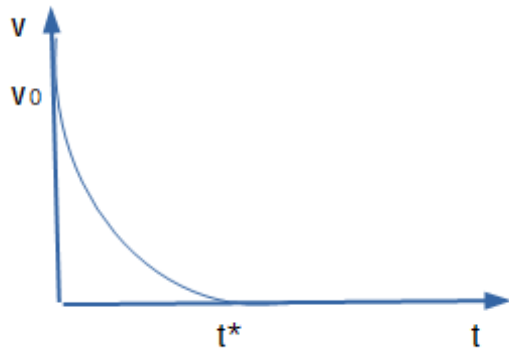
Il vertice è allora

$$x_{\text{Vertice}} = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{v_0}}{1/2\tau} = 2\tau\sqrt{v_0}$$

L'intervallo dei valori della velocità è $0 \leq v \leq v_0$.

E' ovvio che dobbiamo scartare la y_2 in quanto fisicamente significherebbe che il corpo una volta arrestatosi, di propria iniziativa, cioè senza nessuna forza agente, si rimetta in moto. Dunque la nostra funzione è

$$v(t) = \frac{1}{4\tau^2} t^2 - \frac{\sqrt{v_0}}{\tau} t + v_0; \quad \text{per } 0 \leq t \leq 2\tau\sqrt{v_0} \quad (29)$$



Dove $t^* = 2\tau\sqrt{v_0}$ è il tempo di arresto.

Determiniamo l'espressione dei $v(x)$.

$$\begin{aligned}
 m \frac{dv}{dt} &= -b\sqrt{v}; & m \frac{dv}{dx} v &= -b\sqrt{v}; & \frac{v}{\sqrt{v}} dv - \frac{1}{\tau} x &= -\frac{1}{\tau} dx; & \int_{v_0}^v \frac{v}{\sqrt{v}} dv &= -\frac{1}{\tau} \int_{x_0}^x dx = \\
 &= \frac{2}{3} v^{3/2} - \frac{2}{3} v_0^{3/2} = -\frac{1}{\tau} x + \frac{1}{\tau} x_0 \\
 \frac{2}{3} v^{3/2} &= -\frac{1}{\tau} x + \frac{x_0}{\tau} + \frac{2}{3} v_0^{3/2} \\
 v^{3/2} &= -\frac{3}{2\tau} x + \frac{3x_0}{2\tau} + v_0^{3/2}
 \end{aligned}$$

$$v(x) = \sqrt[3]{\left(-\frac{3}{2\tau} x + \frac{3x_0}{2\tau} + v_0^{3/2}\right)^2} \quad (30)$$

Da questa relazione possiamo determinare la distanza massima percorsa dal corpo prima di arrestarsi, basta porre $v(x) = 0$

$$\begin{aligned}
 0 &= \sqrt[3]{\left(-\frac{3}{2\tau} x + \frac{3x_0}{2\tau} + v_0^{3/2}\right)^2} \\
 \left(-\frac{3}{2\tau} x + \frac{3x_0}{2\tau} + v_0^{3/2}\right) &= 0 \\
 x_{\max} &= x_0 + \frac{2\tau}{3} v_0^{3/2} \quad (31)
 \end{aligned}$$

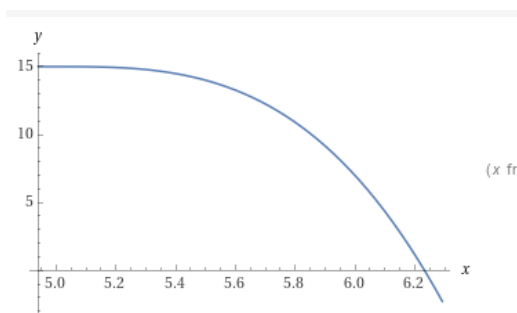
Infine determiniamo l'equazione del moto

$$\begin{aligned}
 v(x) &\equiv \frac{dx}{dt} = \sqrt[3]{\left(-\frac{3}{2\tau} x + \frac{3x_0}{2\tau} + v_0^{3/2}\right)^2} \\
 \frac{dx}{\sqrt[3]{\left(-\frac{3}{2\tau} x + \frac{3x_0}{2\tau} + v_0^{3/2}\right)^2}} &= dt \\
 \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt[3]{\left(-\frac{3}{2\tau} x + \frac{3x_0}{2\tau} + v_0^{3/2}\right)^2}} &= \int_0^t dt
 \end{aligned}$$

Per semplificare la scrittura poniamo

$$\begin{aligned}
B &= \frac{3}{2\tau}; \quad A = \frac{3x_0}{2\tau} + v_0^{3/2} \\
\int_{x_0}^x \frac{dx}{(A-Bx)^{2/3}} &= \int_0^t dt \\
-\frac{3}{B} \sqrt[3]{(A-Bx)} \Big|_{x_0}^x &= t \\
\sqrt[3]{(A-Bx)} - \sqrt[3]{(A-Bx_0)} &= -\frac{B}{3} t \\
\sqrt[3]{(A-Bx)} &= -\frac{B}{3} t + \sqrt[3]{(A-Bx_0)} \\
A-Bx &= \left[-\frac{B}{3} t + \sqrt[3]{(A-Bx_0)} \right]^3 \\
Bx &= A - \left[-\frac{B}{3} t + \sqrt[3]{(A-Bx_0)} \right]^3 \\
x(t) &= \frac{1}{B} \left\{ A - \left[-\frac{B}{3} t + \sqrt[3]{(A-Bx_0)} \right]^3 \right\} \\
x(t) &= \frac{A}{B} - \frac{\left[-\frac{B}{3} t + \sqrt[3]{(A-Bx_0)} \right]^3}{B}; \quad \text{con } B = \frac{3}{2\tau}; \quad A = \frac{3x_0}{2\tau} + v_0^{3/2} \quad (32)
\end{aligned}$$

Il cui grafico qualitativo è il seguente.



Per controprova si vede che sostituendo nella (32) $t = t_{\max} = 2\tau v_0$ si riottiene la distanza massima data dalla (31).

Se è presente una forza gravitazionale l'equazione del moto diventa

$$m \frac{dv}{dt} = mg - b\sqrt{v} \quad \text{integrando si ha}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{1}{\tau} \sqrt{v} : \quad \frac{dv}{\left(g - \frac{1}{\tau} \sqrt{v}\right)} = dt; \quad \tau \frac{dv}{(g\tau - \sqrt{v})} = dt; \quad \int_{v_0}^v \frac{dv}{(g\tau - \sqrt{v})} = \frac{1}{\tau} \int_0^t dt$$

$$2(g\tau \log(g\tau - \sqrt{v}) + \sqrt{v}) \Big|_{v_0}^v = \frac{1}{\tau} t$$

$$2(g\tau \log(g\tau - \sqrt{v}) + \sqrt{v}) \Big|_{v_0}^v = \frac{1}{\tau} t$$

$$2(g\tau \log(g\tau - \sqrt{v}) + \sqrt{v}) - 2(g\tau \log(g\tau - \sqrt{v_0}) + \sqrt{v_0}) = \frac{1}{\tau} t$$

$$2(g\tau \log(g\tau - \sqrt{v}) + \sqrt{v}) = \frac{1}{\tau} t + \left[2(g\tau \log(g\tau - \sqrt{v_0}) + \sqrt{v_0}) \right]$$

$$(g\tau \log(g\tau - \sqrt{v(t)}) + \sqrt{v(t)}) = \frac{1}{2\tau} t + (g\tau \log(g\tau - \sqrt{v_0}) + \sqrt{v_0}) \quad (33)$$

Quest'ultima relazione ci dice come varia la velocità nel tempo, solo che non è possibile esplicitarla nella forma $v(t) = f(t)$.

Per ottenere l'equazione del moto basta integrarla!!!

Caso $n = 2$

La relazione di dipendenza quadratica dalla velocità per moti viscosi viene utilizzata in fluidodinamica quando il regime di moto è caratterizzato da una dominanza degli effetti inerziali rispetto a quelli viscosi, tipicamente associata a numeri di Reynolds elevati. Questo tipo di relazione è generalmente espresso come una forza resistiva proporzionale al quadrato della velocità:

$$F_R = \frac{1}{2} \rho C_x A v^2$$

Dove ρ è la densità del fluido, C_x è il coefficiente di resistenza aerodinamica già descritto nel punto 2 della nota iniziale, A è un'area di riferimento, spesso coincide con la sezione trasversale del corpo mentre v è la velocità del corpo rispetto al fluido. Tale relazione viene usata nel caso di numeri di Reynolds elevati, nel qual caso gli effetti inerziali del flusso diventano predominanti ed il moto è generalmente turbolento e la relazione lineare con la velocità diviene trascurabile. Inoltre viene usata per oggetti come automobili, aeroplani, proiettili o veicoli spaziali in atmosfera, dove la resistenza quadratica domina perché la velocità è sufficientemente elevata.

Come per gli altri casi partiamo supponendo assente la forza attiva sul corpo.

$$m \frac{dv}{dt} = -bv^2$$

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{b}{m} dt \equiv -\frac{1}{\tau} dt$$

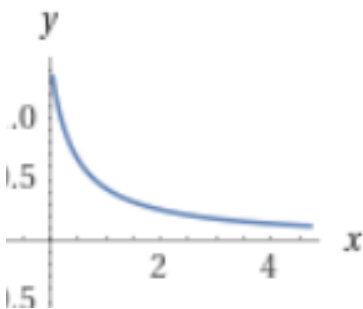
$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt$$

$$-\frac{1}{v} \Big|_{v_0}^v = -\frac{1}{\tau} t$$

$$-\frac{1}{v_0} + \frac{1}{v} = -\frac{1}{\tau} t$$

$$v(t) = \frac{v_0 \tau}{\tau - v_0 t} \quad (34)$$

Il cui andamento qualitativo è il seguente



La velocità in funzione dello spazio è

$$m \frac{dv}{dx} v = -bv^2$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\tau} v$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{\tau} dx$$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{1}{\tau} \int_{x_0}^x dx$$

$$\log \frac{v}{v_0} = -\frac{1}{\tau} (x - x_0)$$

$$\log \frac{v}{v_0} = -\frac{1}{\tau} (x - x_0)$$

$$v(x) = v_0 e^{-(x-x_0)/\tau} \quad (35)$$

L'equazione del moto è

$$v(t) \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{v_0 \tau}{\tau - v_0 t}$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t \frac{v_0 \tau}{\tau - v_0 t} dt$$

$$x - x_0 = -\frac{v_0 \tau \log(\tau - v_0 t)}{v_0} \Big|_0^t$$

$$x(t) = x_0 - \frac{v_0 \tau \log(\tau - v_0 t)}{v_0} + \frac{v_0 \tau \log \tau}{v_0}$$

$$x(t) = x_0 - \tau \log(\tau - v_0 t) + \tau \log \tau$$

$$x(t) = x_0 + \log \left(\frac{\tau}{\tau - v_0 t} \right) \quad (36)$$

Vediamo ora il caso in cui sia presente una forza agente sul corpo, che supponiamo essere la forza peso.

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv^2 \quad (37)$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{1}{\tau} v^2$$

$$\frac{dv}{g - \frac{1}{\tau} v^2} = dt$$

$$\frac{\tau dv}{g\tau - v^2} = dt$$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v_L^2 - v^2} = \frac{1}{\tau} \int_0^t dt$$

Avendo ricordato la relazione (3) che ora vale $v_L = (g\tau)^{1/2}$.

L'integrale vale

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v_L^2 - v^2} = \frac{1}{2v_L} \log \left| \frac{(v + v_L)}{(v - v_L)} \right| \Big|_{v_0}^v = \frac{1}{2v_L} \log \left| \frac{(v_L + v)}{(v_L - v)} \right| - \frac{1}{2v_L} \log \left| \frac{(v_L + v_0)}{(v_L - v_0)} \right| \quad \text{per cui abbiamo}$$

$$\frac{1}{2v_L} \log \left| \frac{(v_L + v)}{(v_L - v)} \right| - \frac{1}{2v_L} \log \left| \frac{(v_L + v_0)}{(v_L - v_0)} \right| = \frac{1}{\tau} t$$

$$\log \left| \frac{(v_L + v)}{(v_L - v)} \right| = \frac{2v_L}{\tau} t + \log \left| \frac{(v_L + v_0)}{(v_L - v_0)} \right|$$

$$\text{ponendo } a = \frac{2v_L}{\tau}; \quad b = \log \left| \frac{(v_L + v_0)}{(v_L - v_0)} \right|$$

$$\log \left| \frac{(v_L + v)}{(v_L - v)} \right| = at + b$$

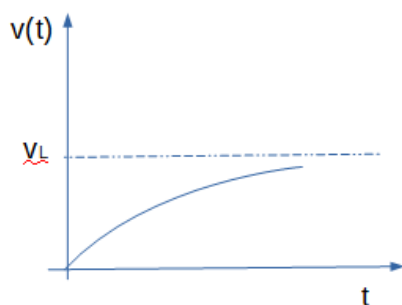
$$\frac{(v_L + v)}{(v_L - v)} = e^{at+b}$$

Con qualche ulteriore passaggio si arriva all'espressione della velocità in funzione del tempo.

$$v(t) = v_L \frac{e^{at+b} - 1}{e^{at+b} + 1} \quad (38)$$

$$\text{con } a = \frac{2v_L}{\tau}; \quad b = \log \left| \frac{(v_L + v_0)}{(v_L - v_0)} \right|$$

Il cui andamento è il seguente



La (38) può anche essere espressa in termini di tangente iperbolica (ricordando che

$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{x}{a} + C$) nel seguente modo.

$$v(t) = v_L \tanh \left[\left(\frac{v_L}{\tau} t \right) + \tanh^{-1} \frac{v_0}{v_L} \right] \quad (39)$$

Nel caso $v_0 = 0$ diventa.

$$v(t) = v_L \tanh \left(\frac{v_L}{\tau} t \right) \quad (39')$$

Ricaviamo la velocità in funzione dello spazio.

$$m \frac{dv}{dx} v = mg - bv^2$$

$$\frac{dv}{dx} v = g - \frac{1}{\tau} v^2$$

$$\frac{dv}{g - \frac{1}{\tau} v^2} v = dx$$

$$\frac{v}{v_L^2 - v^2} dv = \frac{1}{\tau} dx$$

Ricordando che l'integrale vale

$$\int \frac{x dx}{a^2 - x^2} = -\frac{1}{2} \log |a^2 - x^2| + C \text{ si ha}$$

$$\int_{v_0}^v \frac{v}{v_L^2 - v^2} dv = \frac{1}{\tau} \int_{x_0}^x dx$$

$$-\frac{1}{2} \log(v_L^2 - v^2) + \frac{1}{2} \log(v_L^2 - v_0^2) = \frac{1}{\tau} x - \frac{1}{\tau} x_0$$

$$\log(v_L^2 - v^2) = -\frac{2}{\tau} x + \frac{2}{\tau} x_0 + \log(v_L^2 - v_0^2)$$

$$\log(v_L^2 - v^2) = -ax + b$$

$$(v_L^2 - v^2) = e^{-ax+b}$$

$$v(x) = \sqrt{v_L^2 - e^{-ax+b}} \quad (40)$$

$$\text{con } a = \frac{2}{\tau}; \quad b = \frac{2}{\tau} x_0 + \log(v_L^2 - v_0^2)$$

Vediamo che per x grande la velocità tende v_L , come ci si aspettava.

Il grafico è del tutto simile a quello precedente.

Infine ricaviamo la legge oraria, riprendendo la (38).

$$v(t) \equiv \frac{dx}{dt} = v_L \frac{e^{at+b} - 1}{e^{at+b} + 1}$$

$$\text{con } a = \frac{2v_L}{\tau}; \quad b = \log \left| \frac{(v_L + v_0)}{(v_L - v_0)} \right|$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_L \frac{e^{at+b} - 1}{e^{at+b} + 1} dt$$

$$\int_{x_0}^x dx = v_L \int_0^t \frac{e^{at+b} - 1}{e^{at+b} + 1} dt$$

$$x - x_0 = v_L \left[\frac{2}{a} \log(e^{at+b} + 1) - t \right]_0^t = v_L \left[\frac{2}{a} \log(e^{at+b} + 1) - t - \frac{2}{a} \log 2 \right]$$

$$x(t) = v_L \left[\frac{2}{a} \log(e^{at+b} + 1) - t - \frac{2}{a} \log 2 \right] + x_0 \quad (41)$$

A cui si vede che per $t = 0$ si ha $x(0) = x_0$ mentre per t grande $x(t)$ cresce praticamente in modo lineare con il tempo.

In termini della costante di tempo si ha:

$$x(t) = v_L \left[\tau \log(e^{(2t/\tau)+b} + 1) - t - \tau \log 2 \right] + x_0 \quad (42)$$

Nel caso $v_0 = 0$ si ha $b = 0$ e l'espressione diventa:

$$x(t) = v_L \left[\tau \log(e^{2t/\tau} + 1) - t - \tau \log 2 \right] + x_0 \quad (43)$$

Se $v_0 = 0$ in termini di coseno iperbolico dalla (39') si ha:

$$x(t) = x_0 + \tau \log(\cosh(\frac{v_L}{\tau} t)) \quad (43')$$

Esempio 6

Si abbiano due sfere, una di legno ed una di acciaio, con densità rispettivamente di 500 e 8000 kg/m³ e raggio di 1 cm, in caduta libera; assumendo la densità dell'aria pari a 1.23 kg/m³ ed un coefficiente di penetrazione $C = 0.5$, si calcoli la velocità limite delle sfere ed a quale distanza di caduta si raggiungono tali valori, rappresentare inoltre il grafico della legge oraria, assumendo che partano da ferme da un'altezza di 10 metri.

Consideriamo che per oggetti macroscopici e/o velocità abbastanza grandi la forza di resistenza viscosa si può scrivere come $F_R = \frac{1}{2} C \rho S v^2$

Dove ρ è la densità del fluido, S è la "sezione frontale" (per una sfera di raggio R è $S = \pi R^2$) e C è il "coefficiente di penetrazione" (per le automobili è chiamato comunemente C_x) che in generale dipende dalla velocità ($C=C(v)$) ma che si può di norma approssimare con una costante.

Scriviamo l'equazione del moto

$$ma = mg - \frac{1}{2} C \rho S v^2 \quad (a)$$

Quando all'aumentare della velocità di caduta F_R raggiunge un valore uguale alla forza peso $ma = 0$ e si raggiunge la velocità limite che vale:

$$v_L = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho S}}$$

Notiamo preliminarmente che sarà lecito trascurare la resistenza dell'aria quando la forza peso predomina sulla forza di attrito, ossia quando

$$F_R \equiv \frac{1}{2} C \rho S v^2 \ll mg \rightarrow v \ll \sqrt{\frac{2mg}{C\rho S}} \equiv v_L \quad (b)$$

Per capire se è lecito trascurare la resistenza dell'aria, senza risolvere l'equazione (a), si può calcolare la velocità massima che sarebbe raggiunta in assenza d'aria e verificare se questa velocità soddisfa la (b). Se ciò avviene, è lecito trascurare la presenza dell'aria, altrimenti bisogna aspettarsi correzioni più o meno grandi a seconda di quanto è violata la (b).

E' facile convincersi che $v \rightarrow v_L$ indipendentemente dalla velocità iniziale, perciò ogni corpo, libero di muoversi in aria, raggiunge una velocità limite se ne ha il tempo, ovvero se cade da un'altezza sufficiente. Ora "lavoriamo" sulla (b) per esprimerla in funzione del raggio e densità delle sfere.

$$v_L = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho S}} = \sqrt{\frac{2\rho_{sfera} V_{sfera} g}{C\rho_{aria} \pi R^2}} = \sqrt{\frac{2\rho_{sfera} \frac{4}{3} \pi R^3 g}{C\rho_{aria} \pi R^2}} = \sqrt{\frac{8Rg\rho_{sfera}}{3C\rho_{aria}}}$$

Da questa relazione vediamo che v_L aumenta con l'aumentare delle dimensioni (del raggio della sfera) e della sua densità: i corpi più grandi e/o pesanti cadono più velocemente.

Calcoliamo le velocità limite per le due sfere.

Sfera di legno:

$$v_L = \sqrt{\frac{8Rg\rho_{sfera}}{3C\rho_{aria}}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 0.01 \cdot 9.81 \cdot 500}{3 \cdot 0.5 \cdot 1.23}} = 14.6 \text{ m/s} = 52.5 \text{ km/h}$$

Sfera di acciaio

$$v_L = \sqrt{\frac{8Rg\rho_{sfera}}{3C\rho_{aria}}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 0.01 \cdot 9.81 \cdot 8000}{3 \cdot 0.5 \cdot 1.23}} = 58.3 \text{ m/s} = 209.9 \text{ km/h}$$

Nel vuoto, quindi senza forza di attrito dell'aria la velocità limite si raggiunge dopo una distanza data dalla relazione del moto rettilineo accelerato $v^2 = 2ax$ (nel nostro caso $a = g$),

Sfera di legno

$$x_{velocità\ limite} = \frac{v_L^2}{2g} = \frac{14.6^2}{2 \cdot 9.81} = 10.8 \text{ m}$$

Sfera di acciaio

$$x_{velocità\ limite} = \frac{v_L^2}{2g} = \frac{58.3^2}{2 \cdot 9.81} = 173 \text{ m}$$

Quindi per dar modo alla sfera di legno di raggiungere la velocità limite essa deve cadere da almeno una altezza di 10.8 m, perciò se cade da un'altezza inferiore è lecito trascurare la resistenza dell'aria, stesso discorso, con numeri diversi, vale per la sfera di acciaio.

L'equazione del moto, essendo nulla la velocità iniziale è data dalla (43').

Si noti che dall'equazione (39') risulta che il tempo occorrente per raggiungere la velocità limite è infinito, infatti:

$$v(t) = v_L \tanh\left(\frac{v_L}{\tau} t\right) \rightarrow v_L = v_L \tanh\left(\frac{v_L}{\tau} t\right); \quad \tanh\left(\frac{v_L}{\tau} t\right) = 1$$

Come noto la tangente iperbolica tende ad 1 quando il suo argomento tende ad infinito.

Ma possiamo calcolare il tempo necessario per raggiungere ad esempio 0.99 v_L , usando

$$\text{l'uguaglianza } \frac{v_L}{\tau} = \frac{g}{v_L};$$

$$v(t) \equiv 0.99 v_L = v_L \tanh\left(\frac{v_L}{\tau} t\right); \quad \tanh\left(\frac{g}{v_L} t\right) = 0.99 \rightarrow \frac{g}{v_L} t = 2.65$$

Sfera di legno

$$t_{vel\ limite} = \frac{2.65 \cdot v_L}{g} = \frac{2.65 \cdot 14.6}{9.81} = 3.94 \text{ s} \quad t_{senza\ attrito} = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10.8}{9.81}} = 1.48 \text{ s}$$

Sfera di acciaio

$$t_{vel\ limite} = \frac{2.65 \cdot v_L}{g} = \frac{2.65 \cdot 58.3}{9.81} = 15.7 \text{ s} \quad t_{senza\ attrito} = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 173}{9.81}} = 5.9 \text{ s}$$

Infine calcoliamo quale distanza percorrono le sfere con tali tempi.

Sfera di legno

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \tau \log(\cosh(\frac{v_L}{\tau} t)) \equiv \frac{v_L^2}{g} \log(\cosh(\frac{g}{v_L} t)) = \frac{14.6^2}{9.81} \log(\cosh(\frac{9.81}{14.6} 3.94)) \\
 &= 21.73 \log(\cosh(2.65)) = 21.73 \log(1.63) = 10.6 \, m
 \end{aligned}$$

Sfera di acciaio

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \tau \log(\cosh(\frac{v_L}{\tau} t)) \equiv \frac{v_L^2}{g} \log(\cosh(\frac{g}{v_L} t)) = \frac{58.3^2}{9.81} \log(\cosh(\frac{9.81}{58.3} 15.7)) = \\
 &= 346.5 \log(\cosh(2.64)) = 346.5 \log(1.63) = 169 \, m
 \end{aligned}$$

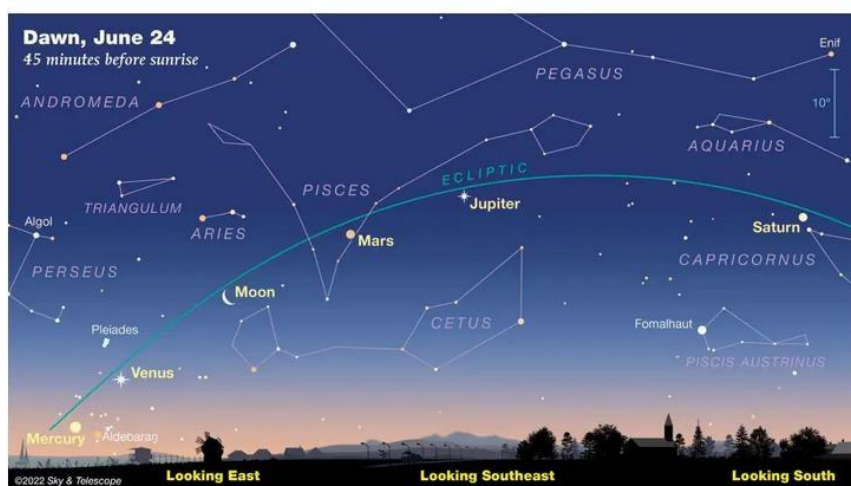
Appunti sulla legge gravitazionale

a cura di Giancarlo Buccella

Il moto dei corpi celesti ha affascinato l'umanità sin dagli albori della civiltà. Uno dei processi più interessanti nella storia della scienza è stato l'evoluzione della nostra comprensione del moto dei pianeti.

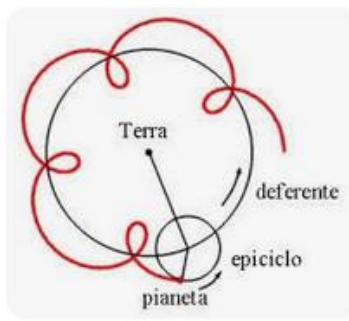
I Greci amavano considerare la Terra come il centro dell'Universo. Essi supponevano che la Terra fosse il centro geometrico e che tutti i "corpi celesti" si muovessero attorno ad essa. I corpi celesti conosciuti a quel tempo erano quelli visibili ad occhio nudo: Luna, Sole, Mercurio, Venere, Marte, Giove e Saturno, con le stelle fisse disposte su di una sfera più esterna.

Nella illustrazione seguente vediamo una congiunzione non usuale (avvenuta a giugno 2022) di tutti e cinque i pianeti disposti in ordine crescente di distanza dal Sole



La prima ipotesi sul moto planetario fu quella secondo la quale i pianeti (dal greco "planetes" che significa vagabondo, errante) descrivono orbite circolari concentriche aventi la Terra come centro. Tuttavia dalle prime osservazioni ci si accorse che tale modello non si accordava con il moto osservato.

La geometria del moto planetario divenne sempre più complesso, per tener conto delle osservazioni. Nel II secolo d.C., l'astronomo Tolomeo di Alessandria sviluppò la teoria degli epicicli. Nel caso più semplice si supponeva che il pianeta descrivesse con moto uniforme una circonferenza chiamata *epiciclo*. Il centro dell'epiciclo, a sua volta, si muoveva su una circonferenza più grande, concentrica con la Terra, chiamata *deferente*. La traiettoria risultante del pianeta è quindi un'epicicloide (vedi figura seguente).



Questa descrizione sopravvisse fino al XVI secolo, quando Niccolò Copernico (1473 – 1543) sviluppò un metodo differente. Egli andava cercando una soluzione più semplice, e propose quindi di descrivere il moto non centrato sulla Terra ma sul Sole, tale modello, detto *eliocentrico*, non era nuovo, fu infatti proposto da Aristarco di Samo attorno al III secolo a.C. Inoltre Aristarco concordava con Eraclide Pontico nell'attribuire alla Terra anche un moto di rotazione diurna attorno ad un asse inclinato rispetto al piano dell'orbita intorno al Sole, giustificando così l'esistenza delle stagioni. La teoria eliocentrica fu rifiutata con forza da Platone (428 - 348 a.C.) e dal suo allievo Aristotele (384 - 322 a.C.), e fu respinta quattro secoli dopo Aristarco, anche da Claudio Tolomeo, le cui concezioni dominarono incontrastate la tarda antichità e il medioevo.

Il sistema copernicano può sintetizzarsi in sette assunti, così come dal medesimo autore enunciati nel compendio *De revolutionibus orbium coelestium* (Sulle rivoluzioni delle sfere celesti) ritrovato e pubblicato nel 1878. Steso tra il 1507 e il 1512, nel "*Nicolai Copernici de hypothesibus motuum coelestium a se constitutis commentariolus*", Copernico presentò le sette *petitiones* (cioè i sette postulati della teoria) che dovevano dare vita a una nuova astronomia:

1. Non vi è un unico punto centro delle orbite celesti e delle sfere celesti.
2. Il centro della Terra non è il centro dell'Universo, ma solo il centro della massa terrestre e della sfera lunare.
3. Tutte le sfere ruotano attorno al Sole, che quindi è in mezzo a tutte, e il centro dell'Universo si trova vicino a esso.
4. Il rapporto della distanza tra il Sole e la Terra con l'altezza del firmamento, è tanto più piccolo di quello tra il raggio della Terra e la distanza di questa dal Sole, che, nei confronti dell'altezza del firmamento, tale distanza è impercettibile (non viene quindi percepito alcun movimento apparente nelle stelle fisse).
5. Qualsiasi movimento appaia nel firmamento non appartiene a esso, ma alla Terra; pertanto la Terra, con gli elementi contigui, compie in un giorno un intero giro attorno ai suoi poli fissi, mentre il firmamento resta immobile, inalterato con l'ultimo cielo.
6. Qualunque movimento ci appaia del Sole, non appartiene a esso, ma dipende dalla Terra e dalla nostra sfera, insieme alla quale noi ruotiamo intorno al Sole come qualsiasi altro pianeta, e così la Terra compie più movimenti.
7. Per i pianeti appare un moto retrogrado e un moto diretto; ciò in realtà non dipende da loro, ma dalla Terra; pertanto, il moto di questa sola basta a spiegare tante irregolarità celesti.

Queste asserzioni rappresentavano l'esatto opposto di quanto affermava la teoria geocentrica, allora comunemente accettata. Copernico fu molto attento a non assumere atteggiamenti rivoluzionari, né con la sua condotta di vita, né nelle sue opere. Egli costruì una nuova cosmologia partendo dagli stessi dati dell'astronomia tolemaica e rimanendo ancorato ad alcune tesi fondamentali dell'aristotelismo: 1) perfetta sfericità e perfetta finitezza dell'Universo; 2) immobilità del Sole data dalla sua natura divina; 3) centralità del Sole dovuta a migliore posizione da cui "può illuminare ogni cosa simultaneamente" (Copernico).

La presunta maggiore semplicità e armonia del sistema (argomenti con cui Copernico e il discepolo Giorgio Gioacchino Retico difendevano la visione copernicana) era però più apparente che reale. Per non contraddire le osservazioni Copernico fu costretto a non fare coincidere il centro dell'Universo con il Sole, ma con il centro dell'orbita terrestre; dovette reintrodurre epicicli ed eccentrici, come Tolomeo; dovette attribuire alla Terra, oltre al moto di rivoluzione attorno al Sole e a quello di rotazione attorno al proprio asse, un terzo moto (*declinationis motus*), per rendere conto dell'invariabilità dell'asse terrestre rispetto alla sfera delle stelle fisse.

Benché all'epoca di Copernico il sistema eliocentrico e quello geocentrico fossero sostanzialmente equivalenti in termini di complessità e di capacità predittiva, il grande vantaggio del sistema copernicano fu l'eliminazione di un epiciclo dalle orbite di tutti i pianeti. Nel sistema copernicano questo epiciclo è dovuto al fatto che le orbite sono osservate dalla Terra, la quale a sua volta gira attorno al Sole. L'osservazione che i pianeti hanno un epiciclo in comune, dovuto all'orbita della Terra, apriva tra l'altro la possibilità di misurare le distanze dei pianeti dal Sole (o, meglio, il loro rapporto con il raggio dell'orbita terrestre) con il metodo della parallasse. Copernico volle anche eliminare l'equante di Tolomeo; poiché le orbite sono ellittiche, tuttavia, dovette comunque introdurre degli epicicli. Solo con Keplero questi ultimi non saranno più necessari.

Ribadiamo che Copernico propose la sua teoria basandosi non su dati osservativi ma solo sull'assunto che il moto doveva essere più semplice di quello geocentrico.

Principale sostenitore del modello eliocentrico fu Johannes Kepler (1571 – 1630) il quale nel 1596 pubblicò l'opera *Mysterium Cosmographicum*, nella quale tentò una prima descrizione del moto planetario, il cui scopo non era quello di difendere il sistema copernicano, ma piuttosto quello di dimostrare che per la creazione del mondo e la disposizione dei cieli, Dio si è ispirato ai cinque solidi regolari che hanno goduto di così grande fama da Pitagora e Platone in poi: il cubo, il tetraedro, il dodecaedro, l'icosaedro, l'ottaedro. Keplero si interroga circa le cause del numero, delle dimensioni e dei moti delle orbite, e sostiene che questa ricerca sia fondata sulla corrispondenza tra i tre "corpi" immobili dell'Universo (Sole, stelle fisse, spazio intermedio) e Padre, Figlio e Spirito Santo (la Trinità). Le leggi della struttura del cosmo vengono ricavate circoscrivendo e inscrivendo le orbite dei pianeti nelle varie figure solide, a partire dalla Terra, che è l'unità di misura di tutte le orbite.

Le basi per le sue scoperte astronomiche furono gettate nel 1609, quando pubblicò il suo capolavoro *Astronomia nova*, in cui formulò le sue prime due leggi. Nel 1618 Keplero scoprì la terza legge, che rese nota l'anno dopo nell'opera *Harmonices Mundi*. Keplero a differenza di Copernico basò le sue "leggi" su dati osservativi e non su speculazioni teoriche. Ciò fu possibile grazie alle numerose e precise osservazioni di Tycho Brahe (1546 – 1601). Il più grande merito di Brahe rimane quello di aver impostato una precisa metodologia scientifica riguardo all'astronomia, servendosi di osservazioni rigorose e sistematiche, tramite l'impiego di idonea strumentazione. Brahe fu uno straordinario osservatore dell'era pre-telescopio: le sue osservazioni delle posizioni stellari e planetarie raggiunsero un'accuratezza impareggiabile per i suoi tempi (la nascita del telescopio risale a Galileo (1607)).

Le tre leggi di Keplero (leggi empiriche) sono:

- I) I pianeti descrivono orbite piane ed ellittiche, di cui il Sole occupa uno dei fuochi.
- II) Il vettore posizione di ogni pianeta rispetto al Sole descrive aree uguali della sua orbita ellittica in tempi uguali. Legge delle aree.
- III) I cubi delle distanze medie dei pianeti dal Sole sono proporzionali ai quadrati dei periodi di rivoluzioni. $R^3 = C P^2$, dove C è una opportuna costante di proporzionalità.

Nella seguente tabella vengono riportati i dati più significativi nel sistema solare.

Body	Equatorial radius (m)	Mass (kg)	Period of rotation (s)	Semi-major axis of orbit (m)	Period of orbital motion (s)	Eccentricity of orbit
Sun	6.69×10^8	1.99×10^{30}	2.4×10^6	—	—	—
Mercury	2.44×10^6	3.30×10^{23}	5.07×10^6	5.79×10^{10}	7.60×10^6	0.2056
Venus	6.05×10^6	4.87×10^{24}	2.10×10^7 †	1.08×10^{11}	1.94×10^7	0.0068
Earth	6.38×10^6	5.97×10^{24}	8.62×10^4	1.50×10^{11}	3.16×10^7	0.0167
Mars	3.39×10^6	6.42×10^{23}	8.86×10^4	2.28×10^{11}	5.94×10^7	0.0934
Jupiter	7.14×10^7	1.90×10^{27}	3.54×10^4	7.78×10^{11}	3.75×10^8	0.0483
Saturn	6.00×10^7	5.69×10^{26}	3.84×10^4	1.43×10^{12}	9.30×10^8	0.0560
Uranus	2.61×10^7	8.70×10^{25}	6.20×10^4	2.87×10^{12}	2.65×10^9	0.0461
Neptune	2.43×10^7	1.03×10^{26}	6.48×10^4	4.59×10^{12}	5.20×10^9	0.0100
Pluto	1.14×10^6	1.20×10^{22}	5.52×10^5	5.91×10^{12}	7.84×10^9	0.2484
Moon*	1.74×10^6	7.35×10^{22}	2.36×10^6	3.84×10^8	2.36×10^6	0.0550

* Orbital data of the Moon are relative to the Earth

† Venus exhibits retrograde motion

Le leggi di Keplero forniscono una descrizione del moto planetario ma non sono in grado di spiegare in base a quale legge matematica essi si muovono proprio in quel modo. Tale spiegazione fu data da Isaac Newton (1642 - 1727) con la sua teoria della gravitazione nel 1666, ma pubblicata solo 21 anni dopo, nella sua opera più importante *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*, (detta usualmente: “i Principia”).

Il fatto che i pianeti descrivano un’orbita chiusa e non si allontanino indefinitamente dal Sole indica che deve agire una forza (il concetto di forza come causa del moto fu Newton stesso ad introdurlo, con le sue fondamentali tre leggi del moto che costituiscono le basi di tutta la Meccanica) di tipo attrattivo. Una forza attrattiva può dar luogo anche ad un’orbita aperta, ma una forza repulsiva non può dar luogo ad un’orbita chiusa.

Con Keplero si è giunti a formulare leggi empiriche che descrivono il moto, con Newton conosciamo le leggi che la Natura impiega per far svolgere tali moti, ad esempio la conoscenza della forza fra il Sole e i suoi pianeti ci permette di ricavare la legge del moto $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ e la sua traiettoria.

Vediamo come le leggi di Keplero possono essere dedotte dalla teoria e più specificamente dalla meccanica classica e dalla scoperta della legge della gravitazione universale; entrambe vedono Newton protagonista.

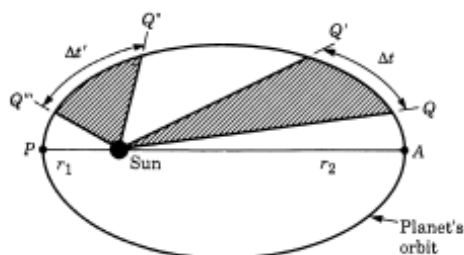
a) *Orbita piana e velocità areolare costante*

Le orbite ellittiche sono caratterizzate da una grandezza detta eccentricità. Indicando con r_1 e r_2 la distanza minima e massima del pianeta dal Sole, l’eccentricità è definita dalla seguente formula

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} = \frac{r_2 - r_1}{2a} \text{ dove } 2a \text{ è la lunghezza dell’asse maggiore dell’ellisse.}$$

Dalla formula si evince che se $r_1 = r_2$ si ha $e = 0$, ossia per la circonferenza l’eccentricità vale zero. Dalla tabella precedente si vede che fatta eccezione per Mercurio e Plutone (classificato dal 2006 come pianeta nano) le orbite sono praticamente circolari.

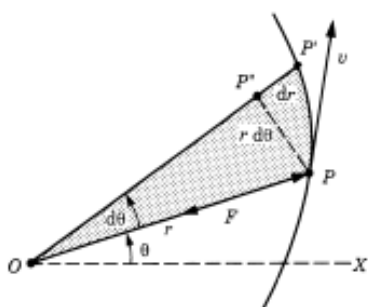
La legge aree afferma che l’area “spazzata” per unità di tempo dal raggio vettore del pianeta, relativo al Sole, per andare da Q a Q’ deve risultare uguale a quella spazzata per unità di tempo per andare da Q’’ a Q’’’, come illustrato nella seguente figura.



Cioè deve risultare

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\Delta A'}{\Delta t'}$$

Vediamo ora come da questa affermazione ne discende la costanza del momento angolare e di conseguenza il fatto che la forza associata all'interazione gravitazionale deve essere una forza di tipo centrale. Consideriamo a tal proposito una particella che descriva una traiettoria curvilinea, come quella della figura seguente.



In un piccolo intervallo di tempo dt la particella si sposta da P in P' ed il raggio vettore r descrive ("spazza") l'area tratteggiata, il cui valore è dato approssimativamente da $dA = \frac{1}{2} \text{base} \times \text{altezza} = \frac{1}{2} [r(r d\theta)] = \frac{1}{2} r^2 d\theta$. L'area spazzata per unità di tempo è

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

La legge delle aree richiede che tale valore sia costante $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{cost}$

Come noto dalla meccanica il momento angolare di una particella che descrive una traiettoria curvilinea può essere espressa come $L = mr^2\omega = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$ e confrontando queste due espressioni si ha

$$L = 2m \frac{dA}{dt} = \text{cost}$$

Abbiamo così dimostrato che la seconda legge di Keplero implica la costanza del modulo del momento angolare. Vale evidentemente anche il viceversa. Quindi da una proprietà della teoria – la costanza del modulo di $\mathbf{L}$ – si deduce la legge delle aree.

La costanza del vettore momento angolare inoltre, implica che il moto sia piano.

Infatti dalla definizione del momento angolare si ha

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

e se $\mathbf{L} = \text{cost}$ ciò significa che il momento della forza (rispetto al centro della forza, ossia del Sole nel nostro caso) deve risultare nullo e questo implica che il raggio vettore e la forza siano paralleli fra loro (o più precisamente antiparalleli), quindi la forza deve essere disposta lungo la direzione congiungente il centro del Sole con il centro del pianeta, ossia deve essere radiale.

Oppure si può partire dall'assunto che la forza sia radiale e quindi constatare (scegliendo come polo il Sole) che il momento della forza è nullo, essendo per un moto radiale $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{F}$ paralleli (o antiparalleli).

La costanza di $\mathbf{L}$ implica che il moto debba essere piano, cioè deve avvenire sempre nello stesso piano. Infatti dalla relazione $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ si vede che, fissate le condizioni iniziali del raggio vettore $\mathbf{r}$ e della q.d.m. $m\mathbf{v}$ questi

due vettori individuano un piano a cui $\mathbf{L}$ è perpendicolare e pertanto se $\mathbf{L}$ è fisso anche il piano resta fisso nello spazio.

Inoltre il verso di $\mathbf{L}$ implica che il moto avvenga in un senso oppure nell'altro.

Quindi da una proprietà della teoria – la costanza di $\mathbf{L}$ – si deduce la legge delle aree e la planarità del moto orbitale.

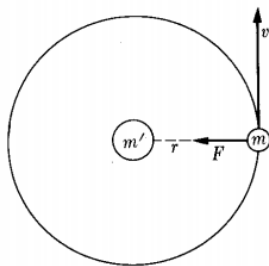
L'espressione matematica della forza, ossia che la forza oltre ad essere diretta lungo $\mathbf{r}$ (forza radiale) dipenda esclusivamente dal suo modulo (forza centrale), e non ad esempio dall'angolo che $\mathbf{r}$ forma con una certa direzione di riferimento) e quale tipo di dipendenza fosse, fu scoperto da Newton con la sua legge di gravitazione universale. Lo vediamo nella seguente nota.

Premessa: la terza legge di Keplero dice che per i pianeti i che orbitano intorno al sole si ha $R^3 = C P^2$ dove C è una costante. Per maggiore chiarezza (essendo la costante riferita ai moti dei pianeti che orbitano intorno al Sole) chiamiamo C costante di Keplero del Sole e la indichiamo con il pedice S .

$$C_s = \frac{r^3}{P^2}$$

(ribadiamo che in questa formula r sono i raggi medi dei pianeti del Sole e P i loro periodi).

Newton considerò per semplicità un moto circolare uniforme con la massa M (in figura indicata con m') centro delle forze, in quanto supponiamo $m \ll M$ (sistema inerziale centrato su M).



Sappiamo dalla teoria che affinché avvenga un tale moto vi deve essere una forza, detta centripeta, esercitata da M su m che deve avere la seguente espressione $F = mv^2/r$ dove v è la velocità di m ed r il suo raggio.

Pensiamo per focalizzare il discorso che m sia la massa della Terra m_T ed M la massa del Sole m_S :

$$F_{centripeta} = m_T \frac{v^2}{r} \quad \text{per il moto circolare uniforme si ha } v = \frac{2\pi r}{P} \text{ dove } P \text{ è il periodo, dunque}$$

$$F_{centripeta} = m_T \frac{1}{r} \frac{4\pi^2 r^2}{P^2} \quad \text{moltiplicando e dividendo per } r \text{ si ha}$$

$$F_{centripeta} = m_T \frac{1}{r^2} \frac{4\pi^2 r^3}{P^2}$$

Notando che r^3/P^2 altro non è che la costante di Keplero del Sole possiamo scrivere

$$F_{centripeta} = 4\pi^2 \frac{m_T}{r^2} C_S$$

Il colpo di genio di Newton fu quello di dire che il Sole, per il terzo principio della dinamica, sentirà una forza F' uguale ed opposta a F (forza percepita dalla Terra), ed allora uguaglia F ad F' , ciò significa dover scambiare semplicemente i pedici di m e C :

$$F_{\text{centripeta}} = 4\pi^2 \frac{m_T}{r^2} C_S = F' = 4\pi^2 \frac{m_S}{r^2} C_T$$

Allora ne segue che

$$m_T C_S = m_S C_T \quad \text{ossia dovrà essere} \quad \frac{C_S}{m_S} = \frac{C_T}{m_T}$$

ed il suo colpo di genio esplode supponendo che se questa uguaglianza deve valere per il Sole e la Terra perché non pensare che valga per qualsiasi coppia di masse ossia che sia una proprietà universale!!!!

$$\frac{C_S}{m_S} = \frac{C_T}{m_T} = \frac{C_{\text{saturno}}}{m_{\text{saturno}}} = \frac{C_{\text{luna}}}{m_{\text{luna}}} = \frac{C_{\text{gian}}}{m_{\text{gian}}} \text{ costante}$$

Newton esplicitò tale costante nel seguente modo

$$\frac{C_S}{m_S} = \frac{C_T}{m_T} = \frac{C_{\text{saturno}}}{m_{\text{saturno}}} = \frac{C_{\text{luna}}}{m_{\text{luna}}} = \text{costante} = \frac{G}{4\pi^2} \quad (\text{con } G \text{ costante})$$

perché tale scrittura semplificherà l'espressione a cui si arriverà. Infatti si ha

$$C_S = m_S \frac{G}{4\pi^2} \text{ che sostituita nell'espressione di } F \text{ sopra ricavata ci dà}$$

$$F_{\text{centripeta}} = 4\pi^2 \frac{m_T}{r^2} m_S \frac{G}{4\pi^2}$$

e semplificando (ecco perché quel $4\pi^2$) si arriva alla formula che lo porrà nella storia della scienza come stella di prima grandezza (fu in effetti la sua più grande scoperta):

$$F(r) = G \frac{m_S m_T}{r^2}$$

Newton arriva così a dimostrare che la forza è di tipo centrale, cioè che dipende esclusivamente dal modulo della distanza ed esplicita il tipo di dipendenza dalla distanza. Avendo già precedentemente stabilito che essa è radiale e di tipo solamente attrattivo, la sua espressione vettoriale sarà:

$$\mathbf{F}(r) = -G \frac{m_S m_T}{r^2} \mathbf{u}_r$$

dove il versore punta dall'origine (il centro del sole dell'esempio precedente) al punto di interesse).

E più in generale, *quindi universalmente*, due corpi dotati di massa M ed m (con $M \gg m$ e SR inerziale centrato su M) si attrarranno secondo la legge di gravitazione universale

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -G \frac{M m}{r^2} \mathbf{u}_r$$

dove il versore punta dall'origine (il centro di M) al punto di interesse (centro di m).

Ad un tale risultato si giunge anche, usando una matematica più complessa, considerando le orbite ellittiche.

L'interazione gravitazionale è dunque una forza centrale, sempre attrattiva che varia con l'inverso del quadrato della distanza.

b) *Orbita ellittica*

Il fatto che traiettoria sia ellittica può essere dimostrato a partire dalla conservazione dell'energia.

Partiamo dal fatto che una forza centrale è conservativa. Una forza si dice conservativa quando il suo lavoro che matematicamente è un integrale curvilineo, non dipende dal percorso seguito per calcolare tale integrale ma solo dai suoi estremi, che sono i due punti di partenza e di arrivo sulla traiettoria. Nel nostro caso, sapendo che F è centrale si ha:

$$\begin{aligned} L_{AB} &= \int_A^B \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B F(r) \mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B F(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \frac{F(r)}{r} d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = \int_A^B \frac{F(r)}{2r} dr^2 \\ &= \int_A^B \frac{F(r)}{2r} 2r dr = \int_A^B F(r) dr = V(B) - V(A) \end{aligned} \quad (1)$$

Dunque se $F(r)$ ammette una primitiva V , cosa che avviene generalmente – quasi tutte le funzioni che si incontrano in fisica sono integrabili – allora il campo è conservativo. Questo implica che il lavoro su un percorso chiuso – tale integrale è detto “circuitazione” – è nullo. $L = \oint \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$

Un modo alternativo di giungere allo stesso risultato è quello di utilizzare un'altra definizione di forza conservativa: una forza si dice conservativa quando la forma differenziale del suo lavoro è un differenziale esatto.

Nota teorica

Definizione: la forma differenziale lineare, definita su un certo dominio D nel campo reale, è del tipo

$$A(x,y,z) dx + B(x,y,z) dy + C(x,y,z) dz$$

e viene detta esatta se esiste una qualche funzione scalare $V = V(x,y,z)$ definita su D tale che il suo differenziale totale coincida con la forma differenziale

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) dz = A dx + B dy + C dz$$

La funzione V è detta potenziale del campo vettoriale $\mathbf{F} = A \mathbf{i} + B \mathbf{j} + C \mathbf{k}$.

Scriviamo il lavoro espandendo le componenti

$$L_{AB} = \int_A^B dL = \int_A^B \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz); \quad dL = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

riconosciamo così l'integrando essere una forma differenziale. Tale integrale dipende dal percorso che si sceglie per eseguire il calcolo dell'integrale, noi però siamo interessati a vedere quali siano le condizioni affinché tale integrale dipenda solo dagli estremi A e B. Tale condizione effettivamente esiste ed è la seguente: la forma differenziale dL deve essere il differenziale di una funzione scalare V delle sole coordinate, cioè deve risultare

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} = F_x; \quad \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} = F_y; \quad \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} = F_z$$

Se ciò accade si dice che la forma differenziale è esatta.

Infatti quando questa condizione è soddisfatta allora l'integrale di linea può essere così sviluppato

$$\begin{aligned} L_{AB} &= \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int_A^B \left(\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} dz \right) \\ &= \int_A^B dV = V(B) - V(A) \end{aligned}$$

Ritrovando così la (1).

Abbiamo notato a commento della (1) che generalmente $\mathbf{F}$ ammetta una primitiva, vediamo adesso le condizioni a cui deve soddisfare $\mathbf{F}$ affinché ciò avvenga.

A tal fine invocando il teorema di Schartz si può senz'altro affermare che un campo di forze $\mathbf{f} (f_x, f_y, f_z)$ – definito in uno spazio semplicemente connesso – è conservativo se

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial y}; \quad \frac{\partial f_z}{\partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial z}$$

Ed è facile verificare che per la forza gravitazionale queste relazioni sono soddisfatte.

Scriviamo, a tal uopo, la forza gravitazione esplicitando le coordinate (ricordando che $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e che $\mathbf{u}_r$ = $\mathbf{r}/r$) e facciamo le derivate richieste

$$F_x = G \frac{Mm x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}; \quad F_y = G \frac{Mm y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}; \quad F_z = G \frac{Mm z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}};$$

Per semplicità poniamo $GMm = \text{cost} = 1$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{3xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}; \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{3xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}};$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{-3yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}; \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{-3yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}};$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{-3xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{-3xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

Verificato dunque che la forza gravitazione è conservativa sarà possibile associare ad essa la funzione scalare potenziale $V = V(x, y, z)$, avendosi

$$L_{AB} = \int_A^B \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B -G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{r} = -GMm \int_A^B \frac{dr}{r^2} = GMm \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = V(B) - V(A)$$

Dunque

$$V = G \frac{Mm}{r} + \text{cost}$$

Al potenziale viene associato la grandezza ad essa praticamente coincidente energia potenziale che differisce unicamente per il segno (si fa questo per uno scopo di pura praticità, ossia per avere nella conservazione dell'energia la somma di K e U anziché la loro differenza).

$$U = -V$$

$$U = -G \frac{Mm}{r} + \cos t$$

Ora siamo in grado di scrivere la conservazione dell'energia di un sistema del tipo Sole-Terra con M massa del Sole ed m quella della Terra ($M \gg m$).

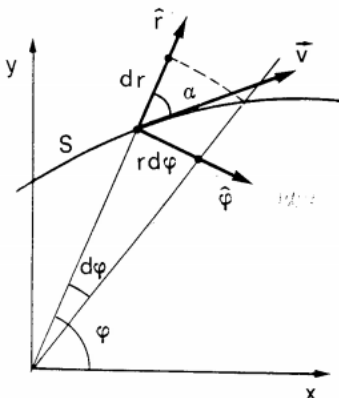
$$K + U = E$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - G \frac{Mm}{r} = E \equiv \cos t \quad (2)$$

Esplicitiamo questa relazione in coordinate polari. Trattandosi di un moto piano, possiamo scegliere il piano xy coincidente con il piano dell'orbita; per descrivere il moto, sono sufficienti allora due parametri e non più tre, scegliamo il raggio e l'angolo (anomia), allora le componenti della velocità sono

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{u}_r + v_\varphi \mathbf{u}_\varphi = v \cos \alpha \mathbf{u}_r + v \sin \alpha \mathbf{u}_\varphi = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{u}_\varphi$$

Nella figura seguente viene schematizzata la situazione



Pertanto la (2) diviene

$$\frac{1}{2}m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] = E + G \frac{Mm}{r} \quad (3)$$

Occorre in qualche modo "togliere" il differenziale dell'anomia, a tal fine ricordiamo che il modulo del momento angolare L è $L = r m v \sin \alpha$ ed in coordinate polari è

$$L = rm(v \sin \alpha) = rm \left(r \frac{d\varphi}{dt} \right)$$

Ed allora

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2} \quad (4)$$

e si ricordi che L è una quantità costante durante il moto, allora la (3) diviene

$$\frac{1}{2}m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{L}{mr^2} \right)^2 \right] = E + G \frac{Mm}{r} \text{ da cui}$$

$$\frac{1}{2}m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{L}{mr^2} \right)^2 \right] = E + G \frac{Mm}{r}$$

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2} = \frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r}$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{m^2 r^2}} \quad (5)$$

Quest'ultima relazione è un'equazione differenziale del primo ordine che non è possibile risolvere analiticamente [vedi nota (1)]. La natura non sempre è così semplice come noi vorremmo! Anche nel caso più semplice di due corpi interagenti gravitazionalmente, non è possibile ottenere un'equazione oraria del moto.

Tuttavia siamo qui interessati a trovare l'equazione della traiettoria, cioè la relazione fra il raggio e l'anomalia $r = r(\varphi)$. A tal uopo dividiamo membro a membro la (4) con la (5)

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dr} &= \frac{L}{mr^2} \frac{\pm 1}{\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{m^2 r^2}}} \\ d\varphi &= \frac{dr}{r^2} \frac{\pm b}{\sqrt{-1 + \frac{2a}{r} - \frac{b^2}{r^2}}} \end{aligned} \quad (6)$$

Dove si è semplificata la scrittura introducendo le costanti a e b (reali e positive, in quanto stiamo considerando un sistema legato avente quindi energia totale negativa $E < 0$)

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{-\frac{L^2}{2Em}} \\ a &= -\frac{GMm}{2E} \end{aligned}$$

La (6) può essere integrata membro a membro ottenendo

$$\varphi(r) = \varphi_0 + \arccos \frac{b^2 - ar}{r\sqrt{a^2 - b^2}} \quad \text{dove } \varphi_0 \text{ è una costante di integrazione che può essere posta uguale a}$$

zero pur di scegliere opportunamente l'orientamento degli assi coordinati. Quindi in tale situazione si ha

$$\cos \varphi(r) = \frac{b^2 - ar}{r\sqrt{a^2 - b^2}} \quad \text{arrivando così alla cercata equazione della traiettoria:}$$

$$r(\varphi) = \frac{b^2}{a + \sqrt{a^2 - b^2} \cos \varphi} \quad (7)$$

Ricordando che l'equazione di una ellisse in coordinate polari è

$$r(\varphi) = \frac{b^2}{a + e \cos \varphi}$$

la (7) rappresenta proprio una ellisse con asse maggiore a asse minore b e con eccentricità $e = (a^2 - b^2)^{1/2}$.

Vediamo ad esempio il valore numerico di a e b per la Luna.

$$\frac{1}{2}m_L v^2 - G \frac{M_T m_L}{R_{T-L}} = E$$

Il valore della velocità orbitale della Luna è:

$$v_{T-L} = \frac{2\pi R_{T-L}}{P} = \frac{2\pi \cdot 385 \cdot 10^6}{2.36 \cdot 10^6} = 1024 \text{ m/s} = 1.02 \text{ km/s}$$

(quella della terra nel suo moto di rivoluzione intorno al Sole è 30 km/s)

$$E = \frac{1}{2} 7.35 \cdot 10^{22} \cdot 1024^2 - 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 7.35 \cdot 10^{22}}{385 \cdot 10^6} = 3.85 \cdot 10^{28} - 7.64 \cdot 10^{28} = -3.79 \cdot 10^{28} \text{ J}$$

Come ci si aspettava il valore dell'energia totale meccanica è negativa come deve essere per un sistema legato. Il valore del momento angolare è

$$L = m\omega R_{T-L}^2 = 7.35 \cdot 10^{22} \cdot 2.66 \cdot 10^{-6} \cdot (385 \cdot 10^6)^2 = 2.90 \cdot 10^{34} \text{ kg m}^2 / \text{s}$$

Dunque

$$b = \sqrt{-\frac{(2.90 \cdot 10^{34})^2}{2 \cdot (-3.79 \cdot 10^{28}) \cdot 7.35 \cdot 10^{22}}} = \sqrt{\frac{8.41 \cdot 10^{68}}{55.7 \cdot 10^{50}}} = 3.89 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$a = -\frac{GMm}{2E} = -\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6.0 \cdot 10^{24} \cdot 7.35 \cdot 10^{22}}{2 \cdot (-3.79 \cdot 10^{28})} = 3.88 \cdot 10^8 \text{ m}$$

A causa delle approssimazioni nel calcolo il valore di a risulta essere maggiore del valore di b , ovviamente facendo i calcoli in modo più raffinato si ottiene il risultato atteso e $e = (a^2 - b^2)^{1/2} = 0.005$.

Ed allora l'equazione, con valori numerici un po' approssimativi, della traiettoria della Luna è

$$r(\varphi) = \frac{15.1 \cdot 10^{16}}{3.88 \cdot 10^8 + 0.055 \cos \varphi}$$

Graficando tale curva si ha praticamente una circonferenza. Lo si vede immediatamente in quanto il termine del coseno praticamente è molto vicino allo zero risultando così il valore del raggio costante.

Nota (1)

Il Mencuccini-Silvestrini riporta la seguente affermazione a commento della (5): "l'equazione differenziale del primo ordine potrebbe essere risolta con relativa facilità per separazione di variabili, ottenendo così l'equazione oraria del moto, che poi sostituita nella (4) anche quest'ultima potrebbe essere risolta per separazione di variabili fornendo la legge oraria per l'anomalia". Affermazione alquanto bizzarra. La natura non sempre accontenta le nostre aspettative! Infatti...si ha:

posto $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$ l'equazione si scrive:

$$r'(t) = \sqrt{a + \frac{b}{r(t)} - \frac{c}{r^2(t)}}$$

$$\frac{r'(t)}{\sqrt{a + \frac{b}{r(t)} - \frac{c}{r^2(t)}}} = 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a + \frac{b}{r(t)} - \frac{c}{r^2(t)}}} r'(t) dt = \int 1 dt \quad \text{che risolta ci dà la seguente soluzione}$$

$$\frac{\sqrt{a r^2(t) + b r(t) - c}}{a} + \frac{b}{2\sqrt{a^3}} \log[ab + 2a^2 r(t) - 2\sqrt{a^3} \sqrt{a r^2(t) + b r(t) - c}] = t + k$$

Ottenendo così un'equazione implicita nell'incognita $r(t)$ **che purtroppo non è possibile esplicitare** per ogni $t > 0$. Quindi anche **avere una equazione oraria per l'anomalia è pura fantasia**. In questi casi vi è un'unica strada percorribile ossia una soluzione numerica. Quindi ad esempio si potrebbero considerare le due equazioni (4) e (5) a sistema, esplicitando le condizioni iniziali si potrebbe procedere con il metodo Runge-Kutta che sono un'importante famiglia di metodi iterativi impliciti ed espliciti per l'approssimazione delle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie, sapendo per certo che sarà possibile determinare i grafici $r(t)$ e $\varphi(t)$.

c) La terza legge di Keplero

La terza legge di Keplero potrebbe essere dimostrata nel caso generale risolvendo l'equazione (5), ma per semplicità lo vediamo pensando al moto circolare che diviene un moto circolare uniforme. Lo si vede immediatamente dalla (4) in quanto sia L che r sono costanti la velocità angolare sarà anch'essa costante. Scriviamo l'equazione $F = ma$ applicata in questo caso

$$-G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{u}_r = -m\omega^2 r \mathbf{u}_r$$

$$GM = \omega^2 r^3 \quad \text{e ricordando che} \quad \omega = \frac{2\pi}{P} \quad \text{si ha} \quad GM = \frac{4\pi^2}{P^2} r^3 \quad \text{e quindi}$$

$$\frac{r^3}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = \text{cost}$$

Questa relazione essendo indipendente da m dimostra per i moti circolari la terza legge di Keplero.

Notando come già visto che l'eccentricità dei pianeti è molto prossima al valore zero l'approssimazione di orbita circolare è una buona descrizione del fenomeno.

Newton però non conosceva il principio di conservazione dell'energia (che vede la luce con Joule nel 1843) Dapprima Newton trattò tale problema nel suo breve trattato *De motu*, e poi lo perfezionò nei suoi *Principia*. La sua dimostrazione si basava sui tre principi della dinamica, da lui stesso codificati, e dalla legge della gravitazione universale, suo maggior successo scientifico. Tale dimostrazione era però principalmente geometrica e si fondava sulle proprietà delle curve coniche, il cui studio risale al III secolo a.C., e sul metodo

della *extrema ratio*, cioè di quello che oggi chiamiamo teoria dei limiti o più in generale analisi matematica. Tale branca della matematica prende avvio proprio da Newton e indipendentemente da Leibnitz.

Per inciso il grande fisico Richard Feynman nel 1964, trovando egli stesso ostico seguire i complessi ragionamenti geometrici di Newton rifece a modo suo la dimostrazione, rendendola più comprensibile ad un pubblico moderno. Per chi fosse interessato può consultare il libro *Il moto dei pianeti intorno al Sole* di D.L. Goodstein (Zanichelli).

Newton stesso verificò la correttezza della sua legge di gravitazione confrontando l'accelerazione centripeta della Luna con l'accelerazione di gravità terrestre $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ (questo valore era noto sin dai tempi di Galileo).

Per inciso la teoria di Newton nulla dice circa il valore della costante G. La prima misura indiretta della costante di gravitazione universale fu ottenuta nel 1774 dall'astronomo Nevil Maskelyne, su suggerimento di Henry Cavendish, nell'esperimento dello Schiehallion, atto a misurare la densità media della Terra e dal valore di questa risalire tramite la relazione della forza gravitazionale applicata ad un grave, al valore di G. Successivamente. Egli misuro, per la densità del nostro pianeta, un valore di 4.5 kg/m^3 (valore attuale 5.5 kg/m^3). Nel 1798, lo stesso Cavendish eseguì direttamente un proprio esperimento tendente a misura direttamente il valore della costante G, tramite una bilancia di torsione ottenendo un valore molto vicino a quello attuale ($G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}$).

Newton ipotizzò che sia la Luna sia una qualsiasi alta massa ad una certa distanza dalla Terra fossero attratti verso di essa secondo la formula da lui scoperta. Egli considera la Terra, la Luna ed un grave (possiamo pensare ad esempio alla classica mela), ossia un corpo posto nelle immediate vicinanze della superficie terrestre per cui si può porre la sua distanza coincidente con il valore del raggio terrestre (valore noto fin da Eratostene). Le due forze sono allora:

$$F_{\text{sulla mela}} = G \frac{m_T m_{\text{mela}}}{R_T^2} = m_{\text{mela}} a_{\text{mela}}$$

$$F_{\text{sulla luna}} = G \frac{m_T m_{\text{luna}}}{R_{T-L}^2} = m_{\text{luna}} a_{\text{luna}}$$

I valori delle accelerazioni sono

$$a_{\text{mela}} = G \frac{m_T}{R_T^2}$$

$$a_{\text{luna}} = G \frac{m_T}{R_{T-L}^2}$$

Ribattezziamo la notazione per le accelerazioni usando il simbolo g che è il più usato quando ci si riferisca ad una accelerazione dovuta alla gravità di un corpo

$$g_{\text{mela}} = G \frac{m_T}{R_T^2}$$

$$g_{\text{luna}} = G \frac{m_T}{R_{T-L}^2}$$

L'accelerazione del grave è dunque $g_{\text{mela}} = 9.8 \text{ m/s}^2$ che in virtù del fatto che essa è comune a tutti i gravi possiamo indicare semplicemente con g.

Era noto che il valore della distanza Terra-Luna era circa 60 volte il valore del raggio terrestre, per cui si ha

$$g = G \frac{m_T}{R_T^2}$$

$$g_{\text{luna}} \approx G \frac{m_T}{(60 R_T)^2} = \frac{1}{3600} G \frac{m_T}{R_T^2} = \frac{1}{3600} g = \frac{1}{3600} 9.80 = 2.7 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

Scoprì così che l'accelerazione di gravità della Luna secondo la sua teoria doveva valere circa (1/3600) g.

Non gli rimase da fare altro che verificare tale valore coincidesse con l'accelerazione che compete ad un corpo che si muove di un moto circolare uniforme v^2/R

$$a_{centr} = \frac{v^2}{R_{T-L}} = \frac{(2\pi R_{T-L} / P)^2}{R_{T-L}} = \frac{4\pi^2 R_{T-L}}{P^2} \approx \frac{4\pi^2 60 R_T}{P^2}$$

introducendo i valori di R_T e P (noti a quell'epoca) si ha

$$a_{centr} = \frac{4\pi^2 60 \cdot 6.4 \cdot 10^6}{(2.36 \cdot 10^6)^2} = 2.7 \cdot 10^{-3} \text{ m / s}^2$$

Trovando così la sostanziale uguaglianza fra $a_{cent-Luna}$ e g_L , ossia l'accelerazione di gravità calcolata con la sua teoria. Verificò in questo modo la validità della sua costruzione teorica che cioè l'accelerazione centripeta della Luna è proprio dovuta all'attrazione gravitazionale esercitata su di essa dalla Terra.

Egli annotò: *"Ho confrontato la forza necessaria per mantenere la luna nella sua orbita con la forza di gravità sulla terra ed ho trovato che concordano."*

Concludiamo questa nota sulla gravitazione, inquadrata da un punto di vista storico, con qualche altra considerazione.

La forza peso

Secondo Voltaire, fu osservando la caduta di una mela nel suo giardino che Newton ebbe la sua idea rivoluzionaria rispetto alla cultura del suo tempo, che cioè la forza peso – la forza responsabile della caduta degli oggetti sulla superficie terrestre (detti "gravi") – altro non è che la forza gravitazionale con cui la Terra attira verso il suo centro ad essa circostanti, ed è dunque anche la stessa forza in virtù della quale –

ad esempio – la Luna orbita intorno alla Terra. La forza con cui un corpo viene attratto dalla Terra si può scrivere (proprio sfruttando la seconda legge della dinamica da lui stesso concepita: $F = ma$)

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}$$

m = massa del corpo

g = accelerazione di gravità

in virtù del significato specifico dell'accelerazione, gli è stata attribuita un simbolo tutto suo, la lettera g .

L'idea è allora di porre questa forza pari a quella gravitazionale della Terra

$$m\mathbf{g} = -G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{u}_R \text{ dove il versore punta dal centro della Terra verso l'esterno}$$

L'accelerazione di gravità punta verso il centro della Terra, per cui si ha

$$-m\mathbf{g} \mathbf{u}_R = -G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{u}_R \text{ ed allora il problema diventa unidimensionale}$$

$$m\mathbf{g} = G \frac{Mm}{r^2}$$

E semplificando si ha

$$g = G \frac{M}{r^2}$$

Se in questa espressione poniamo la distanza del grave dal centro della Terra proprio uguale al raggio terrestre, e nominando la g con il pedice zero, si ha

$$g_0 = G \frac{M}{R_T^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{6 \cdot 10^{24}}{(6.4 \cdot 10^6)^2} = 9.8 m/s^2$$

Se invece siamo ad una certa quota h rispetto alla superficie si ha: $r = R_T + h$ e l'accelerazione di gravità vale

$$g = G \frac{M}{(R_T + h)^2} = G \frac{M}{R_T^2 + h^2 + 2R_T h} = G \frac{M}{R_T^2 (1 + h^2 / R_T^2 + 2h / R_T)} = G \frac{M}{R_T^2 (1 + h / R_T)^2}$$

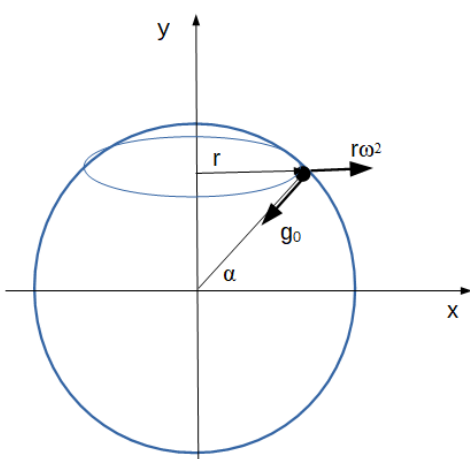
Siccome per quanto vogliamo pensare la quota alta sarà sempre $h \ll R_T$ possiamo sviluppare il binomio, avendo:

$$g = G \frac{M}{R_T^2 (1 + h / R_T)^2} \approx G \frac{M}{R_T^2} \left(1 - \frac{2h}{R_T} \right) = g_0 \left(1 - \frac{2h}{R_T} \right)$$

Dove vediamo che per una quota di qualche chilometro il termine correttivo incide sul valore di g per meno dell'uno per mille.

Finora ci siamo posti in un SR inerziale, se invece volessimo voler tener conto del fatto che un laboratorio terrestre non è un SR inerziale in quanto sottoposto al moto di trascinamento dovuto al moto di rotazione della Terra intorno al suo asse dobbiamo usare la relazione $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{rel} + \mathbf{a}_{tr}$ avendo trascurato il moto di rivoluzione della Terra intorno al Sole e pensando che il nostro grave inizi il suo moto da fermo in modo che l'accelerazione di Coriolis sia nulla.

Facendo riferimento alla figura seguente



La forza peso si scrive come somma del contributo statico (Terra non in rotazione) più la forza apparente dovuto al fatto che il grave ruota su una circonferenza di raggio $r = R_T \cos \alpha$ dove α è la latitudine.

$$\mathbf{F}_p = -mg_0 \mathbf{u}_{R_T} + m\omega^2 r \mathbf{u}_r$$

È immediato osservare che $\mathbf{u}_{R_T} = \cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j}$
 $\mathbf{u}_r = \mathbf{i}$

Dunque

$$\mathbf{F}_p = -mg_0(\cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j}) + m\omega^2 R_T \cos \alpha \mathbf{i} = m(-g_0 \cos \alpha + \omega^2 R_T \cos \alpha) \mathbf{i} - mg_0 \sin \alpha \mathbf{j}$$

Da cui si vede che ai poli dove $\alpha = 90^\circ$

$$\mathbf{F}_p = -mg_0 \mathbf{j}$$

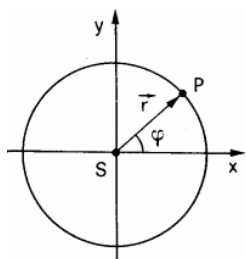
mentre all'equatore

$$\mathbf{F}_p = m(-g_0 + \omega^2 R_T) \mathbf{i}$$

Nelle situazioni intermedie la forza peso viene leggermente modificata sia in direzione che in modulo, comunque essendo il valore massimo (all'equatore) dell'accelerazione centrifuga pari a $3.37 \cdot 10^{-2} \text{ rad/s}$ entro un errore dello 0.3% possiamo considerare g costante.

Il potenziale efficace ed orbita di equilibrio

Come abbiamo visto ogni pianeta percorre intorno al Sole un'orbita praticamente circolare. Se trascuriamo le deboli interazioni gravitazionali fra di essi che portano il sistema planetario ad essere un sistema caotico, se ci limitiamo quindi a considerare un arco di tempo non grandissimo (quanche miliardo di anni) possiamo dire che l'orbita di un pianeta è stabile. Se qualcuno cercasse di aumentare o diminuire il raggio dell'orbita (fissata la velocità di rivoluzione o meglio fissato il valore del momento angolare), il pianeta verrebbe riattratto verso la sua orbita originaria da una forza di richiamo. Per vedere cosa accade poniamoci in un SR non inerziale ma rotante, con origine nel Sole ed un asse r – diretto dal Sole verso la posizione P occupata istante per istante dal pianeta. Come in figura.



Tale asse ha una velocità angolare $\omega = d\varphi/dt$. In tale SR il pianeta è allora soggetto oltre che alla forza di gravitazione $-GMm/r^2 \mathbf{u}_r$, anche alla forza apparente centrifuga $m\omega^2 r \mathbf{u}_r$. Allora la componente radiale della forza F_r del risultante delle forze è

$$F_r = -G \frac{Mm}{r^2} + m \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 r$$

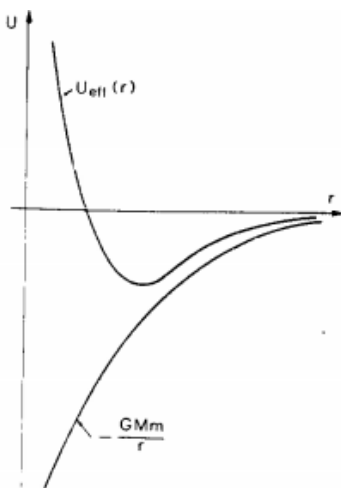
Siccome l'orbita è non perfettamente circolare la velocità angolare non sarà perfettamente costante, ma sarà perfettamente costante il momento angolare. Conviene dunque esprimere la forza centrifuga in termini di L , cosa che può essere fatta facilmente ricordando la (4) si ottiene

$$F_r = -G \frac{Mm}{r^2} + \frac{L^2}{mr^3}$$

Questa è una forza conservativa, essendo una forza centrale, e possiamo calcolare la sua energia potenziale che viene detta "efficace", si ha (scegliendo pari a zero la costante di integrazione in modo che il potenziale sia nullo all'infinito):

$$U_{ff} = -V_{eff} = -\int F_r dr = -\int \left(-G \frac{Mm}{r^2} + \frac{L^2}{mr^3} \right) dr = -G \frac{Mm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

L'andamento di tale funzione è come quello in figura



Essa si annulla per $r \equiv \bar{r} = \frac{L^2}{2GMm^2}$ e presenta un minimo per

$$r \equiv r_0 = 2\bar{r} = \frac{L^2}{GMm^2}$$

Come noto il punto di minimo dell'energia potenziale rappresenta un punto di equilibrio stabile nel SR rotante. Fissato cioè un certo valore per il momento angolare, esiste un solo preciso valore r_0 per il raggio tale che se in esso viene posto il pianeta con velocità radiale nulla (e dunque solo con velocità tangenziale corrispondente a quel valore di L) esso resta in quella posizione stabilmente, percorrendo nel SR inerziale un moto circolare.

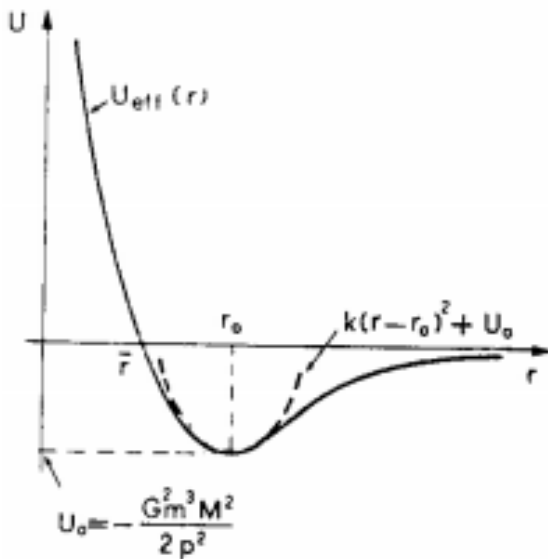
Vediamo cosa succede se il pianeta viene posto su un'orbita leggermente diversa da quella con raggio r_0 .

Vediamo che intorno al punto di minima energia potenziale la funzione può essere ben approssimata da una funzione del tipo $U(r) = k(r - r_0)^2 + U_0$ dove k è una opportuna costante e tale funzione è come evidente una funzione caratteristica di una forza elastica (con costante elastica k).

Dunque il pianeta sarà soggetto ad una forza di richiamo che può essere così espressa

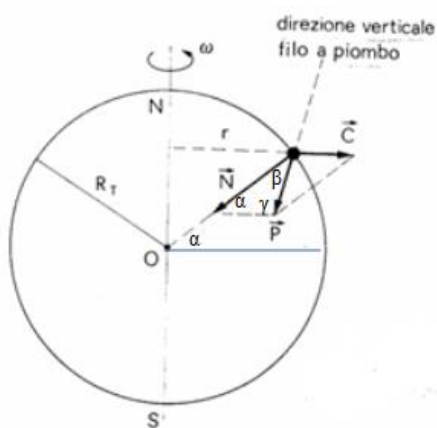
$$F_r = -\frac{\partial U_{ff}}{\partial r} \simeq -\frac{\partial}{\partial r} (k(r - r_0)^2) = -2k(r - r_0)$$

Tale situazione può essere visualizzata dal seguente grafico.



Inerzia e gravitazione

Da quanto visto sinora sembrerebbe che la materia possedesse due proprietà concettualmente distinte in riferimento alla grandezza massa: da un lato la massa inerziale (la sua capacità ad offrire resistenza al moto) e dall'altro la massa gravitazionale (quella proprietà che gli permette di attrarre ed essere attratto dagli altri corpi massivi). Come discusso al paragrafo III.6 del Mencuccini – Sivestrini è un fatto sperimentale che le due masse siano fra esse proporzionali. Si può allora osservare che la forza peso $\mathbf{P}$, in un dato luogo di un dato corpo in quiete rispetto alla superficie terrestre, rappresenta nel SR non inerziale solidale con la Terra, a cui ogni laboratorio appartiene, la somma di due contributi, uno gravitazionale dovuto all'attrazione che la Terra esercita su di esso $\mathbf{N}$ e l'altro inerziale dovuto alla forza centrifuga $\mathbf{C}$. In riferimento alla figura seguente si ha:



$$N = G \frac{M m_g}{R_T^2} \quad m_g = \text{massa gravitazionale}$$

$$C = m_i \omega^2 r = m_i \omega^2 R_T \cos \alpha \quad m_i = \text{massa inerziale}$$

La direzione di $\mathbf{P}$ (angolo β) rappresenta la direzione filo a piombo (della verticale) nel luogo considerato.

Applicando la legge dei seni si ha $\frac{N}{\sin \gamma} = \frac{C}{\sin \beta} \cotg$

$$\frac{N}{C} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{\sin((\pi - (\alpha + \beta)))}{\sin \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\sin \beta} = \sin \alpha \cot \beta - \cos \alpha$$

Quindi fissato l'angolo della latitudine la direzione del filo a piombo dipende esclusivamente dal valore rapporto N/C dato da

$$\frac{N}{C} = \frac{GM}{R_T^2 \omega^2 d} \frac{m_g}{m_i}$$

E quindi dipende dal valore del rapporto fra la massa gravitazionale ed inerziale.

L'esperienza dimostra che la direzione della verticale in un dato luogo è la stessa per tutti i corpi quali che siano le dimensioni o la loro composizione chimica. Dunque sperimentalmente le due masse coincidono. Sarà poi Einstein a porre questa uguaglianza addirittura come principio nella sua Relatività Generale asserendo l'identità concettuale (oltre che sperimentale) fra massa gravitazionale ed inerziale, quindi l'impossibilità di distinguere tra la forza di inerzia da quella gravitazionale.

Le verifiche sperimentali dell'equivalenza tra massa inerziale e gravitazionale sono state effettuate mediante l'uso di piani inclinati (Galileo), pendoli (Newton), fino ad arrivare alle bilance di torsione (Loránd Eötvös). Attualmente la precisione raggiunta dagli esperimenti è nell'ordine di una parte su mille miliardi, precisione ottenuta dalla misurazione della distanza lunare tramite laser.

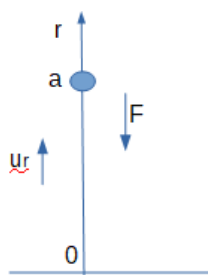
Tempo di caduta di un corpo in un campo centrale

Tempo di volo di un razzo per raggiungere l'altezza massima

Tempo di collisione di due corpi nello spazio

a cura di Giancarlo Buccella

- 1) Una particella di massa m si muove in un campo di forza centrale $\mathbf{F} = \frac{k}{r^n}(-\mathbf{u}_r)$, in cui k ed n sono costanti positive. Essa parte da ferma da un punto $r = a$ ed arriva in $r = 0$ con modulo di velocità finita v_0 . Dimostrare che la velocità in 0 è $v_0^2 = \frac{2k}{m} \frac{a^{1-n}}{1-n}$ e che n deve essere minore di 1.



Notiamo innanzitutto che per $r = 0$ la forza diverge, quindi è, più che altro, un problema di tipo matematico.

Applicando la seconda legge della dinamica si ha

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -\frac{k}{r^n}\mathbf{u}_r \quad (1)$$

essendo il problema unidimensionale possiamo scrivere

$$m \frac{dv}{dt} \equiv m \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} \equiv mv \frac{dv}{dr} = -\frac{k}{r^n} \quad \text{e quindi}$$
$$mvdv = -\frac{k}{r^n} dr \quad \text{integrando da 0 a } v_0 \text{ (la particella parte da ferma) e da "a" a 0 si ha} \quad (2)$$

$$\int_0^{v_0} mvdv = -\int_a^0 \frac{k}{r^n} dr$$

tenendo conto che l'integrale a secondo membro è convergente solo per $n < 1$, si ha

$$m \frac{1}{2} v_0^2 = -k \frac{a^{-n+1}}{n-1} \quad \text{ossia}$$
$$v_0 = \sqrt{\frac{2k}{m} \frac{a^{1-n}}{1-n}} \quad \text{con } n < 1 \quad (3)$$

E' chiaro che la condizione $n < 1$ è venuta fuori dalla nostra richiesta "matematica" di voler calcolare la velocità nell'origine dove la forza diverge.

Occorre precisare che non è che la soluzione di questo particolare problema imponga la non esistenza di forze con $n > 1$, ma solo che se si ammette che, nelle condizioni indicate, il corpo riesca ad arrivare a $r=0$ con una velocità finita allora in questo caso e solo in questo caso deve essere $n < 1$.

E' semplice vedere (vedi più avanti) che questo non accade ad esempio con la forza gravitazionale (beninteso nell'ambito della meccanica classica e assumendo puntiforme e fissa la massa centrale).

Variante del problema 1

Togliamo la restrizione che la velocità sia finita nell'origine ed imponiamo allora che sia $n > 1$.

Proponiamoci di calcolare il tempo di caduta.

Riprendiamo la (2) senza specificare gli estremi di integrazione, ossia considerando gli integrali indefiniti, e per comodità scriviamo al posto di n , $p + 1$ con la condizione $p > 0$.

$$F = -\frac{k}{r^{p+1}}$$

$$\int mvdv = -\int \frac{k}{r^{p+1}} dr \text{ la cui soluzione è}$$

$$m \frac{1}{2} v^2 = -k \frac{r^{-p}}{-p} + c$$

$$v^2 = \frac{2k}{m} \frac{1}{pr^p} + c \quad (4)$$

Sfruttiamo ora la condizione iniziale ($r(0) = a$ e $v(0) = 0$) per determinare la costante di integrazione,

$$0 = \frac{2k}{m} \frac{1}{pa^p} + c \quad \text{da cui} \quad c = -\frac{2k}{mpa^p} \quad \text{allora la (4) diventa}$$

$$v(r)^2 = \frac{2k}{m} \frac{1}{pr^p} - \frac{2k}{mpa^p} \quad (5)$$

Notiamo per inciso che nell'origine, essendoci una singolarità, la velocità sarebbe infinita (questo problema è in effetti una esercitazione matematica). Procediamo allora nel calcolare il tempo, estraendo la radice quadrata da ambo i membri, separando le variabili ed integrando:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2k}{mpr^p} - \frac{2k}{mpa^p}} = \pm \sqrt{\left(\frac{2k}{mp}\right) \left(\frac{1}{r^p} - \frac{1}{a^p}\right)}$$

$$\int_a^0 \frac{dr}{\pm \sqrt{\left(\frac{2k}{mp}\right) \left(\frac{1}{r^p} - \frac{1}{a^p}\right)}} = \int_0^T dt$$

Considerando che con il trascorrere del tempo r diminuisce, sopravvive il segno negativo:

$$T = -\sqrt{\frac{m}{2k}} \int_a^0 \frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{1}{r^p} - \frac{1}{a^p}\right)}} \quad (6)$$

dove è chiaro che il radicando è sicuramente positivo in quanto $r < a$ per ipotesi.

Il problema consiste ora nel risolvere l'integrale.

Facciamo qualche elucubrazione algebrica al fine di semplificare un po' l'integrale

$$\frac{1}{r^p} - \frac{1}{a^p} = \frac{a^p - r^p}{r^p a^p} = \frac{a^p}{r^p a^p} - \frac{r^p}{r^p a^p} = \frac{a^p}{r^p a^p} - \frac{1}{a^p} = \frac{1}{a^p} \left(\frac{a^p}{r^p} - 1 \right), \text{ quindi}$$

$$T = -\sqrt{\frac{mp}{2k}} \int_a^0 \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{a^p} \left(\frac{a^p}{r^p} - 1 \right)}} = -\sqrt{\frac{mp}{2k}} \int_a^0 \frac{\sqrt{a^p} dr}{\sqrt{\left(\frac{a^p}{r^p} - 1 \right)}} =$$

Ora operiamo la sostituzione di variabile $r/a = u$, quindi $dr = a du$, avendosi

$$T = -\sqrt{\frac{mp}{2k}} \int_a^0 \frac{a^{p/2} dr}{\sqrt{\left(\left(\frac{a}{r} \right)^p - 1 \right)}} = -\sqrt{\frac{mp}{2k}} a^{p/2} \int_1^0 \frac{adu}{\sqrt{\frac{1}{u^p} - 1}} = -\sqrt{\frac{mp}{2k}} a^{(p/2)+1} \int_1^0 \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{u^p} - 1}}$$

Ora facciamo una ulteriore sostituzione ponendo $x = u^p$, quindi $dx = pu^{p-1} du$ e $du = x^{1/p} dx/p$

$$T = -\sqrt{\frac{mp}{2k}} a^{(p/2)+1} \int_1^0 \frac{\sqrt{u^p} du}{\sqrt{1-u^p}} = -\sqrt{\frac{mp}{2k}} a^{(p/2)+1} \int_1^0 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \frac{x^{1/p} dx}{px} = -\sqrt{\frac{m}{2kp}} a^{(p/2)+1} \int_1^0 x^{(1/p+1/2-1)} (1-x)^{-1/2} dx$$

$$T = \sqrt{\frac{m}{2kp}} a^{(p/2)+1} \int_0^1 x^{(1/p-1/2)} (1-x)^{-1/2} dx \quad (7)$$

Ora chiamiamo in soccorso la funzione beta di Eulero, così definita

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

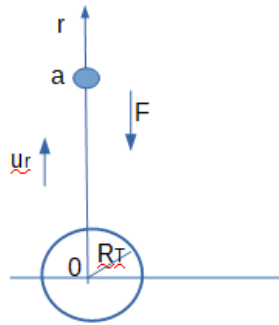
nel nostro caso si ha: $m - 1 = 1/p - 1/2$ ed $n - 1 = -1/2$,

quindi $m = 1/p + 1/2$ ed $n = 1/2$,

perciò in definitiva abbiamo che il tempo di caduta vale (il valore della funzione beta di Eulero è tabellata, e si può valutarla con un software di calcolo).

$$T = \sqrt{\frac{m}{2kp}} a^{(p/2)+1} \beta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \quad (8)$$

- 2) Consideriamo ora il problema “fisico” di quello precedente, pensiamo per fissare le idee al caso gravitazionale: il corpo “sorgente” della forza centrale deve avere una dimensione finita, quindi deve avere un certo raggio, pensiamo al seguente problema. A seguito di un urto con un meteorite, un satellite geostazionario viene completamente fermato e inizia a cadere in verticale sulla Terra, come illustrato nella figura seguente. Calcolare il tempo di caduta T.



Assumiamo un asse nel piano che congiunge il satellite al centro Terra che ruoti insieme con essa. Su questo asse assumiamo una coordinata radiale r (unica variabile nel moto), quindi siamo davanti ad un problema ad un sol corpo.

Allora integrando la (2)

con la condizione iniziale $r(0) = a$ e $v(0) = 0$ e con la condizione finale $r(T) = R_T$ e $v(T) = v_0$ si ha

$$\int_0^{v_0} m v dv = - \int_a^{R_T} \frac{GM_T m}{r^2} dr$$

$$\frac{1}{2} v_0^2 = -GM_T \left[\left(-\frac{1}{r} \right) \right]_a^{R_T} = -GM_T \left(-\frac{1}{R_T} + \frac{1}{a} \right) = GM_T \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{a} \right)$$

Dove il secondo membro è sicuramente positivo in quanto $a > R_T$ per ipotesi. Dunque la velocità in R_T vale

$$v_0 = \sqrt{2GM_T \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{a} \right)} \quad (9)$$

(poniamo $k \equiv GM_T = gR_T^2 \approx 4 \cdot 10^{14}$)

$$v_0 = \sqrt{2k \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{a} \right)}$$

Come già osservato a margine della relazione (3), se in questa relazione pensassimo M “sorgente della forza centrale” come puntiforme ($R_T = 0$), si avrebbe una velocità infinita nell’origine.

Facciamo un esempio numerico, considerando dunque un satellite geostazionario che si fermasse istantaneamente ed iniziasse quindi il suo moto unidimensionale di caduta,

sia: $a = 42.000 \text{ km}$ ed $R_T = 6.400 \text{ km}$.

Allora la sua velocità di impatto sulla superficie terrestre sarebbe

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot 4 \cdot 10^{14} \left(\frac{1}{6.4 \cdot 10^6} - \frac{1}{4.2 \cdot 10^7} \right)} = 10.3 \text{ km/s} \quad (10)$$

Se mandiamo “a” ad infinito abbiamo (è la situazione simmetrica del lancio di un grave dalla superficie della Terra ad infinito):

$$v_0 = \sqrt{8 \cdot 10^{14} \left(\frac{1}{6.4 \cdot 10^6} - \frac{1}{\infty} \right)} = \sqrt{8 \cdot 10^{14} \left(\frac{1}{6.4 \cdot 10^6} - 0 \right)} = 11.2 \text{ km/s}$$

Ritrovando così il noto risultato della velocità di fuga di un satellite lanciato dalla superficie terrestre.

Ritorniamo al nostro quesito. Impostiamo il problema, del calcolo del tempo, partendo da

$$F = ma = -GMm/r^2,$$

essendo un problema unidimensionale si ha

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -GM_T m \frac{1}{r^2}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -GM_T \frac{1}{r^2}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{k}{r^2} \quad (11)$$

Risolviamo questa “banale” eq. differenziale del secondo ordine non lineare, sapendo che le condizioni al contorno sono

$$r_{\text{in}} \equiv a = 42000 \text{ km} = 4.2 \cdot 10^7 \text{ m} \quad v_{\text{in}} = 0$$

$$r_{\text{fin}} \equiv R_T = 6400 \text{ km} = 6.4 \cdot 10^6 \text{ m} \quad v_{\text{fin}} = 10.3 \text{ km/s} \quad \text{come calcolato nella (10)}$$

Abbiamo dunque il seguente problema di Cauchy:

$$\ddot{r}(t) = -\frac{k}{r^2}$$

$$r(0) = a$$

$$\dot{r}(0) = 0$$

Conviene moltiplicare ambo i membri per $2\dot{r}$ ottenendo

$$2\dot{r}\ddot{r} = -\frac{2\dot{r}k}{r^2} \quad \text{così si ha che il primo membro è diventato } \frac{d}{dt}(\dot{r})^2 = 2\dot{r}\ddot{r} \quad \text{quindi possiamo scrivere}$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{r})^2 = -\frac{2k}{r^2} \dot{r} \quad \text{ed integrando}$$

$$v^2 \equiv (\dot{r})^2 = -2k \int \frac{\dot{r}}{r^2} dt = -2k \int \frac{dr}{dt} \frac{1}{r^2} dt = -2k \int \frac{1}{r^2} dr = \frac{2k}{r} + c_1$$

Imponendo la condizione iniziale di velocità nulla in $r = a$, ricaviamo c_1

$$0 = c_1 + \frac{2k}{a} \Rightarrow c_1 = -\frac{2k}{a}$$

$$v^2 \equiv \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2k}{r} - \frac{2k}{a} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{2k \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)} \quad (12)$$

A questa relazione si arriva anche dalla conservazione dell'energia, infatti, uguagliando l'energia iniziale con quella in un punto generico r :

$$E_{in} = E(r)$$

$$K_{in} + U_{in} = K(r) + U(r)$$

$$0 - GM_T m/a^2 = \frac{1}{2} m v^2 - GM_T m/r^2$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = GM_T m/r^2 - GM_T m/a^2$$

$$v^2 = 2GM_T/r^2 - 2GM_T/a^2 \quad \text{da cui la (12), ove si ricordi che } k = GM_T.$$

Ora occorre considerare che nel nostro SR la velocità diminuisce con l'aumentare del tempo per cui deve aversi $v(r) = -dr/dt$, cioè in sostanza occorre togliere il segno più al secondo membro della (12).

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{2k \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

separando le variabili ed integrando si ha

$$-\frac{dr}{\sqrt{2k} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}}} = dt$$

$$\int_0^T dt = - \int_{r_{in}}^{r_{fin}} \frac{dr}{\sqrt{2k} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}}} = - \frac{1}{\sqrt{2k}} \int_a^{R_T} \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}}}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2k}} \int_{R_T}^a \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}}} \quad (12 \text{ bis})$$

risolvendo l'integrale (con il programma di calcolo Wolfram) si ha

$$T = \frac{1}{\sqrt{2k}} \left[a^{3/2} \left(-\arctan \left(\sqrt{a} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}} \right) - ar \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}} \right) \right]_{R_T}^a$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2k}} \left[a^{3/2} \arctan \left(\sqrt{a} \sqrt{\frac{1}{R_T} - \frac{1}{a}} \right) + aR_T \sqrt{\frac{1}{R_T} - \frac{1}{a}} \right] \quad (13)$$

Inserendo i valori numerici abbiamo

$$T = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 4 \cdot 10^{14}}} \left[(4.2 \cdot 10^7)^{3/2} \left(\arctan \left(\sqrt{4.2 \cdot 10^7} \sqrt{\frac{1}{6.4 \cdot 10^6} - \frac{1}{4.2 \cdot 10^7}} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + 4.2 \cdot 10^7 \cdot 6.4 \cdot 10^6 \sqrt{\frac{1}{6.4 \cdot 10^6} - \frac{1}{4.2 \cdot 10^7}} \right) \right] =$$

$$= 35.4 \cdot 10^{-9} [(2.72 \cdot 10^{11} (\arctan(6480 \cdot 0.00036) + 269 \cdot 10^{12} (0.00036))] =$$

$$= 35.4 \cdot 10^{-9} (2.72 \cdot 10^{11} \cdot 1.16 + 0.97 \cdot 10^{11}) = 35.4 \cdot 10^{-9} \cdot 4.12 \cdot 10^{11} = 4.1 h$$

$$\mathbf{T = 4.1 h}$$

La soluzione (13) può anche essere scritta in modo leggermente diversa, rinunciando all'uso del programma di calcolo e risolvendo l'integrale "a mano", infatti:

$$T = -\frac{1}{\sqrt{2k}} \int_a^{R_T} \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}}} = \frac{1}{\sqrt{2k}} \int_{R_T}^a \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}}} = \frac{1}{\sqrt{2k}} \int_{R_T}^a \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{a} \left(\frac{a}{r} - 1 \right)}} = \sqrt{\frac{a}{2k}} \int_{R_T}^a \frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{a}{r} - 1 \right)}}$$

Operiamo la sostituzione $r/a = u$ cioè $dr = a du$ con gli estremi che cambiano da $R_T/a = 0.152$ ad 1

$$T = \sqrt{\frac{a}{2k}} \int_{R_T/a}^1 \frac{a du}{\sqrt{1/u - 1}} = \sqrt{\frac{a^3}{2k}} \int_{R_T/a}^1 \frac{du}{\sqrt{1/u - 1}} = \sqrt{\frac{a^3}{2k}} \left[-u \sqrt{\frac{1}{u} - 1} - \arctan \sqrt{\frac{1}{u} - 1} \right]_{R_T/a}^1$$

$$T = \sqrt{\frac{a^3}{2k}} \left[\frac{R_T}{a} \sqrt{\frac{a}{R_T} - 1} + \arctan \sqrt{\frac{a}{R_T} - 1} \right] \quad (14)$$

Inserendo i valori numerici si ha

$$T = \sqrt{\frac{a^3}{2k}} \left[0.152 \sqrt{\frac{1}{0.152} - 1} + \arctan \sqrt{\frac{1}{0.152} - 1} \right] = \sqrt{\frac{a^3}{2k}} (0.152 \cdot 2.36 + \arctan 2.36) =$$

$$= \sqrt{\frac{(42 \cdot 10^6)^3}{2 \cdot 4 \cdot 10^{14}}} (0.359 + 1.17) = 9623 \cdot 1.53 = 14690 s = 4.1 h$$

$$\mathbf{T = 4.1 h}$$

Vi è ancora un modo diverso di arrivare alla soluzione facendo delle opportune sostituzioni nel calcolo dell'integrale. Ripartendo dalla (12 bis), facendo la sostituzione: $x = r/a$, $dx = (1/a)dr$ si ha

$$T = \frac{1}{\sqrt{2k}} \int_{R_T/a}^1 \frac{adx}{\sqrt{\frac{1}{ax} - \frac{1}{a}}} = \frac{1}{\sqrt{2k}} \int_{R_T/a}^1 \frac{adx}{\sqrt{\frac{1}{a} \left(\frac{1}{x} - 1 \right)}} = \frac{1}{\sqrt{2k}} \int_{R_T/a}^1 \frac{\sqrt{a} a dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{x} - 1 \right)}} = \sqrt{\frac{a^3}{2k}} \int_{R_T/a}^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{x} - 1 \right)}} =$$

Facendo una ulteriore sostituzione: $x = y^2$, $dx = 2y dy$ si ha

$$T = \sqrt{\frac{a^3}{2k}} \int_{\sqrt{R_T/a}}^1 \frac{2y dy}{\sqrt{\left(\frac{1}{y^2} - 1 \right)}} = \sqrt{\frac{a^3}{2k}} \int_{\sqrt{R_T/a}}^1 \frac{2y^2 dy}{\sqrt{(1 - y^2)}} = \sqrt{\frac{a^3}{2k}} 2 \left[-\frac{1}{2} y \sqrt{1 - y^2} + \frac{1}{2} \arcsin y \right]_{\sqrt{R_T/a}}^1 =$$

$$= \sqrt{\frac{a^3}{2k}} \left[-y \sqrt{1 - y^2} + \arcsin y \right]_{\sqrt{R_T/a}}^1 = \sqrt{\frac{a^3}{2k}} \left(0 + \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{R_T}{a}} \sqrt{1 - \frac{R_T}{a}} - \arcsin \sqrt{\frac{R_T}{a}} \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{a^3}{2k}} \left(\sqrt{\left(\frac{R_T}{a} \right) \left(1 - \frac{R_T}{a} \right)} + \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{R_T}{a}} \right) = \sqrt{\frac{a^3}{2k}} \left(\sqrt{\left(\frac{R_T}{a} \right) \left(1 - \frac{R_T}{a} \right)} + \arccos \sqrt{\frac{R_T}{a}} \right)$$

$$T = \sqrt{\frac{a^3}{2k}} \left(\sqrt{\left(\frac{R_T}{a} \right) \left(1 - \frac{R_T}{a} \right)} + \arccos \sqrt{\frac{R_T}{a}} \right) \quad (15)$$

Avendo sfruttato la relazione $\arcsin \alpha + \arccos \alpha = \frac{\pi}{2}$.

La (15) è analoga a quella seguente fornita dal testo “Meccanica razionale” di Murray R. Spiegel (collana Schaum’s), che propone il problema simmetrico al nostro, dove viene chiesto il tempo occorrente ad un razzo che parta verticalmente con velocità v_0 ad arrivare alla quota massima h (dove h è la quota rispetto alla superficie terrestre):

$$T = \sqrt{\frac{R_T + h}{2g}} \left[\sqrt{\frac{h}{R_T}} + \frac{R_T + h}{2R_T} \arccos\left(\frac{R_T - h}{R_T + h}\right) \right] \quad (16)$$

Facciamo vedere l’uguaglianza fra la (15) e la (16). Riportiamo la (16) riferita alla distanza “ a ” dall’origine (centro della Terra) anziché alla quota h rispetto alla superficie terrestre, essendo

$h = a - R_T$ e $g = k/R_T^2$ si ha

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{a}{2k/R_T^2}} \left[\sqrt{\frac{a - R_T}{R_T}} + \frac{a}{2R_T} \arccos\left(\frac{2R_T - a}{a}\right) \right] \\ T &= \sqrt{\frac{aR_T^2}{2k}} \left[\sqrt{\left(\frac{a}{R_T}\right)\left(1 - \frac{R_T}{a}\right)} + \frac{a}{R_T} \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2R_T - a}{a}\right) \right] \\ T &= \sqrt{\frac{aR_T^2}{2k}} \left[\frac{a}{R_T} \left(\sqrt{\left(\frac{R_T}{a}\right)\left(1 - \frac{R_T}{a}\right)} + \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2R_T - a}{a}\right) \right) \right] \\ T &= \sqrt{\frac{aR_T^2}{2k}} \frac{a}{R_T} \left(\sqrt{\left(\frac{R_T}{a}\right)\left(1 - \frac{R_T}{a}\right)} + \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2R_T - a}{a}\right) \right) \\ T &= \sqrt{\frac{a^3}{2k}} \left[\sqrt{\left(\frac{R_T}{a}\right)\left(1 - \frac{R_T}{a}\right)} + \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2R_T - a}{a}\right) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Adesso facciamo vedere che vale la seguente uguaglianza

$$\frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2R_T - a}{a}\right) = \arccos \sqrt{\frac{R_T}{a}} \quad (18)$$

ponendo $R_T/a = x$ si ha

$\arccos(2x - 1) = 2 \arccos \sqrt{x}$ applicando la funzione coseno ad ambo i membri si ha:

$$(2x - 1) = \cos(2 \arccos \sqrt{x})$$

ricordando che $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ si ha

$$2x - 1 = \cos(2 \arccos \sqrt{x}) = 2 \cos^2(\arccos \sqrt{x}) - 1 = 2x - 1$$

Abbiamo così verificato l’uguaglianza, appena si ricordi che per definizione di arcocoseno si ha

$$\cos^2(\arccos \sqrt{x}) = x$$

Dunque la (17) può essere scritta in modo più compatto così:

$$T = \sqrt{\frac{a^3}{2k}} \left[\sqrt{\left(\frac{R_T}{a}\right) \left(1 - \frac{R_T}{a}\right)} + \arccos \sqrt{\frac{R_T}{a}} \right] \quad (19)$$

Ritrovando la (15).

Verifica numerica della (15)

$$T = \sqrt{\frac{(4.2 \cdot 10^7)^3}{2 \cdot 4 \cdot 10^{14}}} \left[\sqrt{\left(\frac{6.4 \cdot 10^6}{4.2 \cdot 10^7}\right) \left(1 - \frac{6.4 \cdot 10^6}{4.2 \cdot 10^7}\right)} + \arccos \sqrt{\frac{6.4 \cdot 10^6}{4.2 \cdot 10^7}} \right]$$

$$T = 9623 \left[\sqrt{0.152(1-0.152)} + \arccos \sqrt{0.152} \right] = 9623(0.359 + 1.17) = 4.1h$$

$$\mathbf{T = 4.1 h}$$

Calcoliamo per curiosità, la predizione del tempo di caduta dalla relazione (8) che ci dà il tempo fino al centro della Terra: $k = GM_T m$ e $p = 1$ (valore della funzione beta calcolato con un software di calcolo):

$$T = \sqrt{\frac{m}{2GM_T mp}} a^{(p/2)+1} \beta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2GM_T}} a^{3/2} \beta\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 10^{14}}} (4.2 \cdot 10^7)^{1.5} \cdot 1.57 =$$

$$= 35.35 \cdot 10^{-9} \cdot 272 \cdot 10^9 \cdot 1.57 = 4.2h$$

Quindi il modello delle masse puntiformi ci fornisce un risultato inattendibile, (4.2 ore è il tempo di caduta fino ad R_T non fino al centro della Terra) poiché in quel problema il centro della forza era considerato privo di massa, a riprova che era un problema di tipo matematico.

Contro l'ingegno la forza bruta non può nulla.

Se anziché usare la forza bruta dell'analisi matematica, si fosse accesa la lampadina dell'intuizione ingegnosa, si sarebbe risparmiata tanta fatica. Infatti ricorrendo alla terza legge di Keplero il problema si risolve immediatamente. Infatti basta considerare il modo di caduta del satellite come un'orbita ellittica collassata in un segmento di estremi "a" ed O. Quindi il valore del semiasse maggiore è pari ad a/2, ed il suo periodo è T. Allora detto T₀ il periodo orbitale del satellite si ha

$$\frac{T_0^2}{a^3} = \frac{T^2}{(a/2)^3} \quad (20)$$

$$T = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^3 \frac{T_0^2}{a^3}} = \frac{T_0}{2\sqrt{2}} \quad (21)$$

Per definizione di orbita geostazionaria il satellite artificiale deve percorrere l'orbita circolare in un tempo uguale al giorno siderale, T_{giorno siderale} = 23 h 56 min = 86160 s.

$$T = \frac{86160}{2\sqrt{2}} = 8.4 \text{ h}$$

Ma il satellite non compie un'orbita (collassata) intera, ma solo metà, quindi il tempo di caduta è la metà di T, perciò il risultato è

$$t = T/2 = 4.2 \text{ h}$$

N.B. Se non si conosce il valore di T₀ lo si può ricavare facilmente dalla relazione F = ma, che nel caso del satellite diventa (trascurando il segno): GM_t m/a² = mv²/r da cui v = (GM_T/a)^{1/2} e quindi il periodo è

$$T = \frac{s}{v} = \frac{2\pi a}{\sqrt{GM_T/a}} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM_T}} = 2\pi \sqrt{\frac{(42.168 \cdot 10^6)^3}{3.9857 \cdot 10^{14}}} \simeq 86160 \text{ s}$$

Avendo usato i valori più corretti per a = 42.168 · 10⁶ m e M_T = 5.972 · 10²⁴ kg

Ricapitolando abbiamo quattro relazioni equivalenti fra loro: (13), (14), (15) (16); per il calcolo del tempo di discesa (o ascesa) di un corpo lasciato cadere (o lanciato) sulla (o dalla) superficie terrestre verticalmente (dove “a” è la distanza riferita al centro della Terra, ed R_T il raggio terrestre).

$$T = \frac{1}{\sqrt{2k}} \left[a^{3/2} \arctan \left(\sqrt{a} \sqrt{\frac{1}{R_T} - \frac{1}{a}} \right) + a R_T \sqrt{\frac{1}{R_T} - \frac{1}{a}} \right]$$

$$T = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^3 \frac{T_0^2}{a^3}} = \frac{T_0}{2\sqrt{2}} \text{ essendo } T_0 \text{ il periodo orbitale del satellite}$$

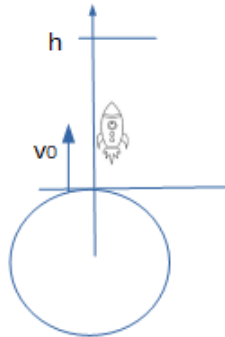
$$T = \sqrt{\frac{a^3}{2k}} \left(\sqrt{\left(\frac{R_T}{a}\right) \left(1 - \frac{R_T}{a}\right)} + \arccos \sqrt{\frac{R_T}{a}} \right)$$

$$T = \sqrt{\frac{R_T + h}{2g}} \left[\sqrt{\frac{h}{R_T}} + \frac{R_T + h}{2R_T} \arccos \left(\frac{R_T - h}{R_T + h} \right) \right] \text{ (riferita alla quota } h \text{ rispetto alla superficie terrestre)}$$

Problema simmetrico

2bis) Si calcoli il tempo di volo di un razzo che raggiunga l'altezza massima h dalla superficie terrestre.

Il moto inizia con velocità iniziale v_0 verticalmente.



Per simmetria al problema precedente possiamo affermare che il tempo di volo è quello già ricavato precedentemente, ma a noi interessa ora ricavarlo direttamente.

Possiamo intanto ricavare l'espressione dell'altezza massima raggiunta dal razzo che sarà ovviamente in funzione della velocità iniziale.

Applichiamo la conservazione dell'energia meccanica.

$$E_{in} = E_{fin}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G \frac{M_T m}{R_T} = 0 - G \frac{M_T m}{a}$$

$$v_0^2 = 2GM_T \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{a} \right) = \frac{2GM_T}{R_T} - \frac{2GM_T}{a} \Rightarrow \frac{2GM_T}{a} = \frac{2GM_T}{R_T} - v_0^2 = \frac{2GM_T - R_T v_0^2}{R_T} \text{ invertendo}$$

$$\frac{a}{2GM_T} = \frac{R_T}{2GM_T - R_T v_0^2}$$

$$a = \frac{2kR_T}{2k - R_T v_0^2} \quad (22)$$

Oppure, sostituendo k con $g R_T^2$:

$$a = \frac{2gR_T^2}{2gR_T - v_0^2}$$

Affinchè il denominatore sia positivo deve essere $v_0 < (2gR_T)^{1/2}$ = velocità di fuga = 11 km/s, infatti se la velocità è pari alla velocità di fuga la distanza dalla Terra va ad infinito, ossia esce dall'attrazione terrestre.

Volendo esprimere questo risultato in funzione dell'altezza h dalla superficie terrestre, si ha

$$\begin{aligned}
a &\equiv R_T + h = \frac{2gR_T}{2gR_T - v_0^2} \\
h &= \frac{2gR_T}{2gR_T - v_0^2} - R_T = \frac{2gR_T - 2gR_T + R_T v_0^2}{2gR_T - v_0^2} \\
h &= \frac{R_T v_0^2}{2gR_T - v_0^2} \quad (23)
\end{aligned}$$

Es. numerico per $v_0 = 3 \text{ km/s}$ si ha

$$h = \frac{R_T v_0^2}{2gR_T - v_0^2} = \frac{6.4 \cdot 10^6 \cdot (3 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 9.8 \cdot 6.4 \cdot 10^6 - (3 \cdot 10^3)^2} \approx 500 \text{ km}$$

Partiamo come al solito dalla seconda legge della Dinamica.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -G \frac{M_T m}{r^2} \mathbf{u}_r \quad \text{essendo il problema unidimensionale, si ha}$$

$$m \frac{dv}{dt} \equiv m \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} \equiv mv \frac{dv}{dr} = -G \frac{M_T m}{r^2} \Rightarrow v \frac{dv}{dr} = -\frac{k}{r^2} \quad (\text{con } k \equiv GM_T = gR_T^2 \approx 4 \cdot 10^{14})$$

$$v dv = -\frac{k}{r^2} dr$$

$$\int v dv = -\int \frac{k}{r^2} dr$$

$$\frac{1}{2} v^2 = -\left(-\frac{k}{r}\right) + c_1 = \frac{k}{r} + c_1$$

$$v^2 = \frac{2k}{r} + c_1$$

$$\text{Sfruttando le condizioni iniziali } r(0) = R_T \text{ e } v(0) = v_0 \text{ si ha} \quad c_1 = v_0^2 - \frac{2k}{R_T}$$

$$v^2 = \frac{2k}{r} + \left(v_0^2 - \frac{2k}{R_T}\right) \quad (24)$$

Ora è utile avere un'espressione che non contenga v_0 ma sia in funzione del parametro "a".

A tal uopo utilizziamo la (22)

$$a = \frac{2kR_T}{2k - R_T v_0^2}; \quad 2ka - aR_T v_0^2 = 2kR_T \Rightarrow v_0^2 = \frac{2ka - 2kR_T}{aR_T}$$

Dunque la (24) diventa

$$v^2 \equiv \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2k}{r} + \left(\frac{2ka - 2kR_T}{aR_T} - \frac{2k}{R_T}\right) = \frac{2k}{r} + \left(\frac{2ka - 2kR_T - 2ka}{aR_T}\right) = \frac{2k}{r} - \frac{2k}{a}$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{2k \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

Siccome r aumenta con il tempo occorre scegliere il segno positivo,

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2k \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

Separando le variabili

$$\frac{dr}{\sqrt{2k \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right)}} = dt$$

Integrando (utilizzando il programma di calcolo Wolfram)

$$\int_0^T dt = \int_{R_T}^a \frac{dr}{\sqrt{2k \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right)}}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\sqrt{2k}} \int_{R_T}^a \frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right)}} = \frac{1}{\sqrt{2k}} \left[a^{3/2} \left(-\arctan \sqrt{a} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}} \right) - ar \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}} \right]_{R_T}^a = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2k}} \left(a^{3/2} \arctan \sqrt{a} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R_T}} + a R_T \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R_T}} \right) \end{aligned}$$

Riottenendo la (13) e quindi per quanto già visto sopra, la soluzione proposta dal testo di cui sopra.

$$T = \sqrt{\frac{R_T + h}{2g}} \left[\sqrt{\frac{h}{R_T}} + \frac{R_T + h}{2R_T} \arccos \left(\frac{R_T - h}{R_T + h} \right) \right]$$

Vediamo per curiosità, dopo questo excursus sul moto di un corpo in un campo centrale, quale errore si commetterebbe (nel caso di caduta), supponendo che l'accelerazione rimanesse costante al valore iniziale (nel punto "a"). Supponendo costante il valore dell'accelerazione (mentre in effetti aumenta), ci aspettiamo un tempo superiore a quello effettivo. Per non far confusione con la notazione usiamo, per questo calcolo, il simbolo h per indicare la distanza "a".

Nel punto "h" si ha $F(h) = G \frac{M_T m}{h^2} = ma \rightarrow a = \frac{GM_T}{h^2} = \frac{4 \cdot 10^{14}}{(42 \cdot 10^6)^2} = 0.23 \text{ m/s}^2$ ed allora

dalla relazione $s = \frac{1}{2} a t^2$ ricaviamo il tempo

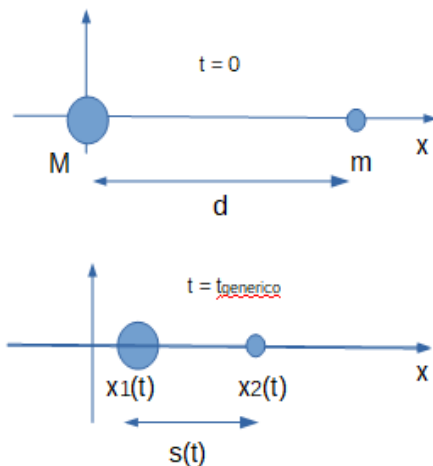
$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 35.6 \cdot 10^6}{0.23}} = 4.9 \text{ h}$$

Quindi l'errore (in eccesso, come atteso, essendo il moto più lento), è di 0.7 ore, ossia 42 min.

- 3) Quanto tempo ci impiegano due oggetti, di massa M ed m , di raggio R e r , posti ad una distanza d , a toccarsi nello spazio a causa dell'attrazione gravitazionale?

Si facciano le seguenti ipotesi: assenza di attrito; $d > r + R$; le velocità iniziali degli oggetti siano nulle (cambierebbe pochissimo se le velocità fossero allineate sulla congiungente delle due masse).

Il problema è di fatto un problema a una dimensione. Rappresentiamo la situazione.



Le due masse si incontrano, nell'istante t , quando si avrà

$$s(t) = x_2(t) - x_1(t) = r + R$$

dove x_1 e x_2 sono le posizioni della massa M e m rispettivamente, sull'asse x , che congiunge i due centri delle masse. Inoltre si pone l'origine del sistema di riferimento tale per cui $x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = d$.

Per un sistema chiuso e isolato, come il nostro, su cui, cioè, non agisca nessuna forza esterna netta, la quantità di moto $\mathbf{P}$ rimane costante.

La forza netta è nulla in quanto

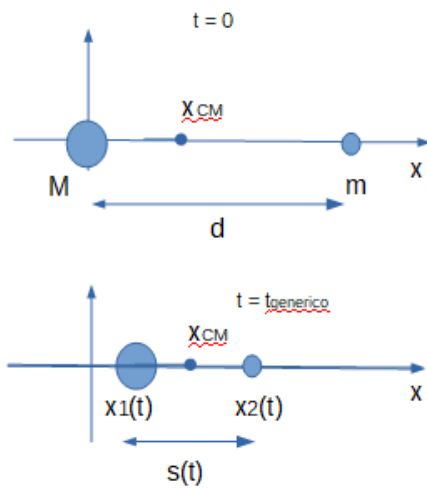
$$\mathbf{F}_{totale} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = G \frac{Mm}{s(t)} \mathbf{i} + G \frac{Mm}{s(t)} (-\mathbf{i}) = 0$$

Quindi essendo

$$\mathbf{P} = (M + m) \mathbf{v}_{CM}$$

la velocità del centro di massa rimane costante nel tempo, ciò significa che se le masse sono poste inizialmente ferme, come si è assunto, allora la velocità del centro di massa è nulla, per cui $\mathbf{x}_{CM}$ rimane fisso.

La situazione in questo sistema di riferimento è



Sul corpo di massa M agisce la forza gravitazionale esercitata dal corpo di massa m

$$\mathbf{F}_M = G \frac{Mm}{s(t)^2} \mathbf{i} = F(t) \mathbf{i}$$

per cui subirà una accelerazione

$$\mathbf{a}_M \equiv \mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{F}_M}{M} = \frac{F(t)}{M} \mathbf{i}$$

Sul corpo di massa m agisce la forza gravitazionale esercitata dal corpo di massa M

$$\mathbf{F}_m = -G \frac{Mm}{s(t)^2} \mathbf{i} = -F(t) \mathbf{i}$$

per cui subirà una accelerazione

$$\mathbf{a}_m \equiv \mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{F}_m}{m} = -\frac{F(t)}{m} \mathbf{i}$$

essendo

$$s(t) = x_2(t) - x_1(t);$$

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} [x_2(t) - x_1(t)] = \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} - \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} = a_2 - a_1$$

Il modulo dell'accelerazione relativa, cioè l'accelerazione della coordinata s(t), è

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} [a_2(t) - a_1(t)] = -\frac{F(t)}{m} - \frac{F(t)}{M} = -F(t) \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)$$

Abbiamo dunque il seguente problema di Cauchy

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = -F(t) \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) = -G \frac{Mm}{s(t)^2} \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) = -\frac{k}{s(t)^2}$$

Avendo posto

$$k = GMm \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) = G(M + m)$$

Abbiamo dunque il seguente problema di Cauchy

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} \equiv \ddot{s} = -\frac{k}{s(t)^2}$$

Con le condizioni iniziali

$$s(0) = d$$

$$v(0) = ds(0)/dt = 0$$

Convieni moltiplicare ambo i membri per $2\dot{s}$ ottenendo

$$2\dot{s}\ddot{s} = -\frac{2\dot{s}k}{s^2} \quad \text{così si ha che il primo membro diventa} \quad \frac{d}{dt}(\dot{s})^2 = 2\dot{s}\ddot{s} \quad \text{quindi possiamo scrivere}$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{s})^2 = -\frac{2k}{s^2} \dot{s} \quad \text{ed integrando}$$

$$v^2 \equiv (\dot{s})^2 = -2k \int \frac{\dot{s}}{s^2} dt = -2k \int \frac{ds}{dt} \frac{1}{s^2} dt = -2k \int \frac{1}{s^2} ds = \frac{2k}{s} + c_1$$

Sfruttando le condizioni iniziali ricaviamo c_1 :

$$0 = \frac{2k}{d} + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{2k}{d}$$

$$v^2(t) \equiv \left(\frac{ds(t)}{dt} \right)^2 = \frac{2k}{s} - \frac{2k}{d} = 2k \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{d} \right)$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = \pm \sqrt{2k \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{d} \right)}$$

Ora occorre considerare che nel nostro SR la velocità della coordinata $s(t)$ diminuisce con l'aumentare del tempo ($ds/dt < 0$) per cui occorre prendere il segno meno.

$$\frac{ds(t)}{dt} = -\sqrt{2k \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{d} \right)}$$

separando le variabili ed integrando si ha

$$-\frac{ds}{\sqrt{2k}\sqrt{\frac{1}{s}-\frac{1}{d}}} = dt$$

$$\int_0^T dt = -\frac{1}{\sqrt{2k}} \int_{s_{in}}^{s_{fin}} \frac{ds}{\sqrt{\frac{1}{s}-\frac{1}{d}}} = -\frac{1}{\sqrt{2k}} \int_d^{R+r} \frac{ds}{\sqrt{\frac{1}{s}-\frac{1}{d}}}$$

I corpi partono dalla distanza d ed arrivano a toccarsi quando $s(T) = R + r$

Integrando (utilizzando il programma di calcolo Wolfram)

$$T = \frac{1}{\sqrt{2k}} \int_{R+r}^d \frac{ds}{\sqrt{\frac{1}{s}-\frac{1}{d}}} = \frac{1}{\sqrt{2k}} \left[d^{3/2} \left(-\arctan \sqrt{d} \sqrt{\frac{1}{s}-\frac{1}{d}} \right) - d s \sqrt{\frac{1}{s}-\frac{1}{d}} \right]_{R+r}^d$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2k}} \left[d^{3/2} \left(\arctan \sqrt{d} \sqrt{\frac{1}{R+r}-\frac{1}{d}} \right) + d(R+r) \sqrt{\frac{1}{R+r}-\frac{1}{d}} \right]$$

Esempio numerico: sia $M = 10^3$ kg ; $m = 10^2$ kg; $d = 10^3$ m; $R = 5$ m; $r = 1$ m

Allora si ha

$$k = G(M+m) = 6.67 \cdot 10^{-11} (10^3 + 10^2) = 7.34 \cdot 10^{-8}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 7.34 \cdot 10^{-8}}} \left[(1000)^{3/2} \left(\arctan \sqrt{1000} \sqrt{\frac{1}{6}-\frac{1}{1000}} \right) + 1000(R+r) \sqrt{\frac{1}{6}-\frac{1}{1000}} \right]$$

$$T = 2.6 \cdot 10^3 \left[(3.16 \cdot 10^4 \cdot \arctan 12.87 + 1000 \cdot 6 \cdot 0.41) \right]$$

$$T = 2.6 \cdot 10^3 \left[(3.16 \cdot 10^4 \cdot 85.56 + 1000 \cdot 6 \cdot 0.41) \right] = 2.6 \cdot 10^3 (2.70 \cdot 10^6 + 2.46 \cdot 10^3)$$

$$T = 7.02 \cdot 10^9 \text{ s} = 222 \text{ anni}$$

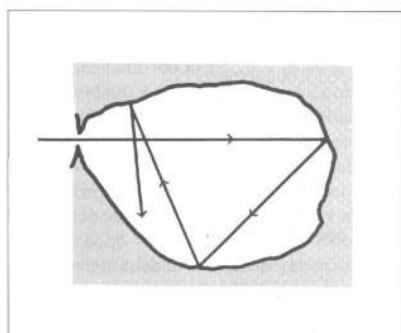
Teoria classica del corpo nero

a cura di Giancarlo Buccella

2 Modello e descrizione fisica

Un corpo solido emette, per effetto dell'agitazione termica degli atomi, una radiazione elettromagnetica, uniformemente distribuita in tutte le direzioni e non polarizzata, con uno spettro continuo che si estende, a temperature ordinarie, dalle microonde all'ultravioletto e la cui forma ha un aspetto caratteristico che dipende dalla temperatura assoluta.

Si definisce corpo nero un oggetto ideale opaco (ossia con coefficiente di trasmissione pari a zero) che assorbe tutta la radiazione elettromagnetica che lo investe senza rifletterla e che sia in equilibrio termico con la radiazione in essa contenuta.



Il corpo nero assorbe dunque tutta l'energia incidente e, per il principio di conservazione, reirradia totalmente la quantità assorbita, dovendo quindi il suo nome unicamente all'assenza di riflessione; possiede perciò coefficiente di emissione uguale a quello di assorbimento e pari ad uno. I corpi reali invece si discostano più o meno sensibilmente da questa definizione e sono perciò detti corpi grigi. In altri termini si può dire che tutti i corpi reali si comportano più o meno come corpi neri a meno della loro riflettività e trasmissanza. Dal punto di vista visivo, un corpo nero può essere interpretato come una cavità dotata di un orificio che permette l'ingresso di radiazione elettromagnetica ma rende molto improbabile la sua uscita dallo stesso. Questo modello costituisce un'ottima approssimazione di corpo nero: basti pensare a un contenitore in cui sia stato fatto un piccolo foro: a temperatura ambiente il foro appare assolutamente nero, ed il motivo è che la radiazione luminosa che entra nel contenitore viene diffusa molte volte al suo interno, ed è molto più probabile che alla fine venga assorbita piuttosto che riesca ad uscire dallo stesso foro da cui è entrata. In questo modo la radiazione che entra nella cavità scalda le pareti, che riemettono, a temperatura ordinaria, principalmente radiazione infrarossa. Quando viene raggiunto l'equilibrio termodinamico l'energia elettromagnetica che entra nella cavità è uguale a quella irradiata dal foro, ma il tipo di radiazione

emesso dipende dalla temperatura della cavità. Da questo punto di vista si capisce allora che un corpo nero non è veramente nero: un oggetto come quello descritto sopra ci appare nero a temperatura ambiente perché assorbe radiazione visibile, quest'ultima viene convertita in radiazione nel dominio dell'infrarosso (a temperature ordinarie), in seguito all'assorbimento e riemissione da parte delle pareti, tali radiazioni risultando non visibile dall'occhio umano ci fanno apparire il foro come nero. Per temperature inferiori a 1000 K, lo spettro è essenzialmente tutto nella regione dell'infrarosso, successivamente comincia a comparire il visibile, a partire dal rosso, per poi includere tutte le frequenze (del visibile) fino a far apparire il corpo di color bianco. Il filamento di una lampadina a incandescenza ad esempio ha una temperatura intorno ai 3000 K, mentre la superficie del sole ha una temperatura prossima ai 6000 K.

Tuttavia, il modello del corpo nero non rappresenta unicamente un'approssimazione matematica astratta ma può essere ricondotta a molti esempi fisici concreti: ad esempio, il sole si comporta come un ottimo corpo nero. Per convincersi di ciò, consideriamo un cubo di lato 1 m e pratichiamo su di esso un piccolo foro circolare di raggio 1 mm; questo esempio riproduce in modo convincente la nostra definizione di corpo nero. Calcoliamo ora il rapporto tra la superficie del foro e il volume del cubo

$$\frac{S}{V} = \frac{\pi r^2}{L^3} = \frac{\pi \cdot 10^{-6}}{1^3} = 3.14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^{-1}$$

Ora allo stesso modo prendiamo in esame il Sole, in cui la superficie emittente (corrispondente al foro del caso precedente) è costituita da tutta la superficie esterna della stella. Procediamo allo stesso calcolo:

$$\frac{S}{V} = \frac{4\pi r^2}{(4/3)\pi r^3} = \frac{3}{r} = \frac{3}{6.9 \cdot 10^8} \simeq 10^{-8} \text{ m}^{-1}$$

siamo quindi notare un fatto piuttosto inatteso: il Sole è più adatto a esemplificare il comportamento di un corpo nero rispetto al modello stesso con cui lo abbiamo descritto. Nell'immagine riportata, si nota infatti come lo spettro emissivo del Sole in funzione della frequenza rispecchi quasi esattamente il modello del corpo nero associato a una temperatura di 6000 K.

Vediamolo un po' meglio.

Una stella o un pianeta è spesso modellato come un corpo nero e la radiazione elettromagnetica emessa da questi corpi come radiazione del corpo nero. La figura mostra una sezione trasversale molto schematica per illustrare l'idea. La fotosfera della stella, dove viene generata la luce emessa, è idealizzata come uno strato all'interno del quale i fotoni di luce interagiscono con il materiale nella fotosfera e raggiungono una temperatura comune T che si mantiene per un lungo periodo di tempo.

Alcuni fotoni sfuggono e vengono emessi nello spazio, ma l'energia che portano via viene sostituita dall'energia proveniente dall'interno della stella, cosicché la temperatura della fotosfera è quasi costante. I cambiamenti nel nucleo portano a cambiamenti nella fornitura di energia alla fotosfera, ma tali cambiamenti sono lenti (circa centomila anni) sulla scala temporale di interesse qui. Supponendo che queste circostanze possano realizzarsi, lo strato esterno della stella è in qualche modo analogo all'esempio di un involucro con un piccolo foro al suo interno, con il foro sostituito dalla trasmissione limitata nello spazio all'esterno della fotosfera. Con tutti questi presupposti, la stella emette radiazioni di corpo nero alla temperatura della fotosfera.

La teoria del Big Bang si basa sul principio cosmologico, che afferma che su larga scala l'Universo è omogeneo ed isotropo. Secondo la teoria, l'Universo circa un secondo dopo la sua formazione era un corpo nero quasi ideale in equilibrio termico a una temperatura superiore a 10^{10} K. La temperatura diminuiva man mano che l'Universo si espandeva e la materia e le radiazioni in esso contenute si raffreddavano. La radiazione cosmica di fondo a microonde osservata oggi è "il corpo nero più perfetto mai misurato in natura". Ha uno spettro di Planck quasi ideale a una temperatura di circa 2,7 K. Si discosta dall'isotropia ideale della radiazione del corpo nero solamente per una parte su centomila.

Una realizzazione pratica di un corpo che risulti nero a tutte le frequenze e temperature, che è di estrema importanza sia concettuale (per calcolarne lo spettro universale) sia empirica (per costruirlo in pratica) fu introdotto da Lummer e Wien, 1862 ed è la seguente. Si disponga di una cavità chiusa con pareti arbitrarie ma termalizzate alla temperatura T e perfettamente isolate dal mondo esterno. Si supponga di poter aprire, senza alterare l'equilibrio termico, un foro microscopico nella parete della cavità che consenta di misurare, senza alterarla, la radiazione in equilibrio alla temperatura T . Il foro in questione, visto dal di fuori, si comporta come un perfetto corpo nero. Infatti la radiazione emessa dal foro stesso sarà quella di un corpo alla temperatura T (la stessa che colpisce le pareti della cavità) mentre il foro stesso è in grado di assorbire completamente qualsiasi radiazione (tutta quella che colpisce il foro dall'esterno viene assorbita dal foro in quanto entra dalla cavità senza più uscirne) un po' come fa il portone di una casa che, anche in pieno giorno, appare nero! Ovviamente più sarà piccolo il rapporto tra superficie del foro e volume della cavità e più ideale sarà il comportamento di corpo nero del foro. Quindi è il foro che si comporta da corpo nero non le pareti della cavità (anche se il ruolo delle pareti è essenziale perché è a furia di rimbalzare tra le pareti della cavità che la radiazione verrà prima o poi termalizzata).

Introduciamo alcune grandezze preliminari per lo studio del corpo nero.

Iniziamo con l'osservare che lo spettro può essere descritto come sia come intensità della radiazione emessa da una superficie che come densità dell'energia contenuta in una cavità risonante.

Dunque si definisce *potere emissivo specifico* (o intensità specifica) l'energia emessa da un corpo alla temperatura T , per unità di tempo, per unità di superficie e per unità di frequenza:

$$e(\nu, T) \equiv I_\nu \equiv \frac{dI}{d\nu} = \frac{dE}{dt dS d\nu} (W / m^2 s^{-1})$$

Per studiare l'assorbimento dei corpi, invece, si introduce la funzione *potere assorbente*, denotata con $a(\nu, T)$. Questa è definita, per ogni temperatura del corpo, come la frazione assorbita dell'energia incidente alla frequenza ν . Si noti che questa funzione, a differenza della $e(\nu, T)$ è adimensionale.

$$a(\nu, T) = \frac{E_{\text{incidente}}}{E_{\text{assorbita}}}$$

Il potere emissivo, come il potere assorbente, è una caratteristica del corpo considerato. Esisteranno corpi che hanno una grande capacità di emettere radiazioni e corpi che ne hanno meno. Ma applicando la seconda legge della termodinamica nel 1860 Kirchhoff scoprì una legge generale: mentre il potere emissivo e il potere assorbente cambiano da corpo a corpo il rapporto tra i due è una funzione universale dipendente solo dalla temperatura e dalla frequenza considerata, cioè

$$\frac{e(\nu, T)}{a(\nu, T)} = f(\nu, T)$$

Ci si pose dunque il problema di capire cosa fosse questa funzione universale, Kirchhoff osserva che se si considera un corpo con potere assorbente uguale a 1 si ha che $e(\nu, T)$ prende il suo valore massimo ed inoltre che in quel caso la funzione universale cercata è proprio il potere emissivo.

$$\frac{e(\nu, T)}{1} = f(\nu, T) \Rightarrow e(\nu, T) = f(\nu, T)$$

Con semplici considerazioni dimostreremo che l'emittanza specifica del corpo $e(\nu, T)$ può essere espressa in termini della densità di energia delle onde elettromagnetiche all'interno della cavità $u(\nu, T)$ (energia per unità di volume per intervallo unitario di frequenza). Si ottiene infatti che, per una cavità chiusa di forma qualsiasi, l'energia incidente per unità di superficie sulle pareti al suo interno

è data da $(c/4) u(\nu, T)$, dove c è la velocità della luce. Immaginando quindi di aprire un foro microscopico nelle pareti della cavità stessa, questo foro, visto da fuori, avrà un'emissività data proprio da $(c/4) u(\nu, T)$. Poiché abbiamo visto che il foro si comporta come un corpo nero perfetto, avremo che l'emissività di un corpo nero è data da (Kirchoff 1859):

$$e(\nu, T) = \frac{c}{4} u(\nu, T)$$

In altre parole l'emissività di un corpo nero alla temperatura T è proporzionale, frequenza per frequenza, alla densità di energia della radiazione di cavità (per una qualsiasi cavità) purché con pareti isolate e portate tutte alla stessa temperatura T .

Dimostrazione.

Partiamo dal proporci di voler calcolare l'energia che incide su una superficie unitaria perpendicolare all'asse z per unità di tempo, ossia la potenza per unità di superficie (intensità). A tal fine indichiamo con $u(\theta)$ la densità di energia delle onde che si propagano nella direzione definita dall'angolo θ (tralasciamo per semplicità di scrittura la dipendenza da ν e da T).

Integrando in coordinate polari si ha

$$\int du(\theta) \equiv u = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} u(\theta) \sin\theta d\theta$$

Dove u è la densità di energia totale. Se non ci sono direzioni preferenziali $u(\theta)$ sarà costante e potremo assumere,

$$u(\theta) = \frac{u}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta} = \frac{u}{4\pi}$$

Possiamo allora calcolare l'energia che incide su una superficie unitaria perpendicolare all'asse z per unità di tempo dovuta alle sole onde che si propagano in una data direzione θ (e φ qualsiasi) come

$$\frac{dP(\theta)}{dS} = \frac{dE(\theta)}{dt dS} = \frac{dE(\theta)}{dV} c_z = u(\theta) c \cos\theta$$

Dove c è la velocità della luce (evidentemente la componente lungo z di c è proprio c , essendo un invariante). Integrando la potenza per unità di superficie sul semispazio delle direzioni consentite (tutte le direzioni di propagazione in direzione positiva dell'asse z) avremo

$$\frac{dP}{dS} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{dP(\theta)}{dS} \sin\theta d\theta = cu \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta}{4\pi} = cu \frac{2\pi(1/2)}{4\pi} = \frac{c}{4}u$$

In pratica il fattore $1/2$ al numeratore rispecchia il fatto che le onde stazionarie presenti nella cavità sono rappresentabili come onde viaggianti con direzione opposte, quindi solo metà dell'energia di un'onda stazionaria può viaggiare verso un dato elemento di superficie. Avremo quindi che l'energia incidente per unità di superficie e per unità di tempo è data da

$$\frac{dP}{dS} = \frac{c}{4}u$$

Se al posto dell'elemento di superficie sostituiamo il foro della cavità, la radiazione che vi incide è

$$e = \frac{c}{4}u \text{ (W / m}^2\text{)}$$

proprio quella emessa dal foro per cui l'emissività del foro deve valere:

Reintroducendo la dipendenza da ν , ossia considerando la potenza specifica si ha

$$e(\nu, T) = \frac{c}{4} u(\nu, T) \text{ (W / m}^2\text{s}^{-1}\text{)} \quad \text{c.v.d.}$$

Che rappresenta quindi l'energia emessa da un corpo nero alla temperatura T , per unità di superficie, per unità di tempo e per unità di frequenza in tutte le direzioni.

Dimostrazione alternativa.

Si può partire anche considerando la densità di energia radiante (specifica) all'interno della cavità $u(\nu) = du/d\nu$. Consideriamo dunque la funzione $u(\nu, T)$ tale che $u(\nu, T) d\nu$ indica la quantità di energia posseduta dal campo elettromagnetico contenuto nell'unità di volume della cavità, ed avente frequenza compresa fra ν e $\nu + d\nu$: cioè

$$u(\nu, T) = \frac{du}{d\nu} \text{ (J / m}^3\text{s}^{-1}\text{)}; \quad \text{densità di energia per unità di frequenza}$$

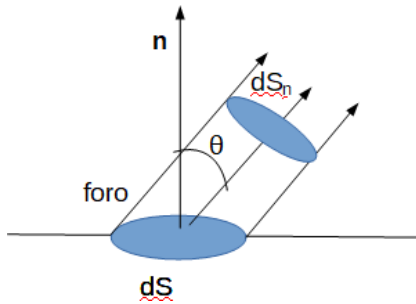
$$u(\nu, T) d\nu = du = \frac{\text{energia della radiazione avente frequenza compresa fra } \nu \text{ e } \nu + d\nu}{\text{unità di volume}} \quad (J / m^3)$$

Intanto si può affermare che la radiazione all'interno della cavità deve essere uniforme ed isotropa, altrimenti potrebbe realizzarsi un trasferimento spontaneo di energia da un punto all'altro, cosa impossibile se i punti sono alla stessa temperatura (come abbiamo ipotizzato).

Consideriamo dunque la radiazione emergente dal foro con superficie elementare dS . Poiché internamente alla cavità la radiazione si muove isotropicamente con velocità c , la potenza emessa nell'intervallo di frequenza $d\nu$ entro l'angolo solido $d\Omega$ intorno alla direzione θ rispetto alla normale $\mathbf{n}$ al foro, vale evidentemente:

$$\frac{d^2 W}{d\Omega d\nu} d\Omega d\nu = du \cdot dS \cdot c \cdot \frac{d\Omega}{4\pi}$$

Essa è infatti uguale alla densità di energia du (relativa all'intervallo $d\nu$) moltiplicata per il volume di un cilindro di base dS_n ed altezza c , e per il rapporto dell'angolo solido elementare $d\Omega$ rispetto all'angolo solido totale 4π , come si vede dalla seguente illustrazione.



Tenuto conto che $dS_n = dS \cos\theta$ e $du = u(\nu)d\nu$, l'intensità differenziale angolare o potere emissivo differenziale angolare (potenza per unità di superficie, nell'intervallo di frequenza $d\nu$, e per unità di angolo solido) vale:

$$\frac{d^2 I}{d\Omega d\nu} d\Omega d\nu = \frac{d^2 (P / S)}{d\Omega d\nu} d\Omega d\nu = \frac{1}{dS} \frac{d^2 P}{d\Omega d\nu} d\Omega d\nu = c \frac{u(\nu)}{4\pi} \cos\theta d\Omega d\nu$$

Integrando questa espressione rispetto a $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ (tenuto conto che l'integrale su θ vale $\frac{1}{2}$, mentre quello su ϕ vale 2π) si ottiene il potere emissivo, ossia l'intensità per unità di frequenza $dI/d\nu$ emessa sull'angolo solido del corpo nero:

$$e(\nu) d\nu \equiv \frac{dI}{d\nu} d\nu = \frac{c}{4} u(\nu) d\nu$$

(N.B. Data la seguente uguaglianza di funzioni reali A(x) e B(x)

$$A(x) dx = B(x) dx ; \quad [A(x) - B(x)] dx = 0$$

Esse risulteranno senz'altro uguali, dovendo essere A(x) = B(x) al fine di verificare l'uguaglianza).

Dunque si ha la seguente importante relazione che lega l'intensità specifica alla densità di energia specifica:

$$\varepsilon(\nu, T) \equiv I_\nu = \frac{c}{4} u(\nu, T)$$

Verifichiamo che dimensionalmente la relazione è corretta

$$\varepsilon(\nu, T) \equiv \frac{W}{m^2 s^{-1}} = \frac{c}{4} f(\nu, T) \equiv \frac{m}{s} \frac{J}{m^3 s^{-1}} = \frac{J}{s} \frac{1}{m^2 s^{-1}} = \frac{W}{m^2 s^{-1}}$$

Quindi tutto lo studio dello spettro del corpo nero consiste nell'identificare la funzione universale u(ν,T).

3 Leggi di Wien e di Stefan-Boltzmann

Si definisce inoltre potere emissivo totale (o intensità totale) l'energia emessa da un corpo nero alla temperatura T, per unità di superficie, per unità di tempo, su tutte le frequenze

$$\varepsilon_{TOT} \equiv I_{TOT} = \int_0^{\infty} \varepsilon(\nu, T) d\nu$$

Nel 1879 Josef Stefan scoprì sperimentalmente che l'intensità totale era proporzionale alla quarta potenza della temperatura e nel 1884 Ludwig Boltzmann la derivò per via teorica (usando l'elettromagnetismo classico e la termodinamica), in loro onore la costante di proporzionalità viene chiamata costante di Stefan-Boltzmann; quindi si ha

$$\varepsilon_{TOT} = \int_0^{\infty} \varepsilon(\nu, T) d\nu = \sigma T^4 \text{ (W / m}^2\text{)}$$

$$\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 \hbar^3 c^2} = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

Lo spettro del corpo nero è uno spettro continuo (cioè assume valori su tutte gli infiniti valori reali delle frequenze) con la tipica forma a "campana" dove il picco di emissione è la lunghezza d'onda a cui corrisponde la massima emissione (massima intensità) della radiazione emessa. Un primo importante risultato venne ottenuto nel 1893 dal giovane fisico austriaco Wien.

1° Legge di Wien (1893)

Da considerazioni teoriche, combinando termodinamica ed elettromagnetismo, riguardanti la radiazione chiusa in una cavità perfettamente assorbente (corpo nero) soggetta ad una compressione adiabatica (termodinamica più effetto doppler) Wilhem Wien ricavò la seguente espressione

$$u(\nu, T) \propto \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

Questa legge contiene implicitamente la legge di Stefan-Boltzmann, infatti integrando su tutte le frequenze si ha

$$I = \frac{c}{4} \int_0^{\infty} u(\nu, T) d\nu \propto \frac{c}{4} \int_0^{\infty} \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu = \frac{c}{4} T^4 \int_0^{\infty} x^3 F(x) dx = \text{cost} \cdot T^4$$

La proporzionalità deriva dal fatto che l'integrale è stato reso indipendente da T. La costante di proporzionalità potrà essere calcolata solo conoscendo esplicitamente la legge di emissività.

2° Legge di Wien (o legge dello spostamento di Wien) (1899)

Si notò che il picco di emissione è quello che caratterizza il colore di cui appare il corpo se scaldato a quella temperatura. Aumentando la temperatura il picco di emissione si sposta verso una lunghezza d'onda più piccola. Wien scoprì che il prodotto della lunghezza d'onda corrispondente al picco di emissione per la temperatura assoluta del corpo è sempre una costante.

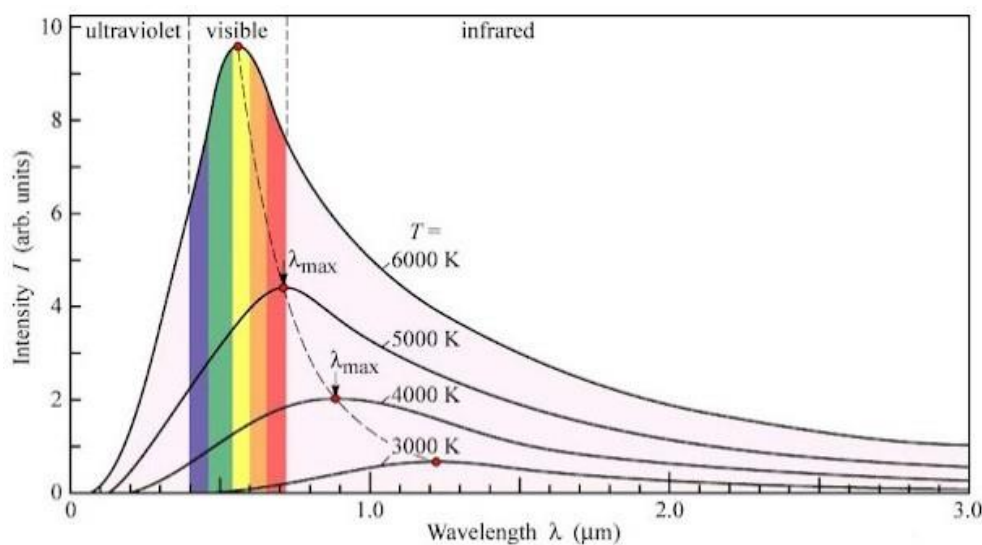
La legge dello spostamento di Wien si scrive pertanto: $\lambda_{\max} \cdot T = \text{cost.}$ ossia $\lambda_{\max} = \frac{\text{cost.}}{T}$

Quindi la lunghezza d'onda di picco risulta inversamente proporzionale alla temperatura.

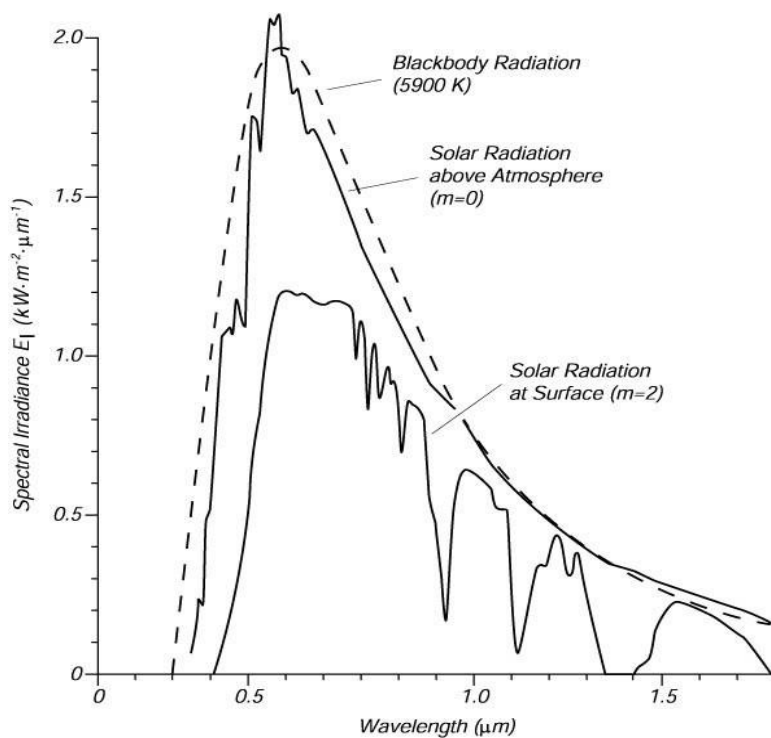
Numericamente si è trovato che la costante vale $2.89 \cdot 10^{-3}$ mK, dunque si ha;

$$\lambda_{\max} = \frac{2.898 \cdot 10^{-3}}{T} (m)$$

Tramite questa legge è possibile determinare la lunghezza d'onda di picco di qualunque corpo nero ad una certa temperatura (vedi illustrazione seguente). Se si pensasse di passare alla relazione per la frequenza usando la relazione $c = \lambda \nu$ si incapperebbe in un "fatal error", come discusso più avanti.



Qui sotto invece è rappresentato il grafico del corpo nero ideale, quello reale solare al di sopra dell'atmosfera e di quello che arriva al suolo.



Viceversa dal colore emesso dal corpo nero (cioè dalla frequenza corrispondente) si può dedurre la sua temperatura. Ad esempio dal colore del Sole si può dedurre il picco di emissione (la frequenza del giallo/rosso) e quindi la sua temperatura di circa 5780 K.

Dallo spettro risultava anche evidente che al crescere della temperatura aumenta la quantità dell'energia irradiata che corrisponde all'area sottesa al grafico della "campana".

Lo spettro del corpo nero è quindi uno spettro continuo (cioè assume valori su tutte gli infiniti valori reali delle frequenze) con la tipica forma, come già detto, a "campana" dove il picco di emissione è determinato dalla legge di Wien.

Come si nota dal grafico più è bassa la temperatura più è alta la lunghezza d'onda del massimo della radiazione, senza nessun limite, se non lo zero assoluto, che non può essere raggiunto per il terzo principio della termodinamica. Un corpo nero può benissimo emettere ad esempio onde radio, con lunghezza d'onda da un 1 cm, se la sua temperatura è di 0,3 K, o raggi gamma, con lunghezza d'onda di 1 pm, se la sua temperatura è di 3 miliardi di gradi.

A tal proposito si veda quanto detto dell'osservazione finale di questo articolo.

Per avere una idea delle temperature presenti nel cosmo diciamo che il nucleo di una stella "media" come il nostro Sole, arriva a 15 milioni di gradi, (la temperatura più alta "prodotta" dall'uomo è quella necessaria per l'innesco di una bomba H, circa 300 milioni di gradi, che si ottiene facendo esplodere al centro della massa della bomba H una bomba a fissione, mentre negli esperimenti sulla fusione controllata di tipo tokamak ST40 nel 2022, si è raggiunta una temperatura di 100 milioni di gradi); stelle più massicce di quelle "medie" hanno temperature nel nucleo di 600 milioni di gradi, ma le temperature più alte nel cosmo si raggiungono nei nuclei delle Supernove, dove si arriva ad alcuni miliardi di gradi.

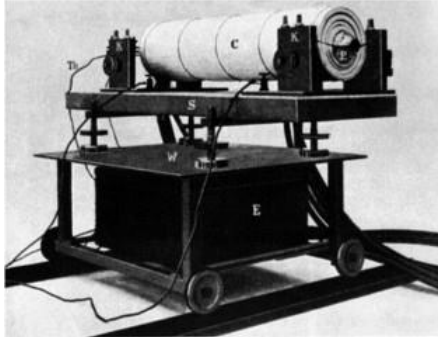
Gustav Kirchhoff stabilisce che a parità di frequenza e temperatura, materiali diversi si comportano in modo simile. Viene dunque ipotizzato che la radiazione di corpo nero sia una proprietà indipendente dalle proprietà del contenitore, e dunque di interesse generale.

Il termine ed il concetto di corpo nero, furono introdotti per la prima volta proprio da Kirchhoff nel 1860. In particolare, egli dimostrò che il rapporto tra potere emissivo e potere assorbente di un corpo, definisce una funzione che dipende esclusivamente dalla frequenza e dalla temperatura e per questo detta funzione universale $u(\nu, T)$ che risulta quindi indipendente dalla natura e dalla forma dei corpi:

$$\frac{e(\nu, T)}{a(\nu, T)} = u(\nu, T)$$

La funzione $u(\nu, T)$ deve essere una funzione universale di T e ν (indipendente cioè da come è fatta la cavità: forma, materiali ecc....), altrimenti si violerebbe il secondo principio della termodinamica. Infatti se così non fosse, tra due cavità in contatto ottico (con un filtro F selettivo alla frequenza ν_0), inizialmente alla stessa T , ci sarebbe flusso di calore verso la cavità dove $u(\nu_0, T)$ è minore. Questo provocherebbe un riscaldamento di questa cavità, col che saremmo riusciti a spostare calore da un corpo più freddo ad uno più caldo come unico risultato di una trasformazione.

Kirchhoff, poi, definì corpo nero un corpo il cui potere assorbente è pari a 1, per ogni temperatura e frequenza. Da ciò segue che, la funzione universale $u(\nu, T)$ descrive proprio il potere emissivo di un corpo nero.



*Der electrisch geblähte „absolut schwarze“ Körper
und seine Temperaturmessung;
von O. Lummer und F. Kurlbaum.
(Vorgängen in der Sitzung vom 6. Mai 1898.)*

Apparato sperimentale di un corpo nero utilizzato da Lummer e Kurlbaum del 1898 costituito da un foglio di platino all'interno di un tubo di ceramica.

4 La formula di Rayleigh-Jeans

Al fine di determinare la forma della funzione universale, si possono percorrere due strade. La prima si basa sul principio di equipartizione dell'energia: si considera la radiazione presente all'interno della cavità (per unità di volume) e poi si valuta il numero dei gradi di libertà posseduta dalla radiazione avente frequenza compresa fra ν e $\nu + d\nu$, assegnando ad ogni grado di libertà un'energia cinetica pari a $\frac{1}{2} kBT$; questo metodo consentirà una immediata generalizzazione al caso quantistico. La seconda suppone che le molecole delle pareti si comportino come dipoli oscillanti (ovvero che dentro la cavità sia contenuto un sistema di dipoli oscillanti) e calcolare lo spettro dalla condizione che all'equilibrio ogni dipolo emetta ad ogni frequenza tanta energia quanta ne assorbe.

Calcolo basato sul principio di equipartizione dell'energia

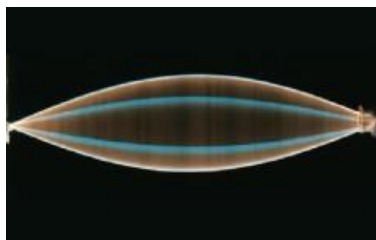
Descriviamo dapprima l'approccio classico di Rayleigh e Jeans. Si considera il corpo nero come una cavità, le cui pareti sono formate da oscillatori armonici, la *densità di energia* (J/m^3) in essa contenuta $u(\nu)$, *nell'intervallo di frequenza compreso tra ν e $\nu + d\nu$* , è

$$u(\nu) d\nu = \epsilon_{ave} N(\nu) d\nu$$

dove ϵ_{ave} rappresenta *l'energia media degli oscillatori* delle pareti della cavità, in risonanza con la frequenza ν e $N(\nu)d\nu$ è il numero dei modi di oscillazione delle onde stazionarie (per unità di volume) tra ν e $\nu + d\nu$ all'interno della cavità, che si assume di forma cubica di lato L .

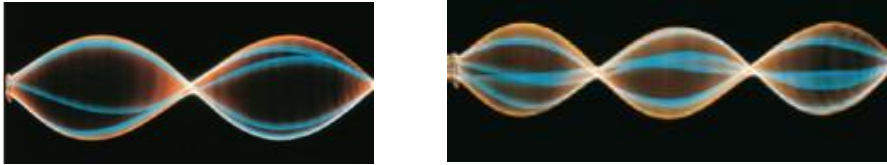
Piccola scheda sul significato di modi di oscillazione di un'onda stazionaria.

Pensiamo per esemplificare ad una corda di chitarra pizzicata al suo centro, si ottiene un moto come quello mostrato nella figura seguente.



Questa onda stazionaria ha sempre due punti fissi – detti nodi – che sono posizionati alle estremità della corda; tutti gli altri punti della corda si muovono ognuno di moto armonico in su e in giù lungo l'asse y (verticale), e rimanendo sempre nello stesso punto dell'asse x (orizzontale). Inoltre hanno

tutti la stessa frequenza e si muovono in fase, cioè raggiungono insieme sia il punto di massimo della propria oscillazione che di minimo. Pizzicando opportunamente la corda si ottengono altre modalità di oscillazione aventi un numero di nodi maggiore di quello fondamentale precedente. Per esempio si possono ottenere le seguenti situazioni:



La prima ha tre nodi, mentre la seconda ha quattro nodi. Ciascuna di queste particolari onde rappresenta un modo normale di oscillazione della corda.

Def. Si chiamano modi normali di oscillazione le onde stazionarie in cui tutti i punti della corda oscillano di moto armonico con la stessa frequenza.

Questa definizione è valida per tutti i tipi di onde, e si estende immediatamente al caso delle onde elettromagnetiche ove si sostituisca la parola corda con quella di campo (elettrico e magnetico).

Affinché si instaurino onde stazionarie, bisogna richiedere che queste abbiano nodi alle estremità del cubo e, quindi, che nelle tre direzioni devono essere contenute un numero intero di semi-lunghezze d'onda:

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{2L}{\lambda}, & n_x &= 1, 2, 3, \dots \\ n_y &= \frac{2L}{\lambda}, & n_y &= 1, 2, 3, \dots \\ n_z &= \frac{2L}{\lambda}, & n_z &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Ogni terna $(n_x; n_y; n_z)$ corrisponde ad un possibile modo di un'onda stazionaria nella cavità. Perciò, possiamo considerare lo spazio tridimensionale degli interi $(n_x; n_y; n_z)$, in cui ogni punto è posto in corrispondenza biunivoca con un'onda stazionaria permessa. Il numero di onde stazionarie permesse nell'intervallo di lunghezza d'onda $[\lambda; \lambda + d\lambda]$, quindi, è uguale al numero di punti, a coordinate intere, nell'ottante positivo del guscio sferico compreso tra n e $n + dn$, con

$$n = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{1/2}$$

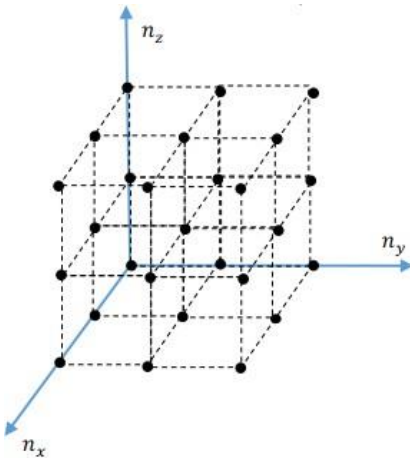


Fig. 1

Dal momento che il numero di modi è molto grande, lo spazio può essere considerato come continuo, perciò, il numero di punti a coordinate intere, nell'ottante positivo del guscio sferico, ben approssima il volume del guscio.

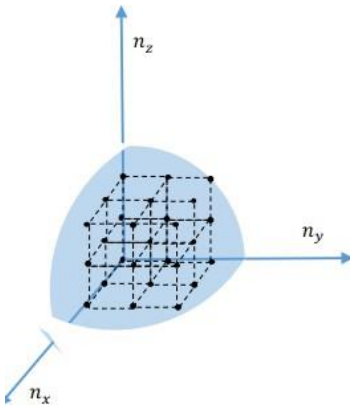


Fig. 2

Da ciò segue che il numero di onde stazionarie permesse è

$$dN = 2 \frac{1}{8} 4\pi n^2 dn$$

dove il fattore 2 tiene conto dei due possibili stati di polarizzazione delle onde. Ricordando che

$$n = \frac{2L}{\lambda} = \frac{2Lv}{c} \quad dn = \frac{2L}{c} dv$$

si ha

$$N(v)dv = \frac{8\pi L^3}{c^3} v^2 dv$$

La densità dei modi vibrazionali permessi si ottiene dividendo l'espressione precedente per il volume della cavità, ottenendo

$$N(\nu) d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu$$

Adesso non rimane che calcolare l'energia media degli oscillatori, a tal fine viene utilizzata la distribuzione di Boltzmann che afferma che la probabilità che un oscillatore abbia energia compresa fra ϵ e $\epsilon + d\epsilon$ è

$$f(\epsilon) = Ce^{-\beta\epsilon}$$

dove C è una opportuna costante e $\beta = 1/k_B T$ con k_B costante di Boltzmann, da ciò segue che il valor medio dell'energia è

$$\epsilon_{ave} = \frac{\int_0^{\infty} \epsilon f(\epsilon) d\epsilon}{\int_0^{\infty} f(\epsilon) d\epsilon}$$

Per cui sostituendo l'espressione della funzione nella precedente si ha

$$\epsilon_{ave} = \frac{\int_0^{\infty} \epsilon e^{-\beta\epsilon} d\epsilon}{\int_0^{\infty} e^{-\beta\epsilon} d\epsilon}$$

Ricordando che la seguente proprietà matematica:

$$\frac{d}{dx} \log(f(x)) = \frac{1}{f(x)} f'(x)$$

si ha che

$$\begin{aligned} -\frac{d}{d\beta} \log \left[\int_0^{\infty} e^{-\beta\epsilon} d\epsilon \right] &= -\frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-\beta\epsilon} d\epsilon} \frac{d}{d\beta} \int_0^{\infty} e^{-\beta\epsilon} d\epsilon = -\frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-\beta\epsilon} d\epsilon} \int_0^{\infty} \frac{d}{d\beta} e^{-\beta\epsilon} d\epsilon = \\ &= -\frac{\int_0^{\infty} -\epsilon e^{-\beta\epsilon} d\epsilon}{\int_0^{\infty} e^{-\beta\epsilon} d\epsilon} = \frac{\int_0^{\infty} \epsilon e^{-\beta\epsilon} d\epsilon}{\int_0^{\infty} e^{-\beta\epsilon} d\epsilon} = \epsilon_{ave} \end{aligned}$$

Dunque sfruttando questa uguaglianza possiamo scrivere

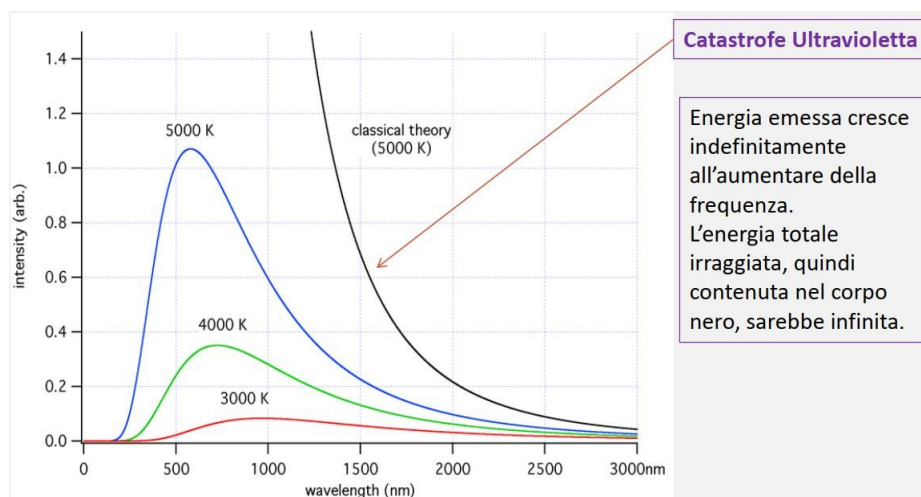
$$\varepsilon_{ave} = - \frac{d}{d\beta} \log \left[\int_0^{\infty} e^{-\beta \varepsilon} d\varepsilon \right] = - \frac{d}{d\beta} \log \left[-\frac{1}{\beta} e^{-\beta \varepsilon} \right]_0^{\infty} = - \frac{d}{d\beta} \log \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta} = k_B T$$

Questo risultato è noto come teorema dell'equipartizione dell'energia. Siamo ora in grado di scrivere il risultato del nostro calcolo noto come formula di Rayleigh-Jeans che descrive l'andamento della densità (spetttrale) dell'energia

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} k_B T \nu^2$$

Dove si è introdotta la variabile temperatura nello scrivere la densità di energia, perché dal calcolo dell'energia media degli oscillatori è venuto fuori che essa dipende anche da T, quindi la densità di energia dipende in effetti a due variabili: frequenza e temperatura. Come si vedrà più avanti la stessa radiazione presente nella cavità potrà essere immaginata come composta da un insieme di "oscillatori".

Questa legge risulta in accordo con i risultati sperimentali per grandi lunghezze d'onda (o basse frequenze), mentre si discosta completamente per piccole lunghezze d'onda (o alte frequenze). La formula, infatti, prevede una densità di energia infinita per la frequenza che tende ad infinito e, quindi, emissioni altissime per lunghezze d'onda corrispondenti all'ultravioletto e ai raggi X. Questo problema, noto come "catastrofe ultravioletta", (vedi figura seguente) fu risolto da Planck nel 1900.



La prima parte del calcolo poteva svolgersi anche nel seguente modo.

Pensiamo alla cavità di forma cubica avente lato $L = 2a$

Le onde elettromagnetiche devono essere stazionarie e se pensiamo in una sola dimensione la condizione da imporre è

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} = \frac{2 \cdot 2a}{n} = \frac{4a}{n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

Ora anziché ragionare in termini della frequenza utilizziamo la pulsazione dove $\omega = 2\pi\nu$

ma d'altronde la velocità dell'onda è legata alla frequenza ed alla lunghezza d'onda tramite la seguente relazione $c = \nu \lambda$, quindi possiamo mettere in relazione la frequenza e con la lunghezza d'onda $\nu = c/\lambda$ ed inserendo la relazione precedente in questa relazione abbiamo i valori permessi della frequenza (che sono infiniti)

$$\nu_n = \frac{c}{4a} n \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (1)$$

Per passare al caso tridimensionale consideriamo un'onda diretta lungo l'asse x – pensiamo agli assi orientati lungo tre spigoli del cubo – sia $\mathbf{E}(x,t)$ il suo campo elettrico. L'onda avrà due stati di polarizzazione lungo y oppure lungo z , ma per ora consideriamo un solo stato, ad esempio lungo y , poi alla fine quando faremo il conto del numero dei gradi di libertà moltiplicheremo per 2. Dunque le condizioni al contorno impongono che sia $E_y = 0$ (ed anche $E_z = 0$) per $x = 0$ e per $x = 2a$.

L'onda può allora essere scritta come prodotto di una parte spaziale ed una temporale

$$E_y(x,t) = E_{0y} \sin(kx) \sin(\omega t); \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1')$$

Per soddisfare le condizioni al contorno l'onda deve annullarsi oltre che per $x = 0$ (cosa garantita dal fattore $\sin(kx)$), anche per $x = 2a$ e ciò comporta che sia

$$\begin{aligned} k(2a) &= n\pi; \quad \frac{2\pi}{\lambda} (2a) = n\pi \\ \lambda_n &= \frac{4a}{n} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (2)$$

In generale per un'onda orientata in direzione qualunque, scelto lo stato di polarizzazione, potremo scrivere le sue componenti secondo le diverse direzioni di vibrazione nella forma

$$\begin{aligned} E_y(x,t) &= E_{0y} \sin(k_x x) \sin(\omega t) & k_x &= \frac{2\pi}{\lambda} \cos \alpha \\ E_z(y,t) &= E_{0z} \sin(k_y y) \sin(\omega t) & k_y &= \frac{2\pi}{\lambda} \cos \beta \\ E_x(z,t) &= E_{0x} \sin(k_z z) \sin(\omega t) & k_z &= \frac{2\pi}{\lambda} \cos \gamma \end{aligned}$$

dove i tre coseni sono i coseni direttori del vettore d'onda $\mathbf{k}$ secondo i tre angoli che esso forma con gli assi. Le condizioni al contorno impongono che sia

$$\begin{aligned} k_x(2a) &= n_1\pi & (4a/\lambda) \cos\alpha &= n_1 & n_1 &= 1, 2, 3, \dots \\ k_y(2a) &= n_2\pi & \rightarrow & & (4a/\lambda) \cos\beta &= n_2 & n_2 &= 1, 2, 3, \dots \\ k_z(2a) &= n_3\pi & & & (4a/\lambda) \cos\gamma &= n_3 & n_3 &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Quadrando e sommando otteniamo la condizione che deve essere soddisfatta da λ per garantire le richieste condizioni al contorno

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = (4a/\lambda)^2 (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = \frac{16a^2}{\lambda_n^2}$$

$$\lambda_n = \frac{4a}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \quad (3)$$

Che rappresenta l'estensione tridimensionale della (2).

Tenuto conto che $\lambda v = c$, per la frequenza si ha

$$v_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{c}{4a} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \quad (4)$$

Che rappresenta l'estensione tridimensionale della (2).

Da ciò segue che se $\mathbf{r}$ è il vettore posizione nello spazio delle fasi che individua in coordinate cartesiane i numeri interi positivi n_1, n_2, n_3 , - cioè $r = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{1/2}$ (5) - i modi di vibrazione permessi per la radiazione sono rappresentati dai punti posti ai vertici del reticolo con coordinate intere positive, cioè giacenti nell'ottante positivo. Si nota che la densità dei punti reticolari è di un punto per unità di volume (ogni celletta cubica condivide con i suoi vicini 8 vertici (punti)), per cui il numero $N(r) dr$ dei modi di vibrazione corrispondenti ad un valore di r compreso fra r e $r + dr$ è pari semplicemente al volume della porzione di guscio sferico di raggio r e spessore dr contenuta nel primo ottante, cioè si ha (si vedano le figure (1) e (2) precedenti):

$$N(r) dr = \frac{\pi}{2} r^2 dr$$

Tenendo conto della (5) la (4) può essere scritta nel seguente modo $v_n = \frac{c}{4a} r$

da cui differenziando $dv = \frac{c}{4a} dr$

quindi il numero dei modi di vibrazioni permessi, contenuti dell'intervallo di frequenza fra ν e $\nu + d\nu$ è

$$N(\nu) d\nu = \frac{\pi}{2} \left(\frac{4a}{c} \right)^3 \nu^2 d\nu$$

Ricordando che il volume della cavità è $V = (2a)^3$

$$N(\nu) d\nu = \frac{8\pi V}{2 c^3} \nu^2 d\nu = \frac{4\pi}{c^3} V \nu^2 d\nu$$

Ed infine occorre dividere per V in modo da riferirsi all'unità di volume e moltiplicare per 2 ricordandosi dei due modi possibili della polarizzazione: in definitiva otteniamo per la densità dei modi vibrazionali permessi

$$N(\nu) d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu \quad (6)$$

Per completare il discorso occorre moltiplicare questo valore per l'energia media assegnata ad ogni grado di libertà dal principio di equipartizione dell'energia, che in questo caso trattandosi di oscillazioni oltre al contributo $\frac{1}{2}kT$ dovuto all'energia cinetica occorre sommare anche il contributo $\frac{1}{2}kBT$ dovuto all'energia potenziale. In definitiva otteniamo per la **densità di spettrale dell'energia** quella che è nota come formula di **Rayleigh-Jeans**:

$$du = f(\nu) d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 k_B T d\nu$$

ossia:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 k_B T \quad (7)$$

Oppure richiamando la formula del potere emissivo si ha

$$\varepsilon(\nu) = \frac{c}{4} \frac{f(\nu) d\nu}{\nu^2} = \frac{2\pi}{c^2} k_B T \nu^2 d\nu \quad (7')$$

Per ottenere la radiazione totale emessa dal corpo nero occorre integrare l'espressione precedente:

$$I_{totale} = \int_0^{\infty} \varepsilon(\nu) d\nu = \int_0^{\infty} \frac{2\pi}{c^2} \nu^2 k_B T d\nu = \frac{2\pi}{c^2} k_B T \int_0^{\infty} \nu^2 d\nu = \infty$$

Come si vede la funzione universale trovata basandosi sulla fisica classica porta ad un risultato assurdo, una intensità infinitamente grande (catastrofe ultravioletta).

Se si fa il vuoto in un recipiente (cavità) a pareti opache, all'interno di esso resta soltanto la radiazione elettromagnetica creata dalla agitazione termica degli atomi delle pareti questa radiazione devono soddisfare le equazioni di Maxwell dell'elettromagnetismo classico. In particolare il campo elettrico deve soddisfare le equazioni

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (8)$$

dove $c^2 = 1/(\epsilon_0 \mu_0)$

Una volta trovato il campo elettrico, il campo magnetico si ottiene direttamente dalla relazione

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mu_0 - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (9)$$

E' sufficiente quindi risolvere solo la (8).

Siccome la radiazione è confinata in un volume V finito, il campo elettrico deve soddisfare oltre la (1) anche le condizioni al contorno imposte dalle pareti della cavità. Sfruttando il fatto che la funzione universale deve essere indipendente dal materiale della cavità scegliamo per semplicità le pareti conduttrici in modo che la componente parallela di $\mathbf{E}$ e la componente normale di $\mathbf{B}$ alla superficie risultino nulle.

Ricordando la (1') si nota che il campo può essere espresso come prodotto di due funzioni una spaziale ed una temporale, in quanto esse sono disaccoppiate. Cerchiamo dunque una soluzione della (8) del tipo a variabili separate.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = p(t) \mathbf{u}(\mathbf{r}) \quad (10)$$

dove $p(t)$ e $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ sono due funzioni da determinare. Sostituendo solo nella prima delle (8) (la seconda equazione che esprime la divergenza nulla significa solo che il nostro sistema è privo di cariche, infatti stiamo supponendo che nella cavità ci sia il vuoto) si ha

$$p(t) \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) - \frac{1}{c^2} p(t) \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{r})}{\partial t^2} = 0 \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0 \quad (11)$$

dividendo per $p(t)$ otteniamo

$$\nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{r})}{\partial t^2} = 0$$

dividendo ora per $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ si ha

$$\frac{\nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r})}{\mathbf{u}(\mathbf{r})} = \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{p}(t)}{p(t)}$$

Questa uguaglianza può essere verificata solo se entrambi i membri dell'equazione sono costanti.

Infatti il primo membro è una funzione di t, il secondo di x,y,z, se facciamo variare t, ad esempio, il secondo membro non varia; allora anche il primo non deve variare se vogliamo che l'uguaglianza sia soddisfatta. E viceversa se facciamo variare x,y,z.

Per ragione di opportunità, che sarà evidente tra poco, chiamiamo $-k^2$ questa costante che è detta costante di separazione. Allora l'equazione precedente nel seguente sistema

$$\ddot{p}(t) + k^2 c^2 p(t) = 0 \quad (12)$$

$$\nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0 \quad (13)$$

Osserviamo che al fine di avere soluzioni limitate nel tempo deve risultare $k^2 > 0$, si esclude quindi k immaginario, a parte questa restrizione k può essere un qualsiasi numero reale.

La (12) è proprio l'equazione di un oscillatore armonico semplice appena si ponga la pulsazione ω uguale a kc, allora la (12) e (13) divengono:

$$\frac{d^2 p(t)}{dt^2} + \omega^2 p(t) = 0 \quad (\omega = ck; \quad \omega > 0) \quad (14)$$

$$\nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0 \quad (15)$$

L'equazione (14) ha due soluzioni linearmente indipendenti. Come base delle soluzioni possiamo prendere le funzioni seno e coseno, avendosi

$$p(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t \quad (16)$$

Questa soluzione, come noto può anche esprimersi come:

$$p(t) = A \cos(\omega t + \varphi); \quad A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{con } \varphi \text{ una opportuna costante di fase.}$$

oppure usando la notazione esponenziale:

$$p(t) = \text{Re}[A e^{i(\omega t + \varphi)}] \quad (17)$$

L'equazione (15) è detta equazione di Helmholtz, essa va intesa come equazione agli autovalori.

Per mettere in evidenza questo, possiamo riscriverla così:

$$\nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) = -k^2 \mathbf{u}(\mathbf{r})$$

La teoria ci dice che un'equazione siffatta ammette soluzioni solo per certi valori della costante k (oppure di ω) l'insieme di questi valori prende il nome di spettro degli autovalori, che può essere discreto o continuo a seconda del tipo di equazione e di condizioni al contorno. Ad ogni autovalore

corrisponde una o più soluzioni dette autofunzioni. Quando le soluzioni corrispondenti ad uno stesso autovalore sono più di una, si dice che quell'autovalore è degenere.

Occorre dunque trovare quei particolari valori di k e i corrispondenti autovettori $\mathbf{u}=\mathbf{u}(k)$ che soddisfano l'equazione. La teoria mostra la soluzione della (15) è

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = C_3 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + C_4 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (18)$$

dove le costanti possono essere in generale complesse ed arbitrarie e dipendono dalle condizioni al contorno. La teoria mostra che è possibile dimostrare che esiste sempre un insieme di autofunzioni della (15) che sono reali e che soddisfano le condizioni di ortonormalità

$$\int_V \mathbf{u}_a(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_b(\mathbf{r}) dV = \delta_{ab} = \begin{cases} 0 & \text{per } a \neq b \\ 1 & \text{per } a = b \end{cases} \quad (19)$$

E che costituiscono un insieme completo di autofunzioni, nel senso che ogni soluzione della (15) che soddisfi le condizioni al contorno imposte può essere espressa come combinazione lineare di un insieme completo di autofunzioni della (15), ortonormali fra loro, con coefficienti dipendenti dal tempo e soddisfacenti l'equazione (14) con $\omega = \omega_a$:

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \sum_a p_a(t) \mathbf{u}_a(\mathbf{r}) \quad (20)$$

Dove si è introdotta la costante $1/\epsilon_0^{1/2}$ per opportunità. Dunque le funzioni spaziali $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ soddisfano le relazioni di ortonormalità (19) e sono un insieme completo di autofunzioni, aventi gli autovalori ω_a . In accordo con la (9) il campo magnetico è ora

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{c}{\sqrt{\epsilon_0}} \sum_a q_a(t) \nabla \times \mathbf{u}_a(\mathbf{r}) \quad (21)$$

dove i coefficienti q_a sono legati ai coefficienti $p_a(t)$ dalla relazione $\frac{dq_a(t)}{dt} = p_a(t)$, del tutto analoga alla relazione che lega l'impulso allo spostamento di un oscillatore armonico (di massa unitaria). Nel caso del campo elettromagnetico alle autofunzioni $\mathbf{u}_a(\mathbf{r})$ si dà il nome di *modi caratteristici* del campo ed agli autovalori ω_a si dà il nome di *frequenze caratteristiche* dei modi di oscillazione. Le (20) e (21) sono allora gli sviluppi dei campi in termini dei modi caratteristici.

Siamo ora in grado di determinare l'energia totale del campo elettromagnetico all'interno della cavità. Essa è data in accordo con l'elettromagnetismo classico

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 B^2) dV$$

Sostituendo in questa espressione gli sviluppi (20) e (21) si ha

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_a p_a q_a \int_V \mathbf{u}_a(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_b(\mathbf{r}) dV + \frac{c^2}{2} \sum_{a,b} q_a p_a \int_V [\nabla \times \mathbf{u}_a(\mathbf{r})] \cdot [\nabla \times \mathbf{u}_b(\mathbf{r})] dV \quad (22)$$

Adesso occorre un po' di matematica.

Il primo termine an secondo membro si calcola facilmente ricordando le relazioni di ortonormalità (19), e vale semplicemente $\frac{1}{2} \sum_a p_a^2$. Il secondo termine è più ostico ed occorre usare l'identità vettoriale $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b}$, usando la seconda delle (11) e la (15) e l'identità vettoriale $\nabla \times \nabla \times \mathbf{a} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$ si ha

$$(\nabla \times \mathbf{u}_a) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_b) = \nabla \cdot (\mathbf{u}_a \times \nabla \times \mathbf{u}_b) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_b$$

Integriamo ora sul volume V della cavità ed applichiamo il teorema di Gauss

$$\int_V (\nabla \times \mathbf{u}_a) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_b) dV = \frac{\omega^2}{c^2} \int_V \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_b dV + \int_S (\mathbf{u}_a \times \nabla \times \mathbf{u}_b) \cdot \mathbf{n} dS$$

Dove S è la superficie che racchiude il volume V ed n è il versore normale all'elemento di superficie dS. Questo integrale superficiale è nullo, infatti

$$(\mathbf{u}_a \times \nabla \times \mathbf{u}_b) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{n} \times \mathbf{u}_a) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_b) = 0 \quad \text{su } S$$

In virtù delle condizioni di contorno che la componente parallela di **E** e la componente normale di **B** alla superficie risultino nulle che impongono che il campo **E** (e quindi ciascuna delle $\mathbf{u}_a$) sia parallelo alla normale **n**. infine usando le condizioni di ortonormalità abbiamo

$$\int_V (\nabla \times \mathbf{u}_a) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_b) dV = \frac{\omega_b^2}{c^2} \delta_{a,b} \equiv \frac{\omega_a^2}{c^2}$$

Dunque anche le funzioni $\nabla \times \mathbf{u}_a$ sono ortogonali fra loro.

Finalmente possiamo scrivere l'energia totale nel volume della cavità in termini delle funzioni (ancora da determinare) p(t) e q(t):

$$\mathcal{E} = \sum_a \left(\frac{1}{2} p_a^2 + \frac{1}{2} \omega_a^2 q_a^2 \right) \quad (23)$$

Si riconosce immediatamente che l'espressione fra parentesi è proprio l'energia meccanica di un oscillatore, più precisamente è la sua hamiltoniana perché le due variabili sono nello spazio delle fasi.

Questo risultato è molto importante perché mostra che l'energia del campo elettromagnetico può esprimersi come somma di tanti oscillatori armonici semplici (di massa unitaria) di frequenza uguali alle frequenze proprie dei modi della cavità. Questi oscillatori sono tanti quanti i modi caratteristici della cavità e sono completamente disaccoppiati dato che l'energia totale è semplicemente la somma delle energie dei singoli oscillatori e manca ogni termine di interazione. **E' dunque possibile pensare ad un modello che per quanto riguarda l'energia del campo essa sia equivalente alla somma delle energie di un insieme di oscillatori armonici indipendenti.**

Dal punto di vista termodinamico la radiazione nella cavità si comporta come un "gas di oscillatori armonici". Ora ci proponiamo di calcolare esplicitamente le autofunzioni $\mathbf{u}_a(\mathbf{r})$ e le frequenze ω_a .

Il numero dei modi caratteristici (e quindi quello degli oscillatori) in una cavità dipende in generale dalla forma e dalla natura di essa. Dal punto di vista matematico questo equivale a dire che il numero di autofunzioni indipendenti della (15) dipende dalle condizioni al contorno. A temperatura ambiente l'emissione di corpo nero ha un massimo intorno ai 10 μm (infrarosso), quindi praticamente in tutti i casi realizzabili le dimensioni del recipiente sono molto maggiori della lunghezza d'onda della radiazione, è sensato pensare allora che in queste condizioni le condizioni al contorno e al forma del recipiente non abbiano importanza.

Supponiamo allora per semplicità di avere un contenitore cubico di spigolo L e se $L \gg \lambda$ i risultati avranno validità generale. Come condizione al contorno imponiamo che i campi siano periodici. La ragione per cui è comodo imporre le condizioni al contorno periodiche è che i campi possono esprimersi in serie tripla di Fourier e le funzioni $\mathbf{u}_a(\mathbf{r})$ diventano semplici funzioni trigonometriche. Il campo elettrico ad esempio risulta

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{l,m,n} \mathbf{e}_{l,m,n} A_{l,m,n}(t) \cos \left[\frac{2\pi}{L} (lx + my + nz) + \phi_{l,m,n}(t) \right] \quad (24)$$

Dove l, m ed n sono degli interi, $A_{l,m,n}(t)$ e $\phi_{l,m,n}(t)$ funzioni solo del tempo, il versore $\mathbf{e}_{l,m,n}$ dà la direzione della componente di Fourier di indici l, m, n .

Le quantità $A_{l,m,n}(t)$ e $\phi_{l,m,n}(t)$ sono l'ampiezza e la fase del modo di indici l, m, n . E conveniente introdurre il vettore d'onda $\mathbf{k}$ di componenti

$$k_x = (2\pi/L) l; \quad k_y = (2\pi/L) m; \quad k_z = (2\pi/L) n \quad (25) \quad \text{con } l, m, n \text{ interi. Allora la (24) diventa}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{l,m,n} \mathbf{e}_k A_k(t) \cos[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi_k(t)] \quad (26)$$

Dove la somma va fatta su tutti i valori permessi dalla (25). Sostituendo la (26) nell'equazione d'onda (8) si arriva all'equazione agli autovalori analoga alla (15) che fornisce le frequenze dei modi caratteristici: $\omega = c k$ (27) ovvero in termini di l, m, n :

$$\omega^2 = \left(\frac{2\pi c}{L} \right)^2 (l^2 + m^2 + n^2) \quad (l, m, n \in \mathbb{Z}) \quad (28)$$

La (27) viene detta relazione di dispersione delle onde elettromagnetiche nel vuoto. Introducendo la relazione $\lambda = 2\pi/k$ e la frequenza $\nu = \omega/2\pi$ la relazione di dispersione (27) diventa:

$$\lambda \nu = c \quad (29)$$

Il valore di ω può essere qualunque fra zero ed infinito e quindi il numero dei modi dell'onda elettromagnetica confinata in una cavità è infinito. Quello che si può fare è di determinare il numero dei modi che hanno frequenze comprese fra ω e $\omega + d\omega$ o in termini finiti nell'intervallo $\Delta\omega$, cioè la cosiddetta densità dei modi. Per fare questo calcolo osserviamo che dalle (25) segue che il numero dei valori di $\mathbf{k}$ con k_x compreso nell'intervallo Δk_x , k_y compreso nell'intervallo Δk_y , e k_z compreso nell'intervallo Δk_z è dato da

$$\Delta N_k = \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z \quad (30)$$

Si nota per inciso che dall'equazione $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ applicata alla (24) segue la seguente relazione $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_k = 0$ che esprime il fatto che le onde elettromagnetiche sono trasversali ($\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ ortogonali al vettore $\mathbf{k}$, che in un mezzo isotropico definisce la direzione di propagazione dell'onda). Quindi per ogni valore di $\mathbf{k}$ vi sono solo due direzioni indipendenti per $\mathbf{E}$, corrispondenti a due stati di polarizzazione diversi. A ciascun stato di polarizzazione corrisponde una soluzione indipendente delle equazioni di Maxwell e quindi il numero di modi indipendenti N_k con vettori $\mathbf{k}$ compresi in $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$ si ottiene moltiplicando per due la (30) che diventa (essendo $L^3 = V$):

$$\Delta N_k = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z \quad (31)$$

Ma a noi interessa il numero dei modi di ω compreso in un $\Delta\omega$ fissato e la relazione di dispersione (27) mostra che ω dipende solo dal modulo di $\mathbf{k}$ e non dalla sua direzione. E' necessario determinare quindi il numero dei modi della cavità aventi k compreso in un intervallo fissato Δk . Per fare questo osserviamo che la "spaziatura" tra i vettori d'onda appartenenti a due modi contigui (tali cioè che gli indici l, m ed n differiscano di ± 1) vale $2\pi/L$, in accordo con le (25) e quindi per dimensioni del recipiente molto maggiori delle lunghezze d'onda in gioco, risulta $\Delta k/k \approx \lambda/L \ll 1$. In queste condizioni si può pensare che i vettori d'onda $\mathbf{k}$ dei modi abbiano una distribuzione continua. Allora l'elemento di volume dello spazio delle fasi $\mathbf{k}$ è $dk_x dk_y dk_z$ e la (31) diventa

$$dN_k = \frac{2V}{(2\pi)^3} dk_x dk_y dk_z$$

Il numero di modi aventi modulo k compreso nell'intervallo $k, k + dk$ si ottiene immediatamente passando alle coordinate polari ed integrando sull'intero angolo solido, avendosi:

$$dN_k = \frac{2V}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk \quad (\text{modi con } k \text{ entro } dk)$$

Infine il numero di modi con ω compreso fra ω ed $\omega + d\omega$ si ottiene dalla relazione $\omega = ck$, dunque

$$dN_\omega = \frac{2V}{(2\pi)^3} (4\pi) \omega^2 d\omega \quad (\text{modi con } \omega \text{ entro } d\omega)$$

Oppure in termini della frequenza ($\nu = \omega/2\pi$)

$$dN_\nu = \frac{8V\pi}{c^3} \nu^2 d\nu \quad (33)$$

Riassumendo: il campo elettromagnetico in una cavità può essere scomposto in un numero infinito, ma numerabile, di modi caratterizzati dal vettore d'onda $\mathbf{k}$ e dallo stato di polarizzazione. Ad ogni modo caratteristico corrisponde un oscillatore armonico di frequenza legata al modulo di $\mathbf{k}$ dalla relazione di dispersione $\omega = ck$. Questi oscillatori sono indipendenti fra loro. Il numero di oscillatori aventi frequenza compresa tra ν e $\nu + d\nu$ è dato dalla (33)

$$\rho(\nu) = \frac{8V\pi}{c^3} \nu^2 \quad (34)$$

Ad essa viene data il nome di *densità spettrale dei modi*, che come si vede dalla formula cresce con il quadrato della frequenza.

Con questo calcolo termina la trattazione elettromagnetica del campo in una cavità, per completare lo studio occorrerà moltiplicare la densità spettrale dei modi con la loro energia media. Per far questo occorrerà trattare come già anticipato il sistema degli oscillatori come fosse un gas di oscillatori posti in equilibrio termodinamico ad una certa temperatura T .

In termodinamica si chiama "gas" qualsiasi sistema formato da un grande numero di particelle identiche debolmente interagenti tra loro. Consideriamo allora un sistema formato da un numero N molto grande di particelle identiche debolmente interagenti tra loro. Supponiamo di poter numerare gli stati dinamici di ogni singola particella, indicandoli con il pedice s che può assumere un numero discreto o continuo di valori.

Nel caso classico lo stato dinamico di una particella è individuato dal valore delle tre componenti del suo impulso e delle tre componenti della sua posizione. La legge di distribuzione di Maxwell-Boltzmann dice che in condizioni di equilibrio termodinamico il numero medio di particelle in certo

stato s è dato da $n_s = A e^{-\epsilon_s / k_B T}$ (35) dove ϵ_s è l'energia associata allo stato s . La costante A è una

costante di normalizzazione determinata dalla condizione $\sum n_s = N$ dove la somma è chiaramente estesa a tutti i possibili stati dinamici della particella. I numeri n_s vengono chiamati numeri di occupazione dello stato s . La (35) mostra che stati di uguale energia hanno uguali popolazioni, e che stati s ed s' hanno popolazioni che stanno nel seguente rapporto

$$\frac{n_{s'}}{n_s} = e^{-(\varepsilon_{s'} - \varepsilon_s) / k_B T}$$

mentre l'energia totale del gas sarà $\mathcal{E} = \sum_s n_s \varepsilon_s$ e l'energia media riferita ad una singola particella

è

$$\varepsilon_{ave} = \frac{\mathcal{E}}{N} = \frac{\sum_s n_s \varepsilon_s}{\sum_s n_s} = \frac{\sum_s \varepsilon_s e^{-\varepsilon_s / k_B T}}{\sum_s e^{-\varepsilon_s / k_B T}} \quad (36)$$

Osservando che ponendo

$$Z = \sum_s e^{-\varepsilon_s / k_B T}$$

Risulta identicamente per l'energia media della particella

$$\varepsilon_{ave} = k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} (\ln Z)$$

Alla funzione Z viene data il nome di funzione di partizione.

Lo stato di una particella nello spazio delle fasi determinato dalle tre coordinate spaziali e dalle tre coordinate della quantità di moto è individuato da un punto su tale grafico. Siccome gli stati di una particella classica costituiscono un insieme continuo, è necessario passare dalle sommatorie agli integrali aventi elementi di volume $dp_x dp_y dp_z dx dy dz$. Ora andiamo a considerare il nostro caso di N oscillatori armonici classici unidimensionali. Lo stato di ogni singolo oscillatore è determinato da una sola coordinata q e da un solo impulso coniugato p . L'elemento di volume sarà ora $dp dq$, ricordiamo che l'energia di un oscillatore è

$$\varepsilon = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q^2 \text{ dove } \omega \text{ è la pulsazione.}$$

La funzione di partizione diventa

$$Z = \int e^{-\varepsilon / k_B T} d\Gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{p^2 + \omega^2 q^2}{2k_B T}\right] dp dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\omega^2 q^2}{2k_B T}\right) dq \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{p^2}{2k_B T}\right) dp = \frac{2\pi}{\omega} k_B T \quad (37)$$

Avendo usato l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Dunque l'energia media diventa ora

$$\mathcal{E}_{ave} = k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\ln \frac{2\pi}{\omega} k_B T \right) = k_B T^2 \frac{1}{T} = k_B T$$

In base alla meccanica classica l'energia media di ogni oscillatore del gas è $k_B T$.

E' questo un caso particolare del principio di equipartizione dell'energia che afferma che ad ogni termine del tipo ax^2 che compare nell'energia classica di un sistema (espressa in funzione delle coordinate generalizzate p e q) compete in media un'energia termica di $\frac{1}{2} k_B T$. Nel nostro caso di un oscillatore armonico $\frac{1}{2} k_B T$ compete all'energia cinetica e $\frac{1}{2} k_B T$ compete all'energia potenziale.

Ultimo passo per arrivare in vetta. Siccome gli oscillatori del campo elettromagnetico sono indipendenti, è possibile applicare direttamente il teorema dell'equipartizione dell'energia ed affermare che se il campo elettromagnetico è confinato in una cavità alla temperatura T in condizioni di equilibrio termodinamico ad ogni oscillatore è associato una energia media $k_B T$.

Alfine la densità spettrale dell'energia sarà semplicemente il prodotto della densità spettrale dei modi (34) per l'energia associata a ciascun modo dell'oscillatore

$$\rho(\nu, T) = \frac{8V\pi}{c^3} \nu^2 k_B T$$

Ma a noi interessa questa quantità riferita all'unità di volume, dunque finalmente

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 k_B T \quad (38)$$

Riottenendo così per altra via (molto più labriosa) la formula di Rayleigh-Jeans.

Vogliamo concludere mostrando ancora un altro percorso possibile per arrivare a questa formula, questa volta sfruttando il potenziale vettore.

Calcolo basato sul potenziale vettore

Ci proponiamo dunque ancora la densità di energia della radiazione $u(\nu, T)$ in equilibrio termico alla temperatura T . Dividiamo il calcolo in due parti (i) la descrizione della radiazione con la determinazione dei gradi di libertà (ii) la determinazione statistica di equilibrio.

Consideriamo una cavità cubica di lato L e prendiamo un sistema di assi cartesiani con l'origine nel centro del cubo e gli assi paralleli agli spigoli. Il campo elettromagnetico nella cavità può essere descritto dal solo potenziale vettore $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ che obbedisce alla seguente equazione delle onde.

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (39)$$

E alla condizione di gauge (di Coulomb) $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = 0$ (40).

Il campo $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ è definito per x_i appartenente all'intervallo $[-L/2, +L/2]$ e si può quindi sviluppare in serie (tripla) di Fourier, ottenendo

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n_1, n_2, n_3} \mathbf{a}_n(t) \exp \left[i \frac{2\pi}{L} (n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3) \right] \quad (41)$$

Ponendo

$$\mathbf{n} \equiv (n_1, n_2, n_3); \quad \mathbf{k} \equiv \mathbf{k}_n = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}; \quad n_i \in \mathbb{Z}$$

la (41) si può scrivere nella forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n_i = -\infty}^{+\infty} \mathbf{a}_n(t) \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (42)$$

La (39) ci dà per i coefficienti $\mathbf{a}_n(t)$ l'equazione

$$\ddot{\mathbf{a}}_n(t) = -c^2 k^2 \mathbf{a}_n(t) = -\omega^2 \mathbf{a}_n(t) \quad (43)$$

Dove si è posto $\omega = ck$, con $k = |\mathbf{k}|$, la cui soluzione è

$$\mathbf{a}_n(t) = \mathbf{a}_{n+} e^{i\omega t} + \mathbf{a}_{n-} e^{-i\omega t} \quad (44)$$

La condizione che $\mathbf{A}$ sia reale ci dà per la (42) la relazione $\mathbf{a}_n^*(t) = \mathbf{a}_{-n}^*(t)$ da cui per la (44) si ricava

$a_{n+}^*(t) = a_{-n-}(t)$. Ponendo ora $a_{n-}(t) = a_n(t)$; $a_{n+}(t) = a_{-n}^*(t)$ e cambiando nella sommatoria con a_{n+} in a_{-n} , lo sviluppo di $\mathbf{A}$ si può scrivere nella forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n_i=-\infty}^{+\infty} \mathbf{a}_n \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)) + \mathbf{a}_n^* \exp(-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t))$$

Che come si vede è una quantità reale.

A questo punto la condizione di gauge diventa $\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{a}_n = 0$, vale a dire che per ogni terna (n_1, n_2, n_3) , per cui $\mathbf{k} = \mathbf{k}_n$, risulta fissato, $\mathbf{a}_n$ deve essere ortogonale a $\mathbf{k}$. Fissiamo allora nel piano ortogonale a $\mathbf{k}$ una coppia di versori ortogonali $\mathbf{e}_n^{(1)}$ ed $\mathbf{e}_n^{(2)}$, in modo che essi insieme con il versore $\mathbf{k}/k$ formino una terna di versori ortogonali, congruente con quella degli assi coordinati. Allora $\mathbf{a}_n$ si potrà scrivere come combinazione lineare di $\mathbf{e}_n^{(1)}$ e $\mathbf{e}_n^{(2)}$

$$\mathbf{a}_n = \sum_{\lambda=1}^2 \mathbf{a}_n^{(\lambda)} \mathbf{e}_n^{(\lambda)}$$

Allora il campo del potenziale vettore si può scrivere nel seguente modo

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n_i=-\infty}^{+\infty} \sum_{\lambda=1}^2 \mathbf{a}_n^{(\lambda)} \mathbf{e}_n^{(\lambda)} \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) + c.c. \quad (45)$$

Dove c.c. indica il complesso coniugato. Quello della (45) viene chiamato lo sviluppo dei modi normali. Il termine generico dello sviluppo è un'onda piana di ampiezza (complessa) $\mathbf{a}_n^{(\lambda)}$, polarizzazione $\mathbf{e}_n^{(\lambda)}$, vettore di propagazione $\mathbf{k}$ e pulsazione ω .

Le funzioni $\mathbf{e}_n^{(\lambda)} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$ per i dati valori di n e λ sono le soluzioni delle equazioni (39) e (40) ed il loro insieme costituisce una base ortonormale di funzioni, nella quale una generica soluzione $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ può essere sviluppata.

Il fatto che il dominio su $\mathbf{x}$ sia il cubo di volume finito L^3 ha una notevole conseguenza che questa base risulta numerabile. Infatti un elemento della base è caratterizzato dalla quaterna di numeri interi (n_1, n_2, n_3, λ) dove n_i è un intero e $\lambda = 1, 2$. A ogni quaterna corrisponde un grado di libertà, che corrisponde a un modo normale di oscillazione del campo.

Mentre $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ corrisponde a un ben definito sviluppo (45), la radiazione termica della cavità va pensata come una sovrapposizione incoerente di campi, che può essere descritta assegnando ai vari modi di oscillazione solo dei pesi statistici, che saranno fissati dalle leggi della meccanica statistica.

Dato che i gradi di libertà sono del tutto indipendenti fra loro e supponendo che a modi di oscillazione con la stessa frequenza corrisponda in media la stessa energia, la densità (spettrale) di energia $u(\nu, T)$ si potrà scrivere come prodotto di due fattori

$$u(\nu, T) = \rho(\nu) w(\nu, T) \quad (46)$$

dove

$$\rho(\nu) = \frac{dN}{dV d\nu}$$

rappresenta il numero di modi di oscillazione per unità di volume e per unità di intervallo di frequenza e $w(\nu, T)$ è l'energia media che compete a un singolo modo di oscillazione con frequenza ν , all'equilibrio termico alla temperatura T .

Il calcolo per determinare $\rho(\nu)$ e $w(\nu, T)$ è del tutto analogo a quello effettuato precedentemente, avendosi

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2; \quad w(\nu, T) = k_B T$$

Riottenendo così ancora una volta la formula di *Rayleigh-Jeans*

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} k_B T \nu^2$$

5 La legge di Plank

La soluzione del problema dello spettro del corpo nero fu data da Plank nel 1900 con l'introduzione dell'ipotesi della quantizzazione dell'energia, dando così inizio alla Meccanica quantistica. Egli suppose che lo scambio di energia fra la radiazione e le pareti della cavità non avvenga con continuità, ma per quantità discrete, i famosi quanti di energia. Questo corrisponde a supporre che l'energia di ciascun oscillatore possa assumere solo valori discreti. In particolare Plank ipotizzò che i valori dell'energia di un oscillatore di frequenza ν siano dati dalla formula $E_n = nh\nu$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) dove h è una opportuna costante che prenderà il nome "costante di Plank" e vale $h = 6.63 \cdot 10^{-34}$ Js.

La probabilità che un oscillatore, in equilibrio termodinamico alla temperatura T , abbia energia pari ad E_n è data dalla distribuzione di Boltzmann

$$P_n = Ae^{-\beta E_n} = Ae^{-\beta nh\nu} \quad \text{con} \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

dove A è la costante di normalizzazione, per cui deve valere

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = A \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta h\nu} = 1$$

Sommando la serie geometrica si ottiene $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta h\nu} = \frac{e^{\beta h\nu}}{e^{\beta h\nu} - 1} = \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}}$ e la costante vale

$$A = 1 - e^{-\beta h\nu}$$

dunque la probabilità diventa

$$P_n = (1 - e^{-\beta h\nu}) e^{-n\beta h\nu}$$

Ricordando che l'energia media è definita da

$$E_{ave} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} n_i E_i}{\sum_{i=0}^{\infty} n_i} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} E_i e^{-nh\nu/k_B T}}{\sum_{i=0}^{\infty} e^{-nh\nu/k_B T}} = k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} (\ln Z)$$

Dove n_i è la popolazione dello stato dinamico i -esimo e Z è la funzione di partizione

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta h\nu} = \frac{e^{\beta h\nu}}{1 - e^{\beta h\nu}} = \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}}$$

e non è più lecito ora il passaggio (che avevamo fatto nel calcolo precedente) all'integrazione,

$$\begin{aligned} E_{ave} &= k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} (\ln Z) = k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\ln \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}} \right) = k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} [\ln (1 - e^{-\beta h\nu})^{-1}] = -k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln (1 - e^{-\beta h\nu}) = \\ &= -k_B T^2 \left(- \frac{h\nu / k_B}{T^2 (e^{h\nu / k_B T} - 1)} \right) = \frac{h\nu}{e^{h\nu / k_B T} - 1} \end{aligned}$$

$$E_{ave} = \frac{h\nu}{e^{h\nu / k_B T} - 1} \quad (47)$$

Questa è una formula statistica, nel senso che è il prodotto dell'energia di un oscillatore ($h\nu$) per il numero di occupazione media degli oscillatori relativa a quel particolare valore della temperatura.

$$E_{ave} = n_{ave} h\nu = \frac{1}{e^{h\nu / k_B T} - 1} h\nu$$

Dove n_{ave} è proprio il numero di occupazione medio dovuto alla **statistica di Bose-Einstein**, valida per i bosoni (particelle a spin intero o nullo, come i fotoni).

Dunque, ricordando che la densità spettrale dei modi vale (per unità di volume)

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2$$

e che la densità di energia specifica è $u(\nu, T) = E_{ave} \rho(\nu)$, si ha

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu / k_B T} - 1} \quad \text{formula di Planck}$$

(48)

L'intensità specifica invece vale

$$\varepsilon(\nu, T) \equiv I_\nu(\nu, T) = \frac{c}{4} u(\nu, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu / k_B T} - 1} \quad (49)$$

Verifichiamo che da questa formula è possibile riottenere le leggi empiriche di Stefan-Boltzmann e dello spostamento di Wien.

$$I = \frac{c}{4} \int_0^{\infty} E_{ave} \rho(\nu) d\nu = \int_0^{\infty} u_{ave}(\nu, T) d\nu$$

Dunque

$$\begin{aligned} I &= \frac{c}{4} \int_0^{\infty} u(\nu, T) d\nu = \frac{c}{4} \int_0^{\infty} \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu = \frac{c}{4} \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu = \\ &= \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\pi^4}{15 \left(\frac{h}{k_B T} \right)^4} = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 c^2 h^3} T^4 = \frac{2\pi^5 \cdot (1.38 \cdot 10^{-23})^4}{15 \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \cdot (6.63 \cdot 10^{-34})^3} = 5.67 \cdot 10^{-8} T^4 = \sigma T^4 \end{aligned}$$

Per la verifica della legge dello spostamento di Wien occorre prima ricavare dalla (48) la corrispondente relazione in funzione della lunghezza d'onda. Per far ciò imponiamo l'uguaglianza fra la $u(\nu)$ e $u(\lambda)$ nell'intervallo corrispondente, imponiamo cioè che sia $u(\nu) d\nu = -u(\lambda) d\lambda$, dove abbiamo introdotto il segno meno per tener conto del fatto che la frequenza e la lunghezza d'onda sono inversamente proporzionali, perciò ad un aumento dell'uno corrisponde una diminuzione dell'altro. Derivando la relazione $\nu = c/\lambda$ si ha $d\nu/d\lambda = -c/\lambda^2$, dunque

$$\begin{aligned} u(\nu) d\nu &= -u(\lambda) d\lambda \\ u(\lambda) &= -u(\nu) \frac{d\nu}{d\lambda} = -u(\nu) \left(-\frac{c}{\lambda^2} \right) = \frac{c}{\lambda^2} u(\nu) = \frac{c}{\lambda^2} \frac{8\pi h}{c^3} \frac{(c/\lambda)^3}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} = \frac{8\pi h c}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} \end{aligned} \quad (49')$$

Per ottenere λ_{max} occorre porre uguale a zero la derivata della (49') che riscriviamo ponendo per semplicità $x = hc/\lambda k_B T$

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{8\pi k_B^5 T^5}{c^4 h^4} \frac{x^5}{e^x - 1} = A \frac{x^5}{e^x - 1} \\ \frac{du(x)}{dx} &= -\frac{A(e^x(x-5)+5)x^4}{(e^x - 1)^2} = 0 \end{aligned}$$

$$A(e^x(x-5)+5)x^4 = 0 \rightarrow e^x(x-5)+5 = 0$$

Questa equazione trascendentale si risolve numericamente ottenendo la soluzione banale $x_1 = 0$ che non ha significato fisico e la soluzione

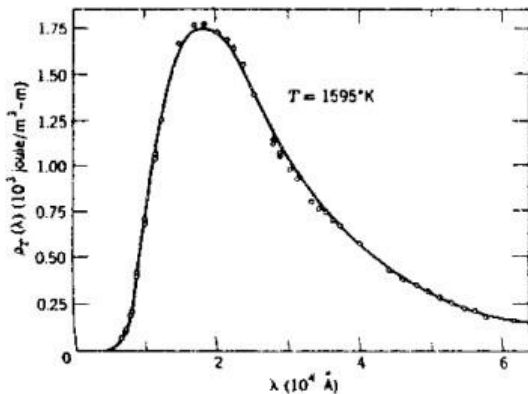
$$x_2 = 4.9651$$

da cui otteniamo

$$x_2 = \frac{hc}{\lambda_{\max} k_B T} \rightarrow \lambda_{\max} = \frac{hc}{x_2 k_B T} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{4.9651 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} T} = 2.89 \cdot 10^{-3} \frac{1}{T} (m)$$

Derivando così per via teorica la dello spostamento di Wien.

Nella figura seguente vediamo l'ottimo accordo fra i dati sperimentali (rappresentati dai puntini) e l'andamento teorico dettato dalla legge di Plank (linea continua).



Osserviamo che per le alte frequenze ($h\nu \gg k_B T$) questa formula si riduce alla seguente

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} h\nu^3 e^{-h\nu/k_B T}$$

Che tende a zero per frequenza infinita, sanando così la “catastrofe ultravioletta”. Alle basse frequenze ($h\nu \ll k_B T$) invece la formula diventa

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 k_B T$$

Ritrovando la formula classica di Rayleigh-Jeans.

Concludiamo con alcuni esempi numerici circa il valore dell'intensità della radiazione di corpo nero su varie frequenze dello spettro elettromagnetico, pensando ad un corpo nero come il Sole, quindi con temperatura (della fotosfera) di circa 6000 K.

$$I(\nu) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

$$\text{Poniamo: } A = \frac{2\pi h}{c^2} = \frac{2\pi \cdot 6.6 \cdot 10^{-34}}{(3 \cdot 10^8)^2} = 4.6 \cdot 10^{-50}; \quad B = \frac{h}{k_B T} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34}}{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 6000} = 7.97 \cdot 10^{-15}$$

e tenendo presente che $e^n = 10^x$; $x = \frac{n}{\ln 10} = \frac{n}{2.3}$ abbiamo:

Onde radio

$$\begin{aligned} I(\nu = 1 \text{ kHz}) &= A \frac{\nu^3}{e^{B\nu} - 1} = 4.6 \cdot 10^{-50} \frac{(10^3)^3}{e^{7.97 \cdot 10^{-15} \cdot 10^3} - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-41}}{e^{-7.97 \cdot 10^{-12}} - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-41}}{3.46 \cdot 10^{-12}} = \\ &= \frac{4.6 \cdot 10^{-41}}{1.00000000000797 - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-41}}{1.00000000000797 - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-41}}{7.97 \cdot 10^{-12}} = 5.8 \cdot 10^{-30} \text{ W / m}^2 \end{aligned}$$

Microonde

$$\begin{aligned} I(\nu = 10^9 \text{ Hz}) &= A \frac{\nu^3}{e^{B\nu} - 1} = 4.6 \cdot 10^{-50} \frac{(10^9)^3}{e^{7.97 \cdot 10^{-15} \cdot 10^9} - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-23}}{e^{7.97 \cdot 10^{-6}} - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-23}}{10^{3.5 \cdot 10^{-6}} - 1} = \\ &= \frac{4.6 \cdot 10^{-23}}{1.0000081 - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-23}}{1.00000000000797 - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-23}}{8.1 \cdot 10^{-6}} = 5.7 \cdot 10^{-18} \text{ W / m}^2 \end{aligned}$$

Infrarosso

$$\begin{aligned} I(\nu = 10^{12} \text{ Hz}) &= A \frac{\nu^3}{e^{B\nu} - 1} = 4.6 \cdot 10^{-50} \frac{(10^{12})^3}{e^{7.97 \cdot 10^{-15} \cdot 10^{12}} - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-14}}{e^{7.97 \cdot 10^{-3}} - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-14}}{10^{3.5 \cdot 10^{-3}} - 1} = \\ &= \frac{4.6 \cdot 10^{-14}}{1.0000081 - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-14}}{1.00000000000797 - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-14}}{8.1 \cdot 10^{-3}} = 5.7 \cdot 10^{-11} \text{ W / m}^2 \end{aligned}$$

Visibile

$$\begin{aligned} I(\nu = 0.5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}) &= A \frac{\nu^3}{e^{B\nu} - 1} = 4.6 \cdot 10^{-50} \frac{(0.5 \cdot 10^{14})^3}{e^{7.97 \cdot 10^{-15} \cdot 0.5 \cdot 10^{14}} - 1} = \frac{0.575 \cdot 10^{-8}}{e^{0.399} - 1} = \frac{0.575 \cdot 10^{-8}}{1.49 - 1} = \\ &= \frac{0.575 \cdot 10^{-8}}{0.49} = 1.1 \cdot 10^{-8} \text{ W / m}^2 \end{aligned}$$

Ultravioletto

$$I(\nu = 10^{15} \text{ Hz}) = A \frac{\nu^3}{e^{B\nu} - 1} = 4.6 \cdot 10^{-50} \frac{(10^{15})^3}{e^{7.97 \cdot 10^{-15} \cdot 10^{15}} - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-5}}{e^{7.97} - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-5}}{2.89 \cdot 10^3} = 1.6 \cdot 10^{-8} \text{ W / m}^2$$

Raggi X, Gamma

$$I(\nu = 10^{20} \text{ Hz}) = A \frac{\nu^3}{e^{B\nu} - 1} = 4.6 \cdot 10^{-50} \frac{(10^{20})^3}{e^{7.97 \cdot 10^{-15} \cdot 10^{20}} - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{10}}{e^{79.7 \cdot 10^5} - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-2}}{5.5 \cdot 10^{34} - 1} = 10^{-3470000} \approx 0 \text{ W / m}^2$$

Osservazione finale:

lo spettro del corpo nero copre tutte le frequenze, ma occorre essere chiari sul significato della formula che dà la radiazione di corpo nero. Si tratta di una informazione statistica, e ad ogni frequenza è legata a due fattori:

- quale è la probabilità che un dato stato quantistico della radiazione elettromagnetica contenga un certo numero di fotoni;
- quanti stati esistono per una data frequenza;

Se la frequenza di un fotone è grande, e quindi l'energia ($E = h\nu$) è grande rispetto a $k_B T$, la probabilità che un fotone possa essere eccitato termicamente diviene esponenzialmente piccola, ma non nulla. In altre parole, in linea di principio esiste sempre la possibilità che un fotone gamma possa essere generato da una fluttuazione termica, ma di fatto è piccolissima, come abbiamo visto nell'esempio numerico.

Cosa è realmente quantizzato?

Planck non credeva in realtà che la quantizzazione riguardasse effettivamente l'energia degli oscillatori, nè tantomeno che riguardasse la radiazione elettromagnetica; credeva piuttosto che ad essere quantizzati fossero gli scambi di energia tra oscillatori e radiazione. *but Planck now introduced the startling assumption that the vibrators did not emit energy in a continuous stream, but by a series of instantaneous gushes (J. Jeans).* Einstein non era dello stesso avviso, pur credendo nella validità della formula, era convinto che la derivazione della formula di Planck contenesse una mostruosa contraddizione, e tentava perciò di darle una diversa interpretazione pensando in particolare alla quantizzazione come ad una proprietà intrinseca della radiazione elettromagnetica. In un lavoro intitolato *Un punto di vista euristico sulla creazione e conversione della luce* (uscito nello stesso anno, 1905, e sulla stessa rivista in cui comparve la teoria della relatività ristretta), Einstein osserva, svolgendo considerazioni di tipo termodinamico, che la formula di Wien per lo spettro del corpo nero, almeno ad alta frequenza dove peraltro funziona bene, suggerisce appunto che la radiazione stessa sia quantizzata e che si comporti come un gas di particelle di energia $h\nu$; queste sarebbero state poi (1926) battezzate fotoni dal chimico statunitense Gilbert N. Lewis. In effetti, partendo da questo assunto, che equivaleva a trasferire alla radiazione le ipotesi di quantizzazione delle energie suggerite da Planck, Einstein mostrerà poco più tardi (1909) che la formula di Planck può essere ricavata studiando le proprietà della sola radiazione elettromagnetica senza bisogno di introdurre i risonatori delle pareti nè tantomeno di dover calcolare, con l'elettromagnetismo classico, i loro scambi di energia con la radiazione.

Il lavoro del 1905 era focalizzato nel mostrare che, con l'idea dei quanti di radiazione, si potevano spiegare meglio le caratteristiche di diversi fenomeni relativi all'interazione radiazione-materia che l'elettromagnetismo classico non riusciva a spiegare. Il punto di forza del lavoro era la brillante interpretazione dell'effetto fotoelettrico, ovvero della produzione di raggi catodici (elettroni) ottenuti illuminando catodi metallici. L'effetto era noto da diverso tempo ma la sua spiegazione lasciava molti punti oscuri. La spiegazione totalmente rivoluzionaria suggerita da Einstein gli fece vincere, nel 1921, il premio Nobel.

A proposito della trasmissione del calore

(e tempo di raffreddamento di una birra)

a cura di Giancarlo Buccella

Il **calore** è una forma di **energia**, così come il **lavoro**, che si trasferisce tra due corpi o sistemi a causa di una differenza di temperatura. Questo trasferimento avviene sempre spontaneamente dal corpo più caldo (a temperatura più alta) verso il corpo più freddo (a temperatura più bassa), fino al raggiungimento di un equilibrio termico.

1. Calore

Definizione: È l'energia che viene trasferita tra due corpi o sistemi a causa di una differenza di temperatura.

Modalità di trasferimento: Avviene sempre da un sistema a temperatura più alta ad uno a temperatura più bassa, secondo il secondo principio della termodinamica.

Esempio: Riscaldare una pentola su un fornello. L'energia viene trasferita sotto forma di calore dal fornello (più caldo) alla pentola e successivamente al cibo al suo interno.

Effetto: Il trasferimento di calore aumenta o diminuisce l'energia interna del sistema, modificando spesso la sua temperatura o il suo stato (ad esempio, da solido a liquido).

Dipendenza: Si verifica solo se esiste una differenza di temperatura.

2. Lavoro

Definizione: È l'energia trasferita al sistema dall'esterno dal sistema all'esterno attraverso forze meccaniche (movimento, compressione, espansione, ecc.).

Modalità di trasferimento: Avviene tramite l'azione di una forza.

Esempio: Sollevare un oggetto contro la forza di gravità, comprimere un gas in un cilindro mediante un pistone.

Effetto: Il lavoro può cambiare l'energia interna del sistema o produrre movimento (energia cinetica).

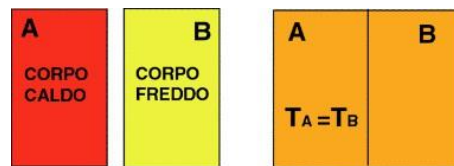
Dipendenza: Richiede l'applicazione di una forza e uno spostamento.

La **trasmissione del calore** (o **scambio termico**) è un fenomeno di trasporto in cui è coinvolta energia termica tra due sistemi, che è causato da una differenza di temperatura tra i due sistemi, da quello caldo a quello freddo.

Lo studio dei fenomeni di trasmissione del calore riguarda tutti quei processi fisici nei quali una certa quantità di energia termica è trasferita da un sistema ad un altro a causa di una differenza di temperatura. Tali processi avvengono in accordo con i principi della termodinamica: quindi per il primo principio, l'energia termica ceduta da un sistema deve essere uguale a quella ricevuta dall'altro e il calore, come afferma il secondo principio, passa dal corpo più caldo a quello più freddo. Tuttavia tra termodinamica e trasmissione del calore c'è una fondamentale differenza. Infatti in ambito termodinamico è irrilevante il tempo necessario affinché un dato processo sia ultimato, in quanto ora, l'oggetto di studio della termodinamica sono i sistemi in equilibrio e le grandezze fisiche in gioco sono considerate indipendenti dal tempo. Nella trasmissione del calore, chiamata anche Termocinetica, ciò che conta è la rapidità in cui avviene il processo di scambio termico. Riveste quindi notevole importanza la quantità di calore scambiata nell'unità di tempo che prende il nome di potenza termica. Essa viene indicata con il simbolo $\dot{Q}$ o semplicemente P (dal contesto si capisce che questa potenza si riferisce a scambi termici) e poiché è una potenza, nel sistema internazionale si misura in watt. Riassumendo, lo scopo della Termocinetica è studiare la velocità di scambio del calore invece della quantità assoluta trasferita in un tempo infinito, come avviene in Termodinamica. La trasmissione del calore avviene spontaneamente solo da un corpo caldo ad un corpo freddo, fino a che i due corpi raggiungono la stessa temperatura, detta di equilibrio termico. Il corpo caldo comunica a quello freddo parte della sua energia termica intensificandone l'agitazione molecolare. La propagazione del calore può avvenire per conduzione, convezione o per irraggiamento

Conduzione

Il trasferimento per conduzione avviene tra corpi che sono a contatto, o tra parti di uno stesso corpo che si trovano a temperature diverse. Esso è causato dal trasferimento di energia cinetica da una molecola a quella adiacente che possiede una velocità di vibrazione minore. Poiché la velocità di vibrazione delle particelle è direttamente proporzionale alla temperatura, il corpo caldo cede energia a quello freddo, aumentandone la temperatura, finché non è raggiunto l'equilibrio termico. Prendiamo ad esempio, come indicato in figura 1a, due corpi a temperature diverse. Una volta posti in contatto, per conduzione il calore fluisce dal corpo più caldo a quello più freddo, finché essi raggiungono una temperatura d'equilibrio

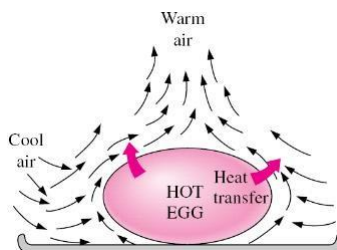


Convezione

La convezione è uno scambio termico tra un solido ed un fluido in movimento che ne lambisce la superficie. La convezione ha luogo quando uno dei due corpi interessati dallo scambio termico è un fluido.

Quando una porzione di fluido si riscalda (ad esempio, vicino a una superficie calda), si espande, riducendo la sua densità. La porzione più calda e meno densa del fluido tende a salire. La porzione più fredda, più densa, scende verso il basso per occupare lo spazio lasciato libero. Questo movimento crea un moto circolatorio nel fluido, chiamato moto convettivo. Tale processo continua finché esiste una differenza di temperatura. In questi casi le forze gravitazionali provocano quindi continui movimenti delle particelle del fluido, con conseguente miscelazione, favorendo pertanto la trasmissione del calore dalle particelle più calde a quelle più fredde. Questo fenomeno prende il nome di convezione naturale.

Quando invece i movimenti delle particelle del fluido sono imposti essenzialmente da cause meccaniche (una pompa, nel caso di circolazione dell'acqua, o semplicemente l'azione del vento), il fenomeno prende il nome di convezione forzata.

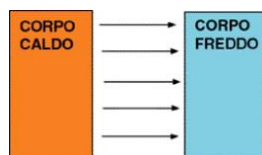


Irraggiamento

Nell'irraggiamento il calore viene scambiato mediante emissione e assorbimento di radiazione elettromagnetica (principalmente in ambito terrestre sotto forma di raggi infrarossi).

- Emissione di radiazione: tutti i corpi con una temperatura superiore allo zero assoluto emettono energia sotto forma di onde elettromagnetiche. La quantità di radiazione emessa dipende dalla temperatura del corpo e dalla sua emissività (quanto bene un corpo emette radiazione, il corpo che emette più di tutti viene detto corpo nero ed ha una emissività pari ad uno, ossia emette tutta la radiazione che riceve).
- Trasferimento dell'energia: l'energia termica si propaga nello spazio sotto forma di radiazioni elettromagnetiche. Queste onde non richiedono un mezzo fisico per propagarsi, quindi l'irraggiamento avviene anche attraverso il vuoto.
- Assorbimento: quando le onde elettromagnetiche incontrano un altro corpo, una parte dell'energia viene assorbita, trasformandosi in calore. La quantità assorbita dipende dalle proprietà del materiale (colore, struttura, emissività) e dall'intensità della radiazione.

Il calore così scambiato aumenta molto rapidamente con la differenza di temperatura. A differenza delle altre due modalità di scambio termico, l'irraggiamento non richiede la presenza di un mezzo perché vi sia trasmissione di energia. La radiazione elettromagnetica che opera da "trasmettitore" di calore, è generata dall'eccitazione termica della superficie del corpo, a sua volta causata dallo stato energetico degli atomi che la costituiscono, ed è emessa in tutte le direzioni.



Resistenza termica

Le considerazioni sulle analogie tra i fenomeni di scambio di calore ed i circuiti elettrici, e in particolare l'esatta corrispondenza tra potenza termica e corrente elettrica, sono del tutto confermate dalla formulazione di una legge fisica chiamata equivalente termico della Legge di Ohm. Essa afferma che la quantità di calore scambiata nell'unità di tempo, ossia la potenza termica, è direttamente proporzionale alla differenza di temperatura che causa lo scambio di calore ed è inversamente proporzionale ad una grandezza che, per analogia con i fenomeni elettrici, viene detta *resistenza termica*.

$$I = \frac{\Delta V}{R_{\text{elettrica}}} \rightarrow P = \frac{\Delta T}{R_{\text{termica}}}$$

Dove ΔT è la differenza di temperatura (positiva) in Kelvin ed R rappresenta la resistenza termica del materiale.

La **resistenza termica** è una grandezza fisica che misura la capacità di un materiale o di un sistema di opporsi al trasferimento di calore. In altre parole, rappresenta l'efficienza con cui un materiale o una struttura limita il flusso di energia termica attraverso di esso.

$$R = \frac{\Delta T}{P}$$

L'analogia che collega tra loro lo studio dei fenomeni termici e di quelli elettrici trae origine dalla similitudine esistente tra le equazioni che li governano: si ha infatti che formalmente alla legge di Fourier corrisponde la legge di Ohm e all'equazione di Fourier l'equazione della distribuzione del potenziale elettrico. La formale eguaglianza tra le equazioni consente di utilizzare alcuni risultati analitici propri della teoria dell'elettricità anche per lo studio della trasmissione del calore. Un tipico esempio si ha nel concetto di resistenza termica che fa sì che, analogamente a quelle elettriche, le resistenze termiche in serie si sommino.

L'esistenza di una tale analogia consente quindi di realizzare modelli elettrici per mezzo dei quali è possibile prevedere il comportamento termico di strutture complesse, che difficilmente potrebbero essere studiate analiticamente.

Nel caso di più strati la R sarà quella totale R_{TOT} andando a distinguere il caso di strati posti in serie da quelli posti in parallelo, Avendosi

Strati in serie $R_{TOT} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$

Strati in parallelo $\frac{1}{R_{TOT}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$

Se il sistema è di tipo misto la resistenza totale è $R_{TOT} = R_{\text{serie}} + R_{\text{parallelo}}$.

Approfondiamo ora la teoria circa le tre modalità di trasmissione del calore.

Conduzione

La conduzione termica è un fenomeno caratteristico dei solidi, benché avvenga anche nei fluidi. L'esperienza mostra che la capacità di trasmissione del calore è una caratteristica intrinseca ai vari corpi e tale capacità descritta attraverso un parametro detto conducibilità termica (o conduttività termica) e viene indicata con la lettera k (o λ) e si misura in W/mK. Ad esempio l'alluminio che è un buon conduttore, ha un valore di $k = 217$ W/mK mentre il legno, che è un cattivo conduttore ha un valore circa mille volte inferiore $k = 0.10$ W/mK.

Ecco una tabella del valore di k per alcuni materiali.

Sostanza	k (W/mK)
Acciaio inox	17
Acciaio laminato	52
Acqua distillata	0.6
Alluminio laminato	290
Argento	460
Aria secca	0.026
Carta	0.15
Diamante	1600
Ghiaccio	2.2÷2.5
Lana di pecora	0.04
Mattoni (pieni, forati)	0.25÷0.90
Legno	0.15÷0.27
Neve (appena caduta)	0.06
Neve (compatta)	0.70
Oro	320
Plexiglass	0.19
Rame	390
Vetro cellulare (tipo particolare di vetro)	0.04
Vetro laminato	1

Equazione della conduzione del calore in forma generale:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{q}{\rho c_p}$$

α è la diffusività termica $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$, ρ è la densità del materiale attraverso cui avviene la conduzione, k è il coefficiente di conducibilità termica e c_p è il calore specifico a pressione costante, mentre q è la generazione di calore (interna al sistema) volumetrica. Nel prosieguo discuteremo solo il caso in cui $q = 0$.

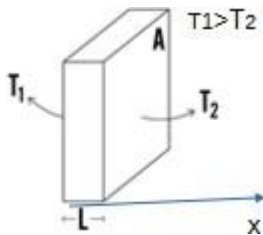
Riferendoci al caso di stazionarietà (quando il campo termico è indipendente dal tempo si dice che la conduzione avviene in *regime stazionario*, mentre se la temperatura è funzione anche del tempo il regime si dice *transitorio*), ed al caso in cui non vi sia generazione di calore interna, l'equazione diventa (equazione di Laplace):

$$\nabla^2 T = 0$$

La **legge fenomenologica di Fourier** permette di calcolare la quantità di calore trasmessa per conduzione all'interno del corpo stesso o fra due o più corpi a contatto fra loro.

Nel caso semplice di conduzione lineare e stazionaria e sezione del solido costante S , il calore trasferito (dQ), nell'unità di tempo (dt), cioè la potenza termica trasmessa, è dato dal prodotto della conducibilità k per la sezione trasversale alla direzione di propagazione S , per la variazione di temperatura (dT) della direzione di propagazione nel solido.

$$\frac{dQ}{dt} \equiv P = -k S \frac{\partial T}{\partial x} \quad (W) \quad (1)$$



Questa legge poneva per la prima volta, introducendo (come l'esperienza mostrava) la presenza del segno negativo al secondo membro, la presenza di una freccia del tempo nella trasmissione del calore (da temperatura maggiore verso temperatura minore e mai viceversa, spontaneamente!).

Successivamente molte leggi furono formulate sulla stessa falsariga del postulato di Fourier, ad esempio la Legge di Fick per la diffusione, la legge di Ampère per la corrente elettrica, la legge di Bernoulli per il moto dei fluidi reali. Tutte queste leggi avevano in comune il legame funzionale fra un flusso (di calore, di massa, di corrente, ...) con una causa prima e cioè una differenza di potenziale (ΔT , ΔV , ΔC , Δp , ...).

Per variazioni finite la legge diventa:

Integrando la (1) su x , in riferimento alla figura di cui sopra, si ha

$$\int_{x_1}^{x_2} P dx = - \int_{T_1}^{T_2} k S dT : P(x_2 - x_1) = -kS(T_2 - T_1) = kS(T_1 - T_2)$$

se indichiamo lo spessore della lastra $x_2 - x_1 = L$ si ha la seguente legge di trasmissione del calore in regime stazionario

$$P = k S \frac{(T_1 - T_2)}{L} \quad (T_1 > T_2) \quad (2)$$

E' utile anche introdurre il flusso per unità di superficie che viene chiamato densità di flusso o intensità di flusso, o semplicemente intensità. Nel caso specifico del trasferimento di calore, viene definito come densità di flusso termico ed è rappresentato con il simbolo q , mentre per le onde si usa parlare di intensità, con simbolo I , esso rappresenta quanta energia nell'unità di tempo attraversa una superficie unitaria posta perpendicolarmente alla direzione di $\mathbf{q}$ (q è in fatti un vettore, come si vede dalla (4)).

Dalla (1) si ha che la densità di flusso termico in forma differenziale è

$$q = \frac{P}{S} = -k \frac{dT}{dx} \quad (3)$$

Nel caso in cui la temperatura dipenda dalle tre coordinate spaziali la legge di Fourier è la seguente:

$$\mathbf{q} = -k\nabla T \quad (4)$$

Facciamo vedere come la (4) sia effettivamente una soluzione dell'equazione di Laplace scritta sopra. Infatti in condizioni di stazionarietà la divergenza di $\mathbf{P}$ deve essere nulla al fine di soddisfare la conservazione dell'energia (non vi deve essere, in altre parole, nessun accumulo di energia nel corpo considerato)

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$$

Sostituendo in questa equazione la (4) si ha

$$\nabla \cdot (-k\nabla T) = 0$$

Se k è costante, come avviene per materiali omogenei l'equazione si semplifica nel seguente modo

$$-k\nabla^2 T = 0$$

dividendo per $-k$ (assumendo k diverso da zero) si arriva all'equazione di Laplace

$$\nabla^2 T = 0$$

Mostrando così come effettivamente la (4) sia una soluzione dell'equazione di Laplace.

Dalla (2) possiamo ricavare l'espressione per la densità di flusso:

$$q = \frac{k}{L} (T_1 - T_2) \quad (T_1 > T_2) \quad (5)$$

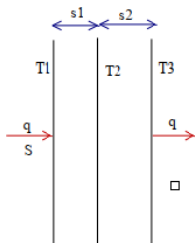
Ricordando la definizione data sopra di resistenza termica, la (4) si può scrivere nel seguente modo

$$q = \frac{(T_1 - T_2)}{R}$$

Si definisce allora la resistenza termica per conduzione con la seguente relazione

$$R_{cond} = \frac{L}{kS} \quad K / W \quad (6)$$

Nel caso di due strati a contatto, di spessore s_1 ed s_2 , come in figura,



la (5) diventa

$$q = \frac{(T_1 - T_3)}{\frac{s_1}{k_1} + \frac{s_2}{k_2}} = \frac{(T_1 - T_3)}{R_1 + R_2}$$

Nel caso di più strati la relazione diventa

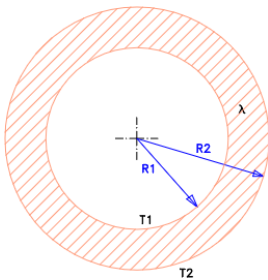
$$q = \frac{(T_1 - T_3)}{\sum_{i=1}^n R_i}$$

Nel caso di una conduzione con geometria cilindrica, applicando la (4), in coordinate cilindriche, si ha

$$P = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{2\pi k L} \log \frac{R}{r}} \quad (T_1 > T_2) \quad (6)$$

Dove L è l'altezza del cilindro, r il raggio interno ed R quello esterno e k la conducibilità del materiale di cui è fatto il cilindro.

Nel caso di una conduzione con geometria sferica (cava) legge di Fourier calcolata in coordinate sferiche porta alla seguente espressione della potenza termica

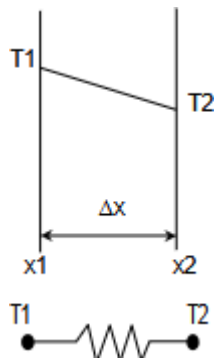


$$P = \frac{4\pi k (T_1 - T_2)}{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}} \quad (T_1 > T_2) \quad (7)$$

Alcuni esempi

1. Determinare il calore trasferito per conduzione (stazionario) attraverso una parete di 10 m^2 di mattoni o acciaio, cello spessore di 30 cm sottoposta da una differenza di temperatura di 20°C . (Conducibilità mattoni $k = 0.465 \text{ W/m}^2\text{K}$, acciaio $k = 45 \text{ W/mK}$).

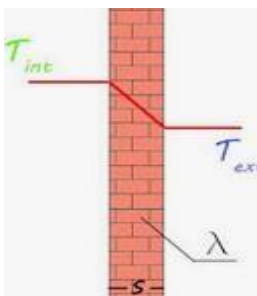
Si può pensare all'analogia elettrica, in cui la resistenza termica vale $R = L/kS$ schematicamente:



$$R = \frac{L}{kS} = \frac{0.3}{0.465 \cdot 10} = 0.0645 \text{ K / W}$$

$$P_{\text{mattoni}} = \frac{\Delta T}{R} = \frac{20}{0.0645} = 310 \text{ W}$$

Si poteva anche applicare direttamente la (2)



$$\text{Mattoni} \quad P = 0.465 \cdot 10 \cdot \frac{20}{0.3} = 310 \text{ W}$$

$$\text{Acciaio} \quad P = 45 \cdot 10 \cdot \frac{20}{0.3} = 30 \text{ kW}$$

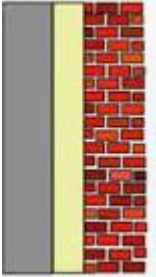
2. La parete di un forno è composta dai seguenti strati

Strato 1: $k_1 = 1.39$ e $s_1 = 30$ cm

Strato 2: $k_2 = 0.21$ e $s_2 = 10$ cm

Strato 3: $k_3 = 0.70$ e $s_3 = 20$ cm

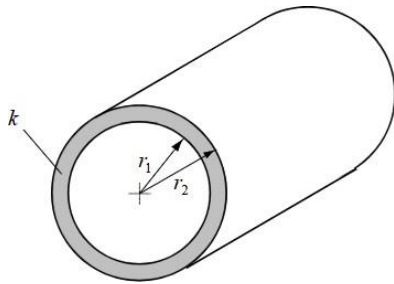
Determinare il calore disperso per unità di area verso l'esterno, con una differenza di temperatura di 400°C .



Usando la relazione vista sopra si ha

$$q = \frac{(T_1 - T_3)}{\frac{s_1}{k_1} + \frac{s_2}{k_2} + \frac{s_3}{k_3}} = \frac{400}{\frac{0.3}{1.39} + \frac{0.1}{0.21} + \frac{0.2}{0.70}} = 409 \text{ W / m}^2$$

3. Un cilindro di rame ha raggio interno di 1 cm ed esterno di 1.8 cm, la superficie interna e quella esterna sono mantenute rispettivamente a 305 K (32°C) e 295 K (22°C) e la conducibilità termica k varia linearmente con la temperatura secondo la legge $k = k_0 (1 + b T_m)$ dove $k_0 = 371.9 \text{ W/mK}$ e $b = -9.25 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. Valutare le perdite di calore per unità di lunghezza. T_m è la temperatura media.



Dalla (7)

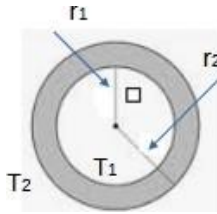
$$\frac{P}{L} = 2\pi k \frac{T_1 - T_2}{\log \frac{R_1}{R_2}} \quad (T_1 > T_2)$$

Con $k_m = k_0 (1 + b T_m)$ essendo $T_m = (T_1 + T_2)/2 = 300 \text{ K}$ si ha

$$k_m = 371.9 (1 - 9.25 \cdot 10^{-5} \cdot 300) = 361.6 \text{ W / mK} \quad \text{quindi}$$

$$\frac{P}{L} = 2\pi \cdot 361.6 \frac{305 - 295}{\log \frac{0.018}{0.010}} = 38.65 \text{ W / m}$$

4. Una sfera cava è composta da un materiale con conducibilità termica k . Il raggio interno della sfera è $r_1 = 0.05 \text{ m}$ e il raggio esterno è $r_2 = 0.10 \text{ m}$. La superficie interna della sfera cava è mantenuta a una temperatura costante $T_1 = 400 \text{ K}$ mentre la superficie esterna è mantenuta a $T_2 = 300 \text{ K}$, sia $k = 15 \text{ Wm}^2\text{K}$. Determinare la distribuzione della temperatura $T(r)$ all'interno dello strato sferico in regime stazionario e calcolare il flusso termico totale (potenza) attraverso la sfera cava.



Occorre utilizzare l'equazione di Laplace in coordinate sferiche, tenendo conto che nella divergenza sopravvive solo il termine radiale

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0 \text{ moltiplicando per } r^2$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0 \rightarrow \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = C_1; \quad \frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r^2} \text{ integrando}$$

$$T(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

Con C_1 e C_2 costanti di integrazione.

Dalle condizioni al contorno ricaviamo le due costanti

Sulla superficie esterna $r = r_2$ la temperatura vale $T(r_2) = T_2$, mentre su quella interna $T(r_1) = T_1$;

$$T(r_2) \equiv T_2 = -\frac{C_1}{r_2} + C_2$$

$$T(r_1) \equiv T_1 = -\frac{C_1}{r_1} + C_2$$

$$T_1 - T_2 = -\frac{C_1}{r_1} + \frac{C_1}{r_2} \text{ da cui}$$

$$C_1 = (T_2 - T_1) \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \text{ che sostituito nell'espressione di } T_1 \text{ ci dà}$$

$$C_2 = T_1 + \frac{(T_2 - T_1) r_2}{r_2 - r_1}$$

Allora la funzione che stabilisce l'andamento della temperatura all'interno della sfera cava in funzione del raggio è

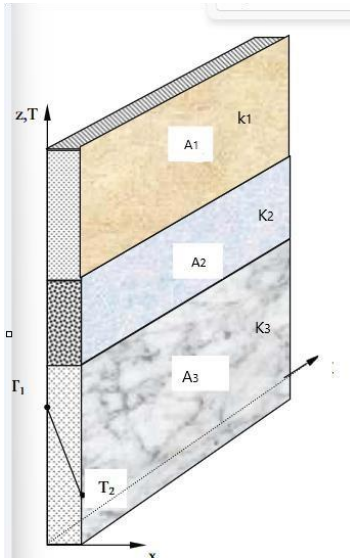
$$T(r) = -\frac{1}{r} \left[(T_2 - T_1) \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \right] + \left[T_1 + \frac{(T_2 - T_1) r_2}{r_2 - r_1} \right] \text{ sostituendo i valori numerici si ha}$$

$$T(r) = \frac{10}{r} + 200 \text{ K}$$

Per il flusso termico usando la (7) si ha

$$P = \frac{4\pi \cdot 15 \cdot 100}{\frac{1}{0.05} - \frac{1}{0.10}} = 1884 \text{ W}$$

5. Una parete a strato singolo può essere costituita da materiali che, pur essendo omogenei ed isotropi, presentano differenti valori della conduttività termica, k_1 , k_2 , e k_3 , come in figura. Si calcoli la potenza trasmessa, essendo la temperatura esterna T_1 e quella interna T_2 .



Il flusso di calore è presente solo lungo la direzione x e sarà la somma dei tre flussi termici che attraversano la parete:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = k_1 A_1 \frac{\Delta T}{s} + k_2 A_2 \frac{\Delta T}{s} + k_3 A_3 \frac{\Delta T}{s}$$

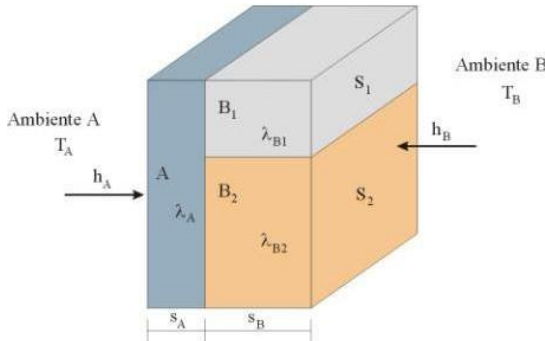
$$R_1 = \frac{s}{k_1 A_1}; R_2 = \frac{s}{k_2 A_2}; R_3 = \frac{s}{k_3 A_3}$$

La potenza termica trasmessa è allora

$$P = \frac{\Delta T}{R_1} + \frac{\Delta T}{R_2} + \frac{\Delta T}{R_3} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \Delta T = \frac{\Delta T}{R_{TOT}}$$

$$\frac{1}{R_{TOT}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

6. Si consideri una parete costituita da un primo strato omogeneo A (acciaio) e da un secondo strato non omogeneo formato dall'alternarsi di due materiali (cemento B₁ e argilla espansa B₂) aventi conducibilità termica differente. Si calcoli la potenza di conduzione termica trasmessa.



Trattiamo il problema in termini di resistenze perché più agevole.

$$P = \frac{\Delta T}{R_{TOT}}$$

$$\text{Resistenza dovuta allo strato A: } R_A = \frac{s_A}{k_1 S}$$

Dove s_A è lo spessore dello strato A k₁ la sua conducibilità ed S la superficie della parete (S = S₁ + S₂).

$$\text{Resistenza cumulata di B}_1 \text{ e B}_2 \text{ posti in parallelo: } \frac{1}{R_{2+3}} = \frac{1}{R_{B_1}} + \frac{1}{R_{B_2}} \text{ cioè } R_{2+3} = \frac{R_{B_1} R_{B_2}}{R_{B_1} + R_{B_2}}$$

Tenendo conto che

$$R_{B_1} = \frac{s_B}{k_{B_1} S_1}; \quad R_{B_2} = \frac{s_B}{k_{B_2} S_2}$$

$$R_{2+3} = \frac{\frac{s_B}{k_{B_1} S_1} \frac{s_B}{k_{B_2} S_2}}{\frac{s_B}{k_{B_1} S_1} + \frac{s_B}{k_{B_2} S_2}} = \frac{\frac{s_B^2}{k_{B_1} S_1 k_{B_2} S_2}}{\frac{s_B}{k_{B_1} S_1} + \frac{s_B}{k_{B_2} S_2}} = \frac{s_B}{\frac{k_{B_1} S_1}{k_{B_2} S_2} + k_{B_1} S_1} = \frac{s_B}{k_{B_2} \frac{S_1}{S_2} + k_{B_1} S_1}$$

$$\text{La resistenza totale è } R_{TOT} = R_A + R_{2+3} = \frac{s_A}{k_1 S} + \frac{s_B}{k_{B_2} \frac{S_1}{S_2} + k_{B_1} S_1}$$

$$\text{LA potenza trasmessa è } P = \frac{\Delta T}{\frac{s_A}{k_1 S} + \frac{s_B}{k_{B_2} \frac{S_1}{S_2} + k_{B_1} S_1}}$$

Convezione

La trasmissione di calore per convezione viene descritto dalla **legge del raffreddamento di Newton**.

La convezione termica è un insieme di fenomeni di trasporto di massa ed energia per mezzo di un fluido riscaldato (o raffreddato) dovuta ad una sommatoria di effetti che portano i fluidi a spostarsi da una zona calda ad una fredda.

La *convezione termica* è un fenomeno complesso dato da un insieme di più fenomeni apparentemente semplici: essa è il risultato del movimento di fluidi (*attivato o non da dispositivi esterni*) che trasportano (dal latino *conveho* trasporto) nel loro movimento energia termica (si pensi ad esempio ai moti convettivi dell'acqua che si riscalda in una pentola o dell'aria calda emessa da un convettore all'interno di una stanza). Si ipotizza che vi sia a contatto della superficie del contenitore e lo strato laminare di aria dove il calore si trasmette per convezione, la cui profondità è nell'ordine dei millimetri. La quantità di calore per unità di tempo che viene scambiata per convezione è descritta dalla legge empirica (detta legge di raffreddamento di Newton) Newton ebbe il grande merito di semplificare la grande complessità del problema scrivendo per la convezione termica la seguente legge:

$$P = h S (T_{\text{solido}} - T_{\text{fluido}}) \quad (8)$$

Dove h è la costante di convezione, P il flusso termico scambiato con l'ambiente (fluido, a temperatura T_{fluido}) e che **funge praticamente da termostato**, ed S è la superficie del corpo considerato attraverso la quale avviene lo scambio termico.

In termini di densità di flusso si ha

$$q = h (T_{\text{solido}} - T_{\text{fluido}}) \quad (9)$$

Ricordando la definizione di resistenza termica si ha

$$R_{\text{conv}} = \frac{1}{hS} \text{ K / W} \quad (10)$$

Newton ha semplificato la definizione analitica di un fenomeno complesso con una semplice introduzione di un *coefficiente di convezione* noto il quale si può conoscere il flusso termico effettivamente scambiato, però a causa della complessità nella determinazione del valore numerico di h esso si può anche definire come un **coefficiente di ignoranza**.

Infatti il coefficiente h non è una proprietà termofisica ma dipende da un grande numero di fattori fra i quali ricordiamo:

- le proprietà fisiche del fluido: densità ρ , viscosità dinamica μ , calore specifico a pressione costante c_p , coefficiente di conducibilità termica k ;
- la differenza di temperatura fra i corpi;
- la velocità del fluido e se vi è convezione naturale o forzata;
- la geometria della parete attraverso cui avviene lo scambio termico.

Quindi non è possibile conoscere il coefficiente di convezione dati i soli parametri fisici del fluido e le temperature di scambio: occorre specificare anche la geometria di scambio ed altri fattori, come elencato sopra, e ciò rende di fatto lo studio della convezione termica molto complesso.

Ecco alcuni valori di h che fungono da cornice al quadro di valori che il coefficiente può assumere.

<i>Convezione naturale</i>	<i>h (W/m²K)</i>
Gas	2 - 25
Liquidi	50 - 1000
<i>Convezione forzata</i>	
Gas	25 – 250
Liquidi	100 - 20000

E' utile introdurre una grandezza adimensionale R_a caratteristica del sistema in oggetto – detta numero di Rayleigh – definito come $R_a = A(T)L^3\Delta T$

Dove ΔT è la differenza di temperatura fra il corpo solido ed il fluido, L è una dimensione caratteristica del sistema e $A(T)$ è una funzione dipendente dalle proprietà fisiche del fluido ed in particolare dalla sua temperatura media.

Ecco alcuni valori di $A(T)$ per l'aria

T (°C)	A(T)
0	1.5
20	1.0
50	0.6
100	0.4

Risulta allora che il coefficiente di convezione h è proporzionale a una potenza del numero di Rayleigh (R_a^n). Valori tipici di n sono nell'intervallo 1/4 (per flussi laminari) a 1/3 (per flussi turbolenti) in convezione naturale.

$$h = \frac{kC}{L} R_a^n$$

dove C ed n sono costanti empiriche che dipendono dalla geometria e dalle condizioni del flusso.

Risulta altresì che è possibile correlare h a R_a attraverso una relazione empirica che coinvolge il numero di Nusselt Nu :

$$Nu = C (R_a)^n$$

dove C è una costante empirica che dipende dalla geometria e dalle condizioni di flusso, in definitiva è possibile esprimere h nel seguente modo:

$$h = \frac{k}{L_c} Nu \quad (11)$$

dove L_c è (per un cilindro) il suo diametro, e k è la conducibilità del fluido.

Empiricamente Nu è legato al valore del numero di Rayleigh, in regime di convezione naturale, nel seguente modo

$$Nu = 0.59 R_a^{0.25}$$

esso risulta avere (come da letteratura), per la condizione vetro-aria, un valore compreso fra 2 e 10.

La (8) diventa quindi

$$P = h S (T_{\text{solido}} - T_{\text{fluido}}) = \frac{k Nu}{L_c} S (T_{\text{solido}} - T_{\text{fluido}}) \quad (12)$$

Si tenga sempre presente che stiamo supponendo la differenza di temperatura costante (caso stazionario).

Se invece la temperatura del solido si raffredda, occorre usare il seguente approccio.

Dalla teoria è noto che il calore che un corpo cede o assorbe dall'ambiente si può scrivere in forma elementare come

$$dQ = mc dT$$

Per i liquidi e i solidi, si usa sempre il calore specifico a pressione costante (c_p) perché i cambiamenti di volume sono minimi e la pressione è tipicamente costante. Quindi si ha

$$dQ = mc_p dT \quad (13)$$

questo calore è esattamente quello che nel nostro modello fluisce essenzialmente per convezione, dunque sostituendo nella (8) si ha

$$\frac{mc_p dT}{dt} = -hS(T_{\text{solido}} - T_{\text{amb}})$$

Ma mentre T_{amb} come già osservato è praticamente la temperatura del termostato rappresentato dall'ambiente interno del frigo, quindi avente una $T = \text{cost}$ ed esattamente nel nostro caso: $T_{\text{amb}} = 5^\circ\text{C}$, T_{solido} è la temperatura del nostro sistema (bottiglia + birra) che va raffreddandosi, quindi è funzione del tempo $T(t)$, allora si ha

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{hS}{mc_p} (T(t) - T_{\text{amb}}) = -K (T(t) - T_{\text{amb}}) \quad (14)$$

Dove si è posto $K = \frac{hS}{mc_p} \quad (15)$

Questa è la legge di raffreddamento di Newton, che può essere applicata in determinati contesti che soddisfano specifiche condizioni. La legge afferma che il tasso di variazione della temperatura di un corpo è proporzionale alla differenza tra la sua temperatura e quella dell'ambiente circostante:

dove:

- T è la temperatura del corpo,
- T_{amb} è la temperatura dell'ambiente circostante (assunta costante),
- h è la costante di scambio convettivo (detta anche coefficiente di conducibilità esterna o di trasporto) che dipende dalle proprietà del materiale e dall'ambiente
- K è la costante di raffreddamento che dipende dalla capacità termica del sistema (mc) dalla superficie di scambio S e dal coefficiente di conducibilità h . Il segno meno indica che la temperatura del corpo diminuisce con il trascorrere del tempo.

Integriamo allora la (13) al fine di avere una legge che descriva l'andamento temporale della temperatura.

$$\int \frac{1}{T(t) - T_{\text{amb}}} dT = -K \int dt$$

$$\log |T(t) - T_{\text{amb}}| = -Kt + C$$

Dove C è la costante di integrazione.

$$|T - T_{\text{amb}}| = e^{-Kt+C} = e^{-Kt} e^C$$

Possiamo togliere il simbolo del valore assoluto in quanto stiamo considerando una differenza di temperatura positiva, e per semplificare poniamo $e^C = C$.

$$T(t) - T_{\text{amb}} = C e^{-Kt}$$

Supponendo che al tempo $t = 0$ il corpo abbia temperatura $T_0 > T_{\text{amb}}$, determiniamo C :

$$T_0 - T_{\text{amb}} = C e^0 = C$$

Quindi la soluzione cercata è

$$T(t) = T_{amb} + (T_0 - T_{amb}) e^{-Kt} \quad T_0 > T_{amb} \equiv T_{fluido} \quad (16)$$

Rimane il problema di determinare il valore della costante di raffreddamento K, innanzitutto si introduce il suo inverso che rappresenta dunque una costante di tempo $1/K = \tau$ (che potremmo chiamare costante di decadimento termico)

$$T(t) = T_{amb} + \Delta T e^{-t/\tau} \quad (17)$$

Essendo, dalla (14): $K = \frac{hS}{mc}$ si ha

$$\tau \equiv \frac{1}{K} = \frac{mc_p}{hS} \quad (18)$$

E' questa relazione che va usata per calcolare il tempo di raffreddamento di un corpo per convezione nel caso non stazionario.

Condizioni per l'applicazione della legge:

1. Differenza di temperatura moderata:

La legge è valida quando la differenza tra la temperatura del corpo e quella dell'ambiente circostante non è eccessiva. Per differenze di temperatura molto grandi, potrebbero entrare in gioco fenomeni come la convezione forzata o l'irraggiamento, rendendo la legge meno accurata.

2. Convezione naturale:

Il corpo perde calore principalmente per convezione naturale (cioè per il movimento naturale del fluido circostante, come aria o acqua) e non per irraggiamento o conduzione predominante.

3. Temperatura dell'ambiente costante:

La temperatura dell'ambiente circostante deve rimanere costante nel tempo, o comunque variare lentamente rispetto al processo di raffreddamento.

4. Trasferimento di calore omogeneo:

Il trasferimento di calore all'interno del corpo (conduzione interna) deve essere abbastanza rapido da garantire che la temperatura del corpo sia uniforme. In altre parole, il corpo deve essere considerato termicamente omogeneo.

5. Fluido circostante in quiete:

Il fluido intorno al corpo (ad esempio l'aria o l'acqua) deve essere in quiete o muoversi lentamente, in modo che il raffreddamento avvenga principalmente per convezione naturale e non forzata.

6. Trascurabilità di altri meccanismi di trasferimento di calore:

L'irraggiamento (trasferimento di calore per onde elettromagnetiche) e la conduzione attraverso un altro mezzo devono essere trascurabili rispetto alla convezione.

Esempi pratici di applicazione:

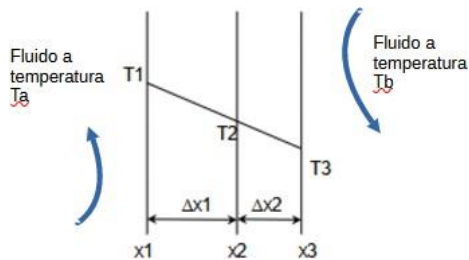
Raffreddamento di una tazza di caffè in una stanza.

Raffreddamento di un oggetto metallico esposto all'aria ambiente.

Calcolo della perdita di calore da una bottiglia di acqua calda immersa in un bagno di acqua fredda.

Alcuni esempi

1. Si abbia uno strato come in figura in cui vi è sia conduzione che convezione stazionario, si trovi l'espressione del flusso termico.



Essendo in condizione di flusso stazionario si ha che i vari flussi fra le diverse zone sono tutti uguali fra loro, cioè si ha

Flusso di scambio convettivo fra il fluido 1 e la parete 1 = Flusso di scambio di conduzione nello strato 1 = Flusso di scambio di conduzione nello strato 2 = Flusso di scambio convettivo fra la parete 2 ed il fluido 2.

$$h_1 S (T_a - T_1) = k_1 S \frac{(T_1 - T_2)}{\Delta x_1} = k_2 S \frac{(T_2 - T_3)}{\Delta x_2} = h_2 S (T_3 - T_b)$$

Con qualche semplice passaggio algebrico si arriva alla seguente espressione

$$q = \frac{T_a - T_b}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{\Delta x_1}{k_1 S} + \frac{\Delta x_2}{k_2 S} + \frac{1}{h_2 S}} = \frac{T_a - T_b}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{T_a - T_b}{R_{TOT}}$$

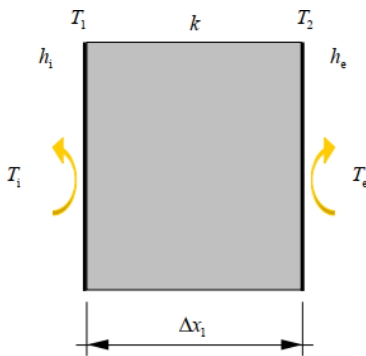
2. Il coefficiente di trasmissione del calore per convezione forzata per un fluido caldo che scorre alla temperatura di 394 K su una superficie fredda vale 227 W/m²K. Sapendo che la temperatura della superficie è 283 K, determinare il flusso termico unitario trasmesso dal fluido alla superficie.



$$P = h(T_f - T_p) = 227(394 - 283) = 25.2 \text{ kW} / \text{m}^2$$

3. Un muro di calcestruzzo spesso 15 cm, con conduttività termica $k = 0.87 \text{ W/mK}$, è esposto dal lato interno ad aria a 25°C e dall'altro ad aria a 0°C . Il coefficiente di scambio termico convettivo per l'aria interna vale $10.46 \text{ W/m}^2\text{K}$ mentre per quella esterna vale $52.3 \text{ W/m}^2\text{K}$. Determinare la densità di flusso termico e la temperatura sulle due facce del muro.

4.



$$q = \frac{P}{S} = \frac{1}{S} \frac{\Delta T}{R_{TOT}} = \frac{1}{S} \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{Sh_i} + \frac{\Delta x}{Sk} + \frac{1}{Sh_e}} = \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{h_i} + \frac{\Delta x}{k} + \frac{1}{h_e}} = \frac{25 - 0}{\frac{1}{52.3} + \frac{0.15}{0.87} + \frac{1}{10.46}} = 87.1 \text{ W/m}^2$$

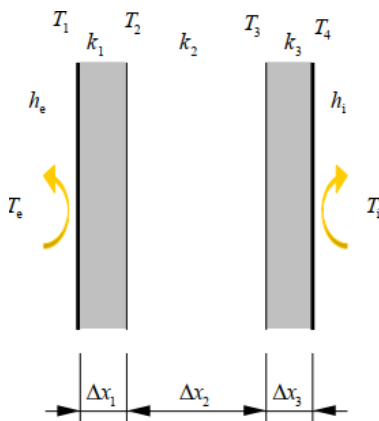
Noto il valore di q è immediato calcolare il valore della temperatura su ognuna delle due facce in quanto lo scambio termico essendo stazionario avrà lo stesso valore nei due transiti, cioè:

$$q = \frac{T_i - T_1}{\frac{1}{h_i}} \rightarrow T_1 = T_i - \frac{q}{h_i} = 25 - \frac{87.1}{10.46} = 16.7^\circ\text{C}$$

$$q = \frac{T_2 - T_e}{\frac{1}{h_e}} \rightarrow T_2 = T_e + \frac{q}{h_e} = 0 + \frac{87.1}{52.3} = 1.7^\circ\text{C}$$

4. Sia dato un muro piano costituito da uno strato di pietra ed uno di calcestruzzo, di spessore uguale e pari a 10 cm, separati da un'intercapedine d'aria di 30 cm. Il muro separa due ambienti a temperatura rispettiva di 40°C e 20°C, aventi coefficiente di scambio convettivo pari rispettivamente a 30 e 5 W/m²K. Sapendo che i coefficienti di conducibilità della pietra, del calcestruzzo e dell'aria valgono rispettivamente 1.5 W/mK, 1.2 W/mK e 0.022 W/mK, determinare la densità di flusso scambiato e l'andamento della temperatura nei casi in cui:

- l'aria non dia luogo a moti convettivi
- l'aria dia luogo ad uno scambio per convezione con coefficiente h pari a 2.5 W/m²K



- Calcoliamo la resistenza totale del sistema per unità di superficie.

$$R_{TOT} = \frac{1}{h_e} + \frac{\Delta x_1}{k_1} + \frac{\Delta x_2}{k_2} + \frac{\Delta x_3}{k_3} + \frac{1}{h_i} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{30} + \frac{0.1}{1.5} + \frac{0.3}{0.022} + \frac{0.1}{1.2} + \frac{1}{5} \right) = 14.29 \text{ K/W m}^2$$

$$q = \frac{T_e - T_i}{R_{TOT}} = \frac{40 - 20}{14.29} = 1.4 \text{ W/m}^2$$

Per determinare T₁ e T₄ si sfrutta la convezione per l'aria esterna ed interna.

$$q = h_e (T_e - T_1) \rightarrow T_1 = T_e - \frac{q}{h_e} = 40 - \frac{1.4}{30} = 39.95^\circ\text{C}$$

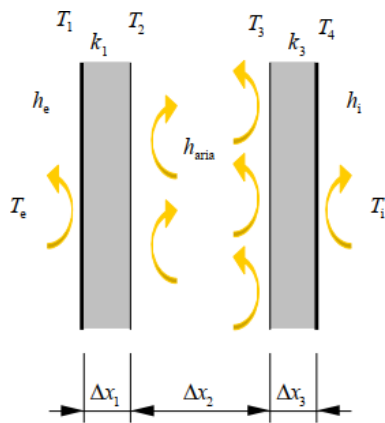
$$q = h_i (T_4 - T_i) \rightarrow T_4 = \frac{q}{h_i} + T_i = \frac{1.4}{5} + 20 = 20.28^\circ\text{C}$$

Per determinare T₂ e T₃ si sfrutta la conduzione attraverso gli strati 1 e 3.

$$q = k_1 \frac{T_1 - T_2}{\Delta x_1} \rightarrow T_2 = T_1 - q \frac{\Delta x_1}{k_1} = 39.95 - 1.4 \frac{0.1}{1.5} = 39.86^\circ\text{C}$$

$$q = k_3 \frac{T_3 - T_4}{\Delta x_3} \rightarrow T_3 = T_4 + q \frac{\Delta x_3}{k_3} = 20.28 + 1.4 \frac{0.1}{1.2} = 20.4^\circ\text{C}$$

b) La situazione è ora illustrata dalla seguente figura.



Procediamo come nel caso precedente.

$$R_{TOT} = \frac{1}{h_e S} + \frac{\Delta x_1}{k_1 S} + \frac{1}{h_{aria} S} + \frac{\Delta x_3}{k_3 S} + \frac{1}{h_i S} = \frac{1}{S} \left(\frac{1}{30} + \frac{0.1}{1.5} + \frac{1}{2.5} + \frac{0.1}{1.2} + \frac{1}{5} \right) = 0.794 \text{ K/W m}^2$$

$$q = \frac{T_e - T_i}{R_{TOT}} = \frac{40 - 20}{0.794} = 25.2 \text{ W/m}^2$$

$$q = k_1 \frac{T_1 - T_2}{\Delta x_1} \rightarrow T_2 = T_1 - q \frac{\Delta x_1}{k_1} = 39.16 - 25.2 \frac{0.1}{1.5} = 37.48^\circ\text{C}$$

$$q = k_3 \frac{T_3 - T_4}{\Delta x_3} \rightarrow T_3 = T_4 + q \frac{\Delta x_3}{k_3} = 25.04 + 25.2 \frac{0.1}{1.2} = 27.6^\circ\text{C}$$

Irraggiamento

Qualsiasi corpo con una temperatura $T > 0$ K emette radiazione elettromagnetica, detta radiazione termica, dovuta essenzialmente al moto di agitazione (detta appunto agitazione termica) delle cariche elettriche che compongono la materia.

A differenza della conduzione e della convezione, l'irraggiamento non ha bisogno di mezzo materiale interposto per propagarsi.

L'energia elettromagnetica assorbita da un corpo viene trasformata in energia interna e quindi in agitazione molecolare.

Si ricorderà che l'energia interna è proporzionale, tramite il calore specifico a volume costante, alla temperatura assoluta del corpo stesso e quindi si intuisce come mai l'incremento dell'energia interna porti ad incremento della temperatura del corpo.

Si sottolinea l'importanza dell'irraggiamento: è tramite questa forma di trasmissione dell'energia che il sole ci riscalda.

Lo studio dell'irraggiamento presenta aspetti matematici complessi. Qui si cercherà di semplificare al massimo tale trattazione ricordando solamente le leggi fondamentali.

Iniziamo con il dare l'espressione della potenza che una superficie S di un corpo a temperatura T (in gradi Kelvin) emette per irraggiamento:

$$P = \varepsilon S \sigma T^4 \quad (19)$$

Essa viene detta legge di Stephan-Boltzmann, dove σ è la costante di Stephan-Boltzmann $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ (W/m²K⁴ ed ε è il potere emissivo (o emissività) del corpo e si ha sempre $\varepsilon \leq 1$. Quando $\varepsilon = 1$ il corpo viene detto corpo nero, altrimenti corpo grigio.

L'intensità (nel caso della radiazione si preferisce usare questa parola al posto di densità di flusso, quindi al posto della lettera q usata precedentemente ora useremo la lettera I) si ha:

$$I = \varepsilon \sigma T^4 \quad (20)$$

Ad esempio un corpo con emissività di 0.8 e temperatura di 1200 K emette una energia per ogni metro quadrato della sua superficie e per ogni secondo pari a

$$I = \varepsilon \sigma T^4 = 0.8 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 1200^4 = 9.4 \cdot 10^4 \text{ W / m}^2$$

Ora consideriamo che lo stesso corpo che emette radiazione termica è in grado anche di assorbirla, e se il bilancio energetico non è in parità può riscaldarsi o raffreddarsi. Vediamo meglio queste due caratteristiche di ogni corpo.

Coefficiente di assorbimento a : indica la frazione della radiazione incidente che un corpo assorbe. Può assumere valori da 0 (nessuna radiazione assorbita) e 1 (tutta la radiazione assorbita).

Un oggetto nero opaco ha $a = 1$, mentre un oggetto perfettamente riflettente ha $a = 0$.

Emissività ε : indica l'efficienza con cui un corpo emette radiazione termica rispetto a un corpo nero ideale che ha una emissività pari ad 1 (un corpo nero è un oggetto teorico che assorbe e riemette tutta la radiazione incidente che rappresenta la massima radiazione possibile a una data temperatura). Anche l'emissività varia tra 0 e 1.

La legge di Kirchoff per la radiazione termica afferma che, per un corpo in equilibrio termico con il suo ambiente a una data lunghezza d'onda e temperatura:

$$a(\lambda, T) = \varepsilon(\lambda, T)$$

In altre parole: se un corpo assorbe bene la radiazione incidente su di esso (alto valore di a), sarà anche un buon emettitore (alto valore di ϵ).

Un corpo che riflette o trasmette la maggior parte della radiazione (basso valore di a) sarà anche un cattivo emettitore (basso valore di ϵ).

Questa uguaglianza si applica in condizioni di equilibrio termico radiativo, ma potrebbe non valere esattamente se ci sono condizioni particolari (es. differenze nella lunghezza d'onda della radiazione incidente ed emessa).

I valori dei coefficienti di emissività e assorbività dei materiali usati nei calcoli ingegneristici sono normalmente i valori mediati sullo spettro, riferiti alla radiazione solare e a una temperatura di riferimento dell'oggetto. Questi valori (di assorbività ed emissività) appunto perché non sono riferiti ad una sola lunghezza d'onda possono variare sensibilmente fra loro, come si vede dalla seguente tabella.

Materiale della superficie	a_s	ϵ
Asfalto	0,90	0,90
Calcestruzzo	0,60	0,88
Laterizio	0,63	0,93
Marmo bianco	0,46	0,95
Neve	0,28	0,97
Pelle umana	0,62	0,97
Vernice bianca	0,14	0,93
Vernice nera	0,97	0,97

Occorre però tenere presente che un corpo di una data emissività non emette isotropicamente.

La radiazione emessa da un corpo non è sempre isotropica, cioè non viene distribuita uniformemente in tutte le direzioni dello spazio. Questo comportamento dipende da diversi fattori, come la geometria del corpo, le sue proprietà superficiali e la sua temperatura. Vediamo nel dettaglio:

- Geometria del corpo:

Se il corpo ha una forma irregolare, come una superficie curva o un angolo, la radiazione emessa in direzioni diverse può variare a seconda dell'orientamento locale della superficie. Ad esempio, una superficie piana irraderà in maniera più intensa perpendicolarmente alla sua area rispetto a direzioni oblique.

- Emissività direzionale:

La radiazione emessa varia con l'angolo rispetto alla normale alla superficie. Superfici come i metalli lucidi tendono a emettere radiazione in direzioni preferenziali a causa delle loro proprietà di riflessione e della struttura microscopica.

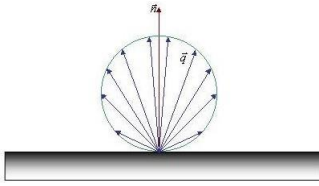
- Polarizzazione e materiali anisotropi:

Se il materiale è anisotropo (ha proprietà che cambiano con la direzione), la radiazione sarà più intensa in certe direzioni. Ad esempio, materiali cristallini possono emettere più radiazione lungo alcune direzioni dei loro assi cristallini.

Per molte superfici ideali, l'intensità della radiazione segue la legge di Lambert:

$$I(\theta) = I_0 \cos\theta$$

Dove I_0 è l'intensità massima della radiazione nella direzione normale alla superficie ($\theta = 0$).



Per quanto riguarda l'assorbimento di un corpo per irraggiamento, vale la seguente relazione

$$P_{ass} = a S I_0$$

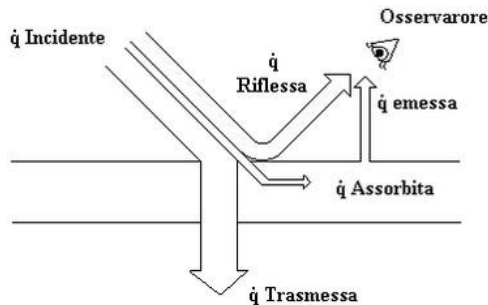
Dove a è il coefficiente di assorbimento (che misura la frazione di energia incidente che il corpo assorbe, esso dipende dalla natura del materiale e dalla lunghezza d'onda della radiazione), S la superficie del corpo e I_0 è l'intensità (o densità di flusso) della radiazione incidente.

Dunque per un corpo che si trova in equilibrio termico, la potenza assorbita è uguale alla potenza emessa, avendosi:

$$P_{emessa} = P_{assorbita}$$

$$a S I_0 = \epsilon \sigma S T^4$$

Tutti i corpi dunque emettono radiazione, ed abbiamo visto con quale potenza emettono, ma cosa accade ad un corpo che riceve radiazione? Nel caso generale l'energia raggiante entrante si divide in tre componenti; assorbita, riflessa e trasmessa, come mostrato nella seguente figura.



Per la conservazione dell'energia, facendo riferimento alla radiazione incidente, vale la seguente relazione

$$I_{inc} = I_a + I_r + I_t$$

Dove il pedice a indica la densità di flusso assorbita, il pedice r quella riflessa ed il pedice t quella trasmessa.

Se dividiamo per I_{inc} , vengono definiti i tre coefficienti di assorbimento, di riflessione e trasmissione.

$$\frac{I_a}{I_{inc}} + \frac{I_r}{I_{inc}} + \frac{I_t}{I_{inc}} = 1 \quad \rightarrow \quad a + r + t = 1$$

$$\frac{I_a}{I_{inc}} = a; \frac{I_r}{I_{inc}} = r; \frac{I_t}{I_{inc}} = t$$

Un corpo (ideale) che non riflette nulla viene detto corpo nero e quindi sarà caratterizzato dal fatto che assorbirà tutta la radiazione incidente ed emetterà quindi esattamente quello che assorbe.

La radiazione riflessa rappresenta l'energia che il corpo non scambia con l'ambiente attraverso assorbimento o emissione, ma viene semplicemente deviata dalla sua superficie. Essa dipende fortemente dalle proprietà superficiali e ottiche del materiale, come:

Indice di rifrazione: governa il comportamento della luce incidente, influenzando il rapporto tra la riflessione speculare e quella diffusa.

Conduttività elettrica: nei materiali metallici, una conduttività elevata porta a una riflettività alta.

Rugosità superficiale: superfici più rugose tendono a diffondere la radiazione riflessa in più direzioni.

Altresì anche la radiazione trasmessa non partecipa allo scambio di calore con l'ambiente, poiché essa attraversa il corpo senza interagire (né assorbita né riflessa).

Ribadiamo ancora che lo scambio di calore per irraggiamento riguarda solo la porzione di energia assorbita ed emessa dal corpo, ed è descritto dalla emissività :

- Assorbimento: Il corpo assorbe una frazione α della radiazione incidente.
- Emissione: Il corpo emette radiazione secondo la legge di Stefan-Boltzmann, proporzionalmente alla sua emissività ϵ .

La relazione (19) può essere estesa al caso di due corpi neri, aventi temperatura T_1 e T_2 , introducendo un parametro che tiene conto di quanta energia intercettano “visivamente” le due superfici in base alla loro disposizione spaziale, avendosi

$$P = \sigma S F_{1,2} (T_1^4 - T_2^4)$$

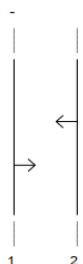
Dove $F_{1,2}$ viene detto fattore di forma (o di vista). La valutazione di F nei vari casi concreti è abbastanza complesso per cui lo omettiamo.

Si tenga presente che lo scambio radiativo fra due o più corpi neri é problema di non facile soluzione tranne in casi e geometrie semplici per altro abbastanza comuni nella realtà.

Quando due corpi hanno temperature diverse, si verifica uno scambio radiativo. Il corpo più caldo emette più energia di quanta ne riceva, mentre il corpo più freddo riceve più energia di quanta ne emetta. Questo scambio continua fino a quando i due corpi raggiungono l'equilibrio termico, ovvero la stessa temperatura. A quel punto, entrambi i corpi emettono e assorbono la stessa quantità di energia.

Diamo solo l'espressione della potenza termica scambiata per irraggiamento per tre geometrie semplici.

1. Due superfici grigie (cioè abbiano emissività indipendente dalla lunghezza d'onda) , piane e parallele con stessa superficie, con emissività ϵ_1 ed ϵ_2 , e temperatura T_1 e T_2 :



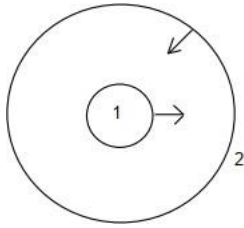
$$P = \frac{\sigma S (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} \quad (21)$$

Per superfici “nere” ossia con emissività pari ad uno si ha

$$P = \sigma S (T_1^4 - T_2^4)$$

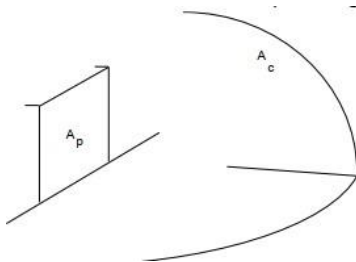
Il segno positivo di P indica che $T_1 > T_2$ e viceversa.

2. Due superfici cilindriche o sferiche concentriche, come indicato nella seguente figura



$$P = \frac{\sigma A_1 (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1 \right)}$$

3. Una superficie di una parete che irradia verso l'ambiente esterno.



$$P = A_p \epsilon_p \sigma (T_p^4 - T_a^4)$$

Non ci addentriamo oltre questa complessa modalità di trasmissione del calore.

Alcuni esempi

1. L'intensità (densità di flusso) solare sulla superficie della Terra in estate a mezzogiorno è circa 1000 W/m^2 , ipotizzando che la pelle esposta al sole sia circa 1 m^2 e che il coefficiente di assorbimento sia 0.8 , calcolare quanta energia per ogni secondo riceve una persona.

$$P = a S P_{\text{incidente}} = 0.8 \cdot 1 \cdot 1000 = 700 \text{ W}$$

2. Un tetto di 10 m^2 , in inverno ha una temperatura di 20°C ed una emissività di 0.8 , calcolare la potenza emessa.

$$P = \varepsilon \sigma S T^4 = 0.8 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 10 \cdot 293^4 = 3340 \text{ W}$$

3. Su di un corpo di superficie $S = 2 \text{ m}^2$ e coefficiente di assorbimento $a = 0.8$, incide una radiazione avente intensità $I_0 = 500 \text{ W/m}^2$, qual è la potenza assorbita?

$$P_{\text{ass}} = a S I_0 = 0.8 \cdot 2 \cdot 500 = 800 \text{ W}$$

4. Qual è la temperatura di un corpo, avente emissività 0.9 , che emette una intensità di 1000 W/m^2 ?

$$I = \frac{P}{S} = 1000 = \varepsilon \sigma T^4$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{1000}{0.9 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8}}} = 374 \text{ K}$$

5. Un corpo (più freddo rispetto all'ambiente) avente superficie di 1.5 m^2 , una emissività di 0.4 ed un coefficiente di assorbimento di 0.7 , ha una temperatura di 300 K . Su di esso incide una radiazione di intensità di 1000 W/m^2 . Si calcoli il bilancio termico.

$$P_{\text{ass}} = a S I_0 = 0.7 \cdot 1.5 \cdot 1000 = 1050 \text{ W}$$

$$P_{\text{emessa}} = \varepsilon \sigma S T^4 = 0.4 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 1.5 \cdot 300^4 = 276 \text{ W}$$

Il corpo sta dunque riscaldandosi, assorbendo radiazione termica con potenza di 774 W .

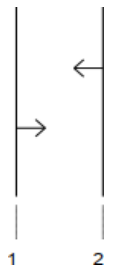
6. Un corpo (più caldo rispetto all'ambiente) con le stesse caratteristiche del problema precedente, abbia ora una temperatura di 400 K . Si calcoli il bilancio termico

$$P_{\text{ass}} = a S I_0 = 0.7 \cdot 1.5 \cdot 1000 = 1050 \text{ W}$$

$$P_{\text{emessa}} = \varepsilon \sigma S T^4 = 0.9 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 1.5 \cdot 400^4 = 1959 \text{ W}$$

Il corpo sta dunque raffreddando, emettendo radiazione termica con potenza di 1059 W .

7. Qual è l'energia scambiata fra due corpi grigi piani paralleli con identica superficie, con emissività di 0.9 e 0.7, aventi temperatura $T_1 = 400 \text{ K}$ e $T_2 = 300 \text{ K}$?



$$I = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} = \frac{5.67 \cdot 10^{-8} \cdot (400^4 - 300^4)}{\frac{1}{0.9} + \frac{1}{0.7} - 1} = 644 \text{ W / m}^2$$

Il valore positivo di I indica che il flusso termico netto va dal corpo a temperatura T_1 (400 K) al corpo a temperatura T_2 (300 K), come ci si aspetta quando $T_1 > T_2$. In altre parole, il corpo a 400 K sta emettendo più energia di quanta ne assorbe, mentre il corpo a 300 K sta assorbendo più energia di quanta ne emette.

Ribadiamo che il valore di 644 W/m^2 rappresenta l'intensità netta scambiata tra le due superfici piane e parallele con stessa superficie. Questo è il flusso netto di energia per unità di superficie che passa dal corpo più caldo (400 K) al corpo più freddo (300 K) a causa della differenza di temperatura e delle proprietà emissive dei due corpi.

Il corpo 1 assorbe più energia di quanta ne emetta ($1045.09 \text{ W/m}^2 > 321.49 \text{ W/m}^2$). Di conseguenza, la sua temperatura aumenterà fino a raggiungere un nuovo equilibrio termico in cui l'energia emessa e quella assorbita si equivalgono (e l'emissività sarà uguale all'assorbività). La temperatura finale dipenderà anche da come il corpo 1 può dissipare il calore in eccesso, ad esempio per conduzione o convezione, oltre che per irraggiamento.

Tempo di raffreddamento di una birretta messa in frigo

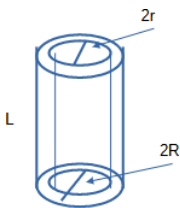


Supponiamo di mettere in frigo una bottiglia di vetro che assimiliamo ad un cilindro con raggio di base interno $r = 2.2 \text{ cm}$, raggio di base esterno $R = 2.5 \text{ cm}$ ed altezza $L = 22 \text{ cm}$ (avente quindi uno spessore di $s = 0.3 \text{ cm}$), ed inoltre supponiamo la densità della birra sia uguale a quella dell'acqua (in realtà è di poco superiore).

La birra si trova a temperatura ambiente di $T_1 = 20^\circ\text{C}$ e viene messa in frigo a $T_2 = 5^\circ\text{C}$.

Quanto tempo impiega per portarsi all'equilibrio con la temperatura del frigo?

conducibilità termica del vetro:	$k = 1 \text{ W/mK}$
calore specifico dell'acqua/birra:	$c_a = 4186 \text{ J/kg K}$
calore specifico vetro:	$c_v = 837 \text{ J/K}$
densità dell'acqua/birra:	$d_a = 1000 \text{ kg/m}^3$
densità del vetro:	$d_v = 2400 \text{ kg/m}^3$
conducibilità aria:	$k_{aria} = 0.026 \text{ W/mK}$



Con i dati del problema abbiamo:

$$V = \pi r^2 L = \pi \cdot 0.022^2 \cdot 0.22 = 0.00033 \text{ m}^3 = 0.33 \text{ cl}$$

La superficie è

$$S = S_{laterale} + S_{base} = 2\pi r \cdot L + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot 0.022 \cdot 0.22 + 2\pi \cdot 0.022^2 = 0.0334 \text{ m}^2$$

$$\text{Massa della birra: } m_b = \rho V = 1000 \cdot 0.00033 = 0.33 \text{ kg}$$

$$\text{Massa del vetro: } m_v = d_{vetro} V_{vetro} = d_{vetro} \cdot S \cdot s = 2400 \cdot 0.033 \cdot 0.003 = 238 \text{ g}$$

essendo lo spessore: $s = 3 \text{ mm}$.

Innanzitutto vediamo quali siano i principali meccanismi di trasferimento di calore da considerare.

I. *Convezione nell'aria del frigorifero:*

Il calore si trasferisce dalla superficie della bottiglia all'aria circostante attraverso convezione forzata o naturale.

Nel frigorifero, l'aria fredda circola a causa del ventilatore (convezione forzata), favorendo il trasferimento di calore dalla bottiglia.

II. *Conduzione termica nella parete della bottiglia:*

Il calore si trasferisce attraverso il materiale della bottiglia (vetro, plastica, o altro) dalla sua superficie interna, a contatto con l'acqua calda, alla superficie esterna, che è a contatto con l'aria fredda.

III. *Convezione interna nel liquido:*

All'interno della bottiglia, il liquido trasferisce calore per convezione naturale a causa del gradiente termico: le parti più calde dell'acqua tendono a salire, mentre quelle più fredde scendono.

IV. *Scambio radiativo:*

Una piccola quantità di calore può essere trasferita tramite radiazione termica tra la superficie della bottiglia e le pareti interne del frigorifero, anche se questo effetto è generalmente trascurabile rispetto alla convezione.

V. *Conduzione termica attraverso la superficie d'appoggio:*

Se la bottiglia è appoggiata su una superficie (come una griglia o un ripiano del frigorifero), il calore può essere trasferito per conduzione dalla base della bottiglia al ripiano, se quest'ultimo è più freddo.

Fattori che influenzano il trasferimento di calore:

Materiale della bottiglia: Vetri e plastiche hanno diverse conducibilità termiche.

Spessore della bottiglia: Un maggiore spessore riduce la velocità di conduzione.

Differenza di temperatura fra il liquido ed l'aria del frigorifero.

Velocità dell'aria nel frigorifero (efficienza del ventilatore).

In sintesi:

Il raffreddamento della bottiglia è il risultato combinato di convezione (nell'aria e nell'acqua), conduzione (attraverso la bottiglia) e, in misura minore, scambio radiativo.

Supponiamo che il trasferimento di calore avvenga principalmente per conduzione.

1. Calcolo dell'energia termica (calore) che si "trasferisce" dalla birra all'ambiente interno del frigo, affinché la sua temperatura scenda fino a 5 °C.

Il calore che una massa di una certa sostanza deve cedere all'ambiente per raffreddarsi, o che deve acquistare per riscaldarsi, è data dalla (13):

$$Q = mc_p (T_{\text{finale}} - T_{\text{iniziale}}) = mc_p \Delta T$$

Dove m è la massa, " c " il calore specifico a pressione costante e ΔT è la differenza di temperatura fra il corpo e l'ambiente (ossia fra la bottiglia di birra e aria del frigo).

Con i dati del problema si ha che il calore ceduto dalla bottiglia all'aria del frigo è (in modulo)

$$Q = 0.33 \cdot 4186 \cdot 15 = 20.7 \cdot 10^3 J \quad (22)$$

2. Calcolo del flusso di calore per conduzione

Se $s = R - r \ll r$, cioè lo spessore dello strato cilindrico è piccolo rispetto al suo raggio interno, come in effetti è nel nostro caso, allora la relazione (6) valida per una geometria cilindrica, si semplifica nel seguente modo

$$P = k S_{\text{lat}} \frac{T_1 - T_2}{s} \quad (T_1 > T_2)$$

Dove S_{lat} è la superficie laterale del cilindro, in pratica se lo spessore dello strato cilindrico è piccolo esso si comporta come se fosse una parete piana.

Inserendo i valori numerici

$$P = 1.0 \cdot 0.03 \frac{20 - 5}{0.003} = 150 W \quad (23)$$

Concludendo

Conoscendo "la velocità" con la quale il calore "fugge" dalla birra, ossia il suo flusso (energia per unità di tempo, ossia la potenza), e conoscendo anche la quantità totale di calore che deve essere smaltita dalla birra per raffreddarsi è possibile calcolare il tempo occorrente per il raffreddamento.

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{20.7 \cdot 10^3 (J)}{150 (J / s)} = 138 s \approx 2 \text{ min} \quad (24)$$

Quindi se ipotizziamo che lo scambio termico avvenga esclusivamente per conduzione il tempo di raffreddamento risulta di circa 2 minuti.



Ma...

se consideriamo che il processo di raffreddamento non è stazionario, e che la trasmissione del calore non avviene principalmente per conduzione ma per convezione, le cose cambiano di molto.

La differenza di temperatura fra la birra e l'aria interna del frigo a 5 °C non è costante, quindi il calcolo di P è sbagliato, perché ΔT non ha un valore univoco, costante appunto, durante tutto il processo. In sostanza avviene che diminuendo la differenza di temperatura tra birra e aria del frigo diminuisce anche il flusso termico scambiato e quindi il fenomeno non è stazionario, cioè il flusso termico non è costante e questo cambia sostanzialmente le carte in tavola.

Quindi il calcolo di P fatto nella (23) è sbagliato. Come sbagliato sarebbe usare la (8) che va usata solo in caso di stazionarietà. Infatti si avrebbe.

Premettendo che le indicazioni tipiche per h sono:

- Convezione naturale in aria (a bassa velocità): h varia generalmente tra 2 e 25 W/m²K.
- Convezione forzata in aria (con ventola): h può salire a valori tra 10 e 50 W/m²K, a seconda della velocità dell'aria.

Tenendo conto che nei frigoriferi è presente una ventola, è lecito prendere per h il valore medio di 30 W/m²K.

$$P = hS \Delta T = 30 \cdot 0.03 \cdot 15 = 13.5 W \quad (26)$$

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{20.7 \cdot 10^3 (J)}{13.5 (J / s)} = 1533 s$$
$$t = 25 \text{ min} \quad (27)$$

Occorre dunque usare la (18).

$$\tau \equiv \frac{1}{K} = \frac{(mc_p)_{\text{sistema}}}{hS}$$

Con i seguenti valori dei calori specifici, rispettivamente per il vetro e la birra:

$c_v = 837 \text{ J/kg K}$ $c_b = 4186 \text{ J/kg K}$, e assumendo per h il valore 30 (W/m²K), si ha:

$$\tau = \frac{m_v c_v + m_b c_b}{hS} = \frac{0.238 \cdot 837 + 0.33 \cdot 4186}{30 \cdot 0.0334} = \frac{1580}{0.19} = 1576 s = 26 \text{ min} \quad (28)$$

Ritenendo che il tempo di raffreddamento (che ha un andamento asintotico) si concluda dopo un tempo di 5 τ , con questo modello di calcolo si avrebbe la birra fresca dopo

$t = 5 \tau = 2.2 \text{ h} \quad (29)$

Si tenga presente che questo modello è anch'esso approssimativo in quanto non tutta la birra è a contatto con il vetro del contenitore, pertanto il raffreddamento non è omogeneo (punto 4 delle condizioni per l'applicazione della legge), inoltre sulla superficie esterna del contenitore si forma una pellicola di aria che ha senz'altro una temperatura maggiore di 5 °C.

Siamo dunque arrivati alla conclusione che questo problemino, all'apparenza banale, non ha una soluzione semplice ed immediata a causa della presenza della costante convettiva che non è di semplice determinazione, come abbiamo visto. Per procedere in modo sensato si dovrebbe "prima" valutare il valore di h sperimentalmente, cioè misurando come decresce la temperatura con il trascorrere del tempo...ma a quel punto, non ci servirebbe più fare alcun calcolo!

Si potrebbe, infatti, calcolare K (costante di decadimento) ad esempio misurando in tempo occorrente affinché la temperatura del liquido scenda dell'80% rispetto al ΔT , ossia fino a 8 °C, realisticamente da esperienze fatte tale tempo è dell'ordine dei 40 min (2400 s),

$$T(t^*) = 8^\circ\text{C} = 5^\circ\text{C} + \Delta T e^{-Kt^*}; \quad 3 = \Delta T e^{-Kt^*}; \quad e^{-Kt^*} = 0.2; \quad -Kt^* = \log 0.2 = -1.6$$

Usare i gradi Celsius o Kelvin è indifferente.

$$K = \frac{1.6}{2400} = 0.37 \cdot 10^{-3} \text{s}^{-1}$$

$$\tau = \frac{1}{K} = 1500 \text{s} = 25 \text{min}$$

quindi il tempo di raffreddamento sarebbe

$t = 5 \tau = 2.1 \text{ h} \quad (31)$

Infine si potrebbe usare un approccio diverso facendo riferimento alle equazioni del transito termico considerando due aspetti:

- La convezione esterna con l'aria in termini di resistenza termica
- la convezione all'interno della bottiglia in termini di resistenza termica

Ci riferiamo alla situazione descritta sopra di una bottiglietta schematizzata come un cilindro di vetro (con spessore di 3 mm) avente raggio di base di 2.2 cm ed altezza 22 cm, quindi con volume $V = 33 \text{ cl}$, superficie $S = 0.0334 \text{ m}^2$, massa della birra $m_b = 0.33 \text{ kg}$ (avendo assunto la densità della birra uguale a quella dell'acqua), massa del vetro $m_v = 0.238 \text{ kg}$, ed inoltre usiamo per h il valore usato sopra, $h = 30$.

Richiamiamo il concetto di resistenza termica: esso è la capacità di un materiale di opporsi al flusso di calore che tende ad attraversarlo.

Ricordando che

la conduzione: si riferisce al trasporto di calore attraverso un materiale solido o tra solidi in contatto diretto fra loro, essa avviene anche nei liquidi o gas ma in questi casi il loro contributo è molto basso,

la convezione: riguarda il trasporto di calore tra una superficie solida e un fluido (gas o liquido) in movimento oppure in quiete, riportiamo le formule della resistenza termica nei due casi.

Nel caso della conduzione:

$$R_{\text{conduzione}} = \frac{\Delta x}{kS} \quad (32)$$

Dove Δx è lo spessore del materiale attraverso il quale avviene lo scambio termico e k è la conducibilità termica del materiale, mentre S è l'area attraverso la quale avviene lo scambio termico.

Mentre nel caso della convezione si ha

$$R_{\text{convezione}} = \frac{1}{hS} \quad (33)$$

Dove h il coefficiente di scambio convettivo ed S è l'area attraverso la quale avviene lo scambio termico.

Useremo dunque un approccio basato sul seguente risultato, noto dalla teoria:

$$\tau = RC \quad (34)$$

Che ci dice che il tempo di decadimento termico è pari al prodotto della resistenza termica del sistema (birra + vetro), per la sua capacità termica che abbiamo calcolato più sopra ($C = 1580 \text{ J/K}$).

Occorre dunque calcolare R che è la somma di tre contributi: la resistenza convettiva introdotta dalla superficie della bottiglia con l'aria del frigo, la resistenza convettiva all'interno del liquido stesso, ed infine anche la resistenza di conduzione introdotta dalla presenza della "parete" di vetro della bottiglia con l'aria all'interno del frigo. Come vedremo il termine preponderante è lo scambio convettivo "esterno" alla bottiglia. Useremo per il valore di h fra l'aria del frigo e la birra useremo il valore di $500 \text{ W/m}^2\text{K}$ - dalla letteratura si evince che i valori del coefficiente convettivo per l'acqua (che assumiamo uguale a quello della birra) sono compresi fra 500 e $10\,000 \text{ W/m}^2\text{K}$ -.

Resistenza convettiva all'interno del liquido:

$$R_{\text{convezione}} = \frac{1}{h_{\text{birra}} S} = \frac{1}{500 \cdot 0.030} = 0.067 \text{ K/W} \quad (35)$$

Resistenza convettiva esterna fra superficie di vetro della bottiglia e l'aria del frigo:

$$R_{\text{convezione}} = \frac{1}{hS} = \frac{1}{30 \cdot 0.0334} = 0.998 \text{ K/W} \quad (36)$$

Resistenza termica per conduzione introdotta dalla presenza della "parete" di vetro della bottiglia:

$$R_{\text{conduzione}} = \frac{\Delta x}{k_{\text{vetro}} S} = \frac{0.003}{1.0 \cdot 0.0334} = 0.089 \text{ K/W} \quad (37)$$

(essendo la conducibilità del vetro $k_{\text{vetro}} = 1 \text{ W/mK}$)

La costante di tempo vale

$$\tau = RC = (0.067 + 0.998 + 0.089) \cdot 1580 = 1823 \text{ s} = 30 \text{ min}$$

Il tempo di raffreddamento valutato da questa analisi è

$$t = 5 \tau = 2.5 \text{ h} \quad (38)$$

Dopo questo excursus possiamo infine affermare che la nostra birretta si raffredderà in un tempo di circa 2 ore e mezza.

Per sottolineare ulteriormente che l'aspetto predominante è quello convettivo possiamo ricorrere ad un parametro indicatore detto numero di Biot definito come $Bi = \frac{R_{conduttiva}}{R_{convettiva}}$, nel nostro caso vale

$$Bi = \frac{0.089}{0.067 + 0.98} = 0.084$$

Se il numero di Biot, è molto minore di 1, si può ritenere che la resistenza conduttiva sia trascurabile rispetto a quella convettiva, e questo è proprio quello che accade nel nostro caso.

Verifichiamo infine che lo scambio termico per irraggiamento è trascurabile, assumendo che lo scambio avvenga fra due superfici piane e parallele

$$q = \frac{\sigma S (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

Assumendo per l'emissività dell'aria e del vetro un valore rispettivamente di 0.01 e 0.8, per S il valore già calcolato di $S = 0.0334 \text{ m}^2$, si ha che potenza scambiata per unità di area (densità di flusso che la parete del frigo riceve dalla bottiglia.) è

$$q = \frac{5.67 \cdot 10^{-8} \cdot (293^4 - 278^4)}{\frac{1}{0.01} + \frac{1}{0.8} - 1} = \frac{79.2}{100.25} = 0.79 \text{ W / m}^2$$

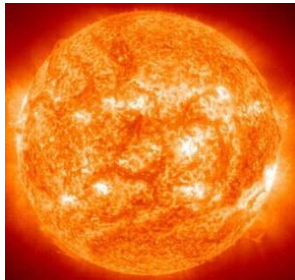
Confermando che effettivamente è corretto trascurare lo scambio termico per irraggiamento.

Questo problema mostra come pur conoscendo le equazioni che regolano un certo fenomeno fisico, spesso questo non è sufficiente per calcolare in modo dettagliato certe grandezze a causa della presenza nelle equazioni di parametri fenomenologici i cui valori dipendono dalla particolare configurazione geometrica e fisica del sistema.

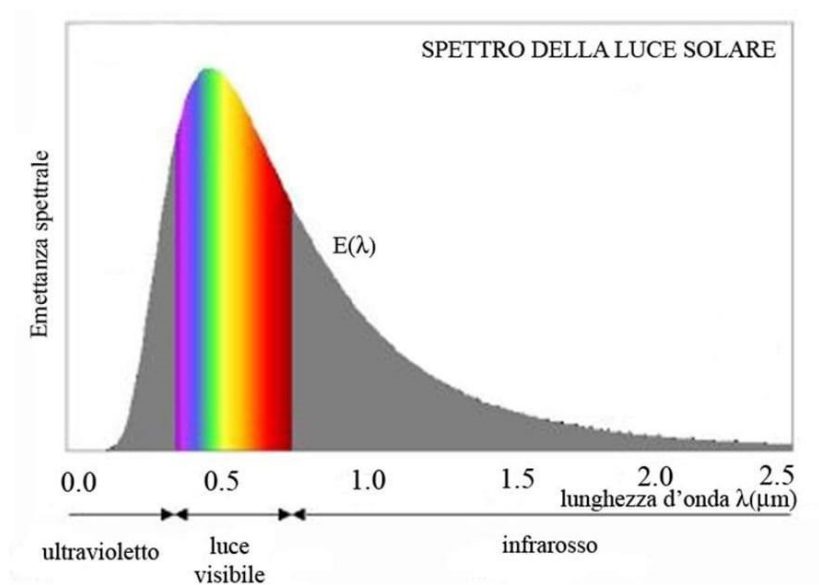
Il bilancio termico terrestre ed effetto serra

a cura di Giancarlo Buccella

Spettro di emissione del Sole



Il Sole emette su tutto lo spettro, dai raggi gamma alle onde radio, ma circa **il 99% della radiazione ha lunghezza d'onda compresa tra 0.15 e 4 μm** con un massimo di intensità a circa 0.5 μm .



La radiazione solare che raggiunge la superficie terrestre:

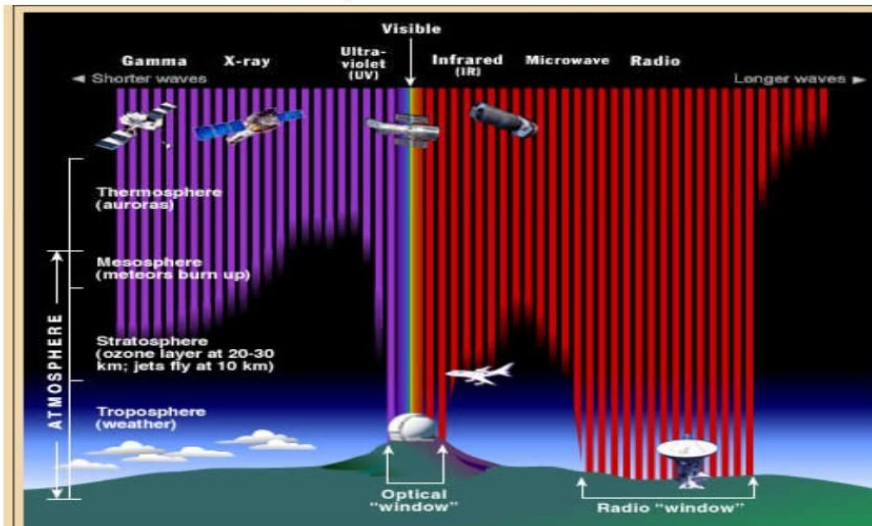
10% - radiazione ultravioletta (0.15 μm ÷ 0.4 μm)

50% - radiazione visibile (0.4 μm ÷ 0.8 μm)

40% radiazione infrarossa (0.8 μm ÷ 4 μm)

Nella seguente illustrazione viene mostrato quello che arriva al suolo della radiazione solare.

Radiazione che arriva a terra: the optical window



Come si vede anche la banda delle microonde e onde radio arriva al suolo essendo l'atmosfera trasparente ad esse, ma le loro intensità sono di 6-7 ordini di grandezza inferiori alle intensità della radiazione ottica, e non sono neanche strumentalmente misurabili.

Per quanto riguarda le radiazioni a corta lunghezza d'onda ossia raggi gamma, raggi X e UV lontano (fra $0.01 \mu\text{m}$ e $0.2 \mu\text{m}$) emessi dal Sole essi vengono in larga parte assorbiti dall'atmosfera terrestre. La nostra atmosfera agisce come uno schermo naturale contro i raggi X e altre radiazioni ionizzanti provenienti dal Sole e dallo spazio. Questo fenomeno è dovuto alla capacità di assorbimento dei gas atmosferici. Gli strati superiori dell'atmosfera, come la ionosfera, assorbono i raggi X a bassa energia, ma la maggior parte dei raggi X, quelli ad alta energia, vengono assorbiti dalla troposfera, la parte più bassa dell'atmosfera. Tuttavia, alcune frazioni percentuali (trascurabili), di tale radiazione può raggiungere comunque la superficie terrestre, specialmente durante le eruzioni solari o altri eventi solari intensi.

Al limite esterno dell'atmosfera, su una superficie di 1 cm^2 , posta perpendicolarmente alla direzione dei raggi solari, arrivano circa 8.1 J/min , questa quantità di energia non mostra significative variazioni nel tempo ed è chiamata costante solare (C):

$$C = 1367 \text{ W/m}^2$$

Quando la radiazione raggiunge l'atmosfera si possono verificare tre fenomeni.

- **Riflessione:** le radiazioni che arrivano sulle nubi e al suolo vengono riflesse senza perdere energia: circa il **30%** (indicativamente circa il 25% dall'atmosfera e 5% dal suolo).
- **Diffusione:** le radiazioni solari viaggiano in linea retta ma le molecole d'acqua e di aerosol le diffondono in tutte le direzioni (il fenomeno della diffusione spiega ad esempio perché risultano illuminate anche zone che non ricevono direttamente la luce solare).
- **Assorbimento:** le radiazioni sono assorbite dalle molecole di alcuni gas e dalle nubi e dal suolo ed in parte vengono riemesse con lunghezza d'onda maggiore (infrarosso): circa il **70%** (20% dall'atmosfera e 50% dal suolo).

Il ritorno dell'energia nello spazio avviene perciò attraverso due modalità.

- riflessione: le radiazioni sono respinte;
- irraggiamento: le radiazioni (UV, visibile e IR) sono assorbite e poi riemesse nell'infrarosso.

Questi sono valori medi, perché la radiazione varia in funzione della latitudine, stagione, ora, presenza di nubi, ecc... La radiazione riflessa complessivamente dalla Terra (30%) costituisce l'albedo.

Le radiazioni assorbite riscaldano il sistema ad una certa temperatura di equilibrio T . Si ricordi che un corpo per il solo fatto che possiede una certa temperatura emette radiazione (spesso chiamata radiazione termica) secondo la legge di Stefan-Boltzmann con una intensità totale di emissione è data dalla semplice relazione $I = \sigma T^4$ (W/m^2) dove σ è una costante (detta costante di Boltzmann), e che l'emissione della radiazione termica avviene non su una singola frequenza bensì su una banda di frequenze, come illustrato dalla figura iniziale dello spettro solare. Per calcolare lo spettro a partire dalla conoscenza della temperatura del corpo occorre usare la seguente formula di emissione di corpo nero di Plank:

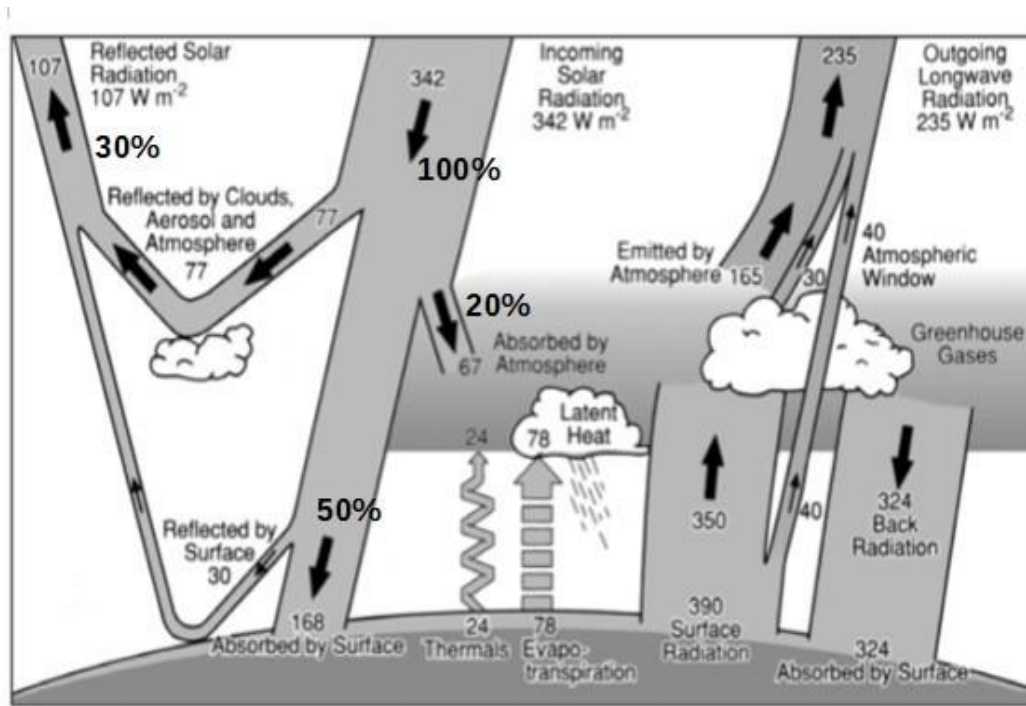
$$\varepsilon(\nu, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{\exp(h\nu / k_B T) - 1} \quad (W / m^2)$$

dove ε è l'intensità specifica. Ora se si calcola ε per varie frequenze si vede che **l'intensità della radiazione emessa dalla Terra** (che ha una temperatura media di 15 °C), **è praticamente tutta concentrata nell'infrarosso, tra 5 e 25 μm con il massimo dell'emissione a 10 μm .** Questa radiazione non si disperde direttamente nello spazio ma va a riscaldare l'atmosfera dal basso la quale ne trattiene la maggior parte, circa il 90%, riemettendola in tutte le direzioni (effetto serra). Grazie a questo fenomeno la Terra ha una temperatura media di 15 °C anziché i -20 °C che avrebbe se non fosse presente l'atmosfera. Come mai allora la Terra non si riscalda con il passare del Tempo?

L'equilibrio termico della Terra è garantito da due distinti meccanismi non radiativi che trasferiscono l'energia dalla superficie terrestre all'atmosfera, che a sua volta la disperde nello spazio.

L'evapotraspirazione, cioè l'evaporazione di tutte le acque superficiali presenti sulla Terra (oceani, mari, laghi, ecc.) unita alla traspirazione delle piante, assorbe il 25% della radiazione solare. Questa energia poi si libera di nuovo come calore latente nei processi di condensazione del vapore acqueo atmosferico che avvengono in quota (nubi) o al suolo (nebbia, brina, rugiada). Il 5% dell'energia passa direttamente dal suolo o dal mare all'aria sovrastante, che per i moti di convezione si riscalda e sale in quota, disperdendo poi il calore nello spazio (calore sensibile). Se si sommano radiazione terrestre, calore latente e calore sensibile si ottiene un perfetto equilibrio tra energia in entrata ed energia in uscita dalla Terra: il bilancio energetico globale del nostro pianeta è nullo e quindi la Terra, nel complesso, non si riscalda né si raffredda. Questo però non vale se si considerano brevi periodi di tempo o zone limitate di superficie terrestre: in questo caso il bilancio energetico può essere negativo o positivo.

La seguente illustrazione mostra il bilancio radiativo fra la radiazione solare e la Terra.



Bilancio radiativo

Abbiamo visto che l'intensità media della radiazione solare al top dell'atmosfera è di 342 W/m², allora si ha:

$$I_{0,ave} = I_{riflessa} + I_{assorbita, atm} + I_{assorbita, superficie}$$

Ed i loro valori numerici, in W/m² sono (come noto dai dati sperimentali):

342 (rad. incidente media al top dell'atmosfera) = 107 (riflessa) + 67 (ass atm) + 168 (ass. sup.), arrotondando le percentuali possiamo scrivere,

$I_{riflessa} = 30\% (107 \text{ W/m}^2)$
$I_{ass atm} = 20\% (67 \text{ W/m}^2)$
$I_{ass sup} = 50\% (168 \text{ W/m}^2)$

Se ora calcoliamo l'intensità di emissione della Terra (avente temperatura media di 15°C $\equiv$ 288 K) ci accorgiamo che essa è maggiore dell'intensità in entrata (342 W/m²), infatti si ha

$$I_{terra} = \sigma T^4 = 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 288^4 = 390 > 342 \text{ (W/m}^2\text{)}$$

Dunque ci deve essere un'altra sorgente di radiazione diretta verso la superficie, altrimenti in questo modo la Terra si raffredderebbe immediatamente, essa è data dalla radiazione infrarossa emessa dall'atmosfera verso la superficie, pari a 324 W/m² (valore sperimentale), questo è il cosiddetto "effetto serra", esso consiste dunque al fatto che l'atmosfera non lascia passare tutta la radiazione proveniente dalla superficie terrestre ma solo una parte, circa il 10%, mentre il restante 90% circa viene assorbito (circa 350 W/m²), assorbendo questa radiazione l'atmosfera si riscalda e riemette radiazione infrarossa suddivisa in due flussi, 324 W/m² verso la superficie e circa 40 W/m² in uscita verso lo spazio.

Calcoliamo il bilancio per quanto riguarda la superficie terrestre:

rad. Solare + rad infrarossa dall'atmosfera – rad. termica emessa

$$168 + 134 - 390 = 102 \text{ (W/m}^2\text{)}$$

Dunque la Terra mediamente sembrerebbe avere un surplus di energia radiante pari a 102 W/m², che deve perdere in qualche modo altrimenti si riscalderebbe.

Passiamo ora all'atmosfera: in ingresso si hanno i 67 W/m² della radiazione solare, dei 390 W/m² della superficie terrestre 350 W/m² vengono assorbiti (cioè il 90%), gli altri 40 W/m² sono dispersi nello spazio attraverso la finestra atmosferica. In uscita invece si ha che l'atmosfera emette radiazione infrarossa per 324 W/m² verso la superficie e 195 W/m² verso lo spazio, suddivisi in 165 emessi da atmosfera libera e 30 emessi da nubi. In breve abbiamo:

energia in entrata – energia in uscita

(rad. Solare + rad. IR emessa dalla superficie) – (rad. IR emessa dall'atmosfera)

$$(67 + 350) - (324 + 195) = -102 \text{ W/m}^2$$

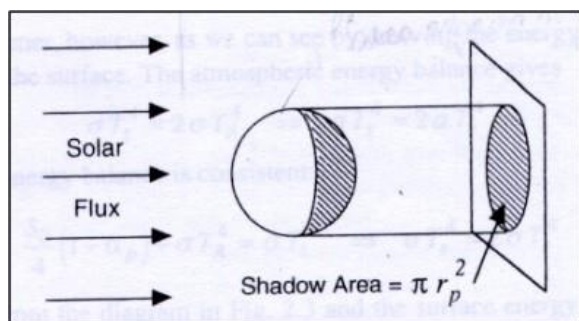
cioè l'atmosfera perde mediamente energia verso lo spazio esterno e quindi tende a raffreddarsi, ma questi 102 W/m^2 vengono ripresi dalla superficie che li ha in eccesso, come abbiamo visto nel calcolo precedente. In che modo? Attraverso il rilascio di calore sensibile (24 W/m^2 , per conduzione) e calore latente (78 W/m^2 , attraverso l'evapotraspirazione). Se si calcola la radiazione in uscita dall'atmosfera (infrarossa emessa + solare riflessa + finestra atmosferica) si ottiene esattamente il valore in ingresso cioè 342 W/m^2 ottenendo così un perfetto bilancio energetico.

Temperatura di emissione di un pianeta

La temperatura di emissione di un pianeta è per definizione la temperatura di corpo nero con la quale esso deve emettere per raggiungere il bilancio energetico, ovvero l'equilibrio tra energia incidente ed emessa. Essa è quindi la temperatura per cui si ha:

$$\text{radiazione solare assorbita} = \text{radiazione emessa dal pianeta}$$

Per calcolare la radiazione solare assorbita, partiamo dalla costante solare S_0 che rappresenta l'energia per unità di area e di tempo che raggiunge una superficie perpendicolare posta alla distanza Sole-Terra pari ad 1 u.a. Quindi l'energia incidente sul pianeta è data dal prodotto della costante solare per l'area che il pianeta espone alla radiazione incidente perpendicolarmente ad essa (nell'approssimazione che i raggi solari siano paralleli, approssimazione valida in quanto il diametro dei pianeti è molto minore della loro distanza dal sole). Tale superficie si chiama “shadow area” (vedi figura seguente).



Quindi al top dell'atmosfera terrestre l'intensità della radiazione solare riferita all'unità di area posta perpendicolarmente alla radiazione, vale:

$$\text{Intensità al top dell'atmosfera} = I_0 = 1367 \text{ W / m}^2$$

Questo flusso incide alla shadow area (area “associata” dell’emisfero illuminato) di πR^2 (indicando con R il raggio della Terra)

$$\text{Radiazione incidente alla shadow area} \equiv I_a = I_0 \pi R^2 \quad (\text{W})$$

Questo è un valore teorico mentre è senz’altro più utile riferirsi all’intensità media spalmata su tutta la superficie dell’emisfero illuminato, e poiché la Terra ruota occorrerà riferirsi (cioè spalmare) l’intensità incidente su tutta la superficie della sfera terrestre, che vale $4\pi R^2$, avendosi

$$I_{0,ave} = \frac{I_a}{4\pi R^2} = \frac{I_0 \pi R^2}{4\pi R^2} = \frac{I_0}{4} = \frac{1367}{4} = 342 \text{ W / m}^2$$

Questa è l’intensità *media* (cioè spalmata su tutta la superficie terrestre) della radiazione solare incidente sulla Terra al top dell’atmosfera.

Ora bisogna tenere presente che non tutta la radiazione incidente viene assorbita, ma parte di essa viene riflessa. La misura della riflettività di un pianeta è detta albedo. Albedo = α = frazione di radiazione riflessa dal pianeta, per la Terra esso vale 0.3, cioè circa il 30% della radiazione incidente viene riflessa nello spazio.

Per dare alcuni riferimenti quantitativi di albedo si veda la seguente tabella.

Neve fresca	0.9
Oceano	0.1
Prato	0.2
Deserto	0.4
Valore medio terrestre	0.3

Quindi tenendo conto dell’albedo l’intensità media assorbita dal sistema Terra + atmosfera, ossia l’energia che entra nel sistema, è:

$$\text{radiazione media assorbita: } I_a = \frac{I_0}{4} (1-\alpha) = 70\% I_{0,ave} = \frac{1367}{4} (1-0.3) = 240 \text{ W / m}^2$$

Questo significa che i restanti 102 W/m² devono tornare verso lo spazio.

A) Temperatura di emissione della Terra senza considerare l'atmosfera

Per determinare la temperatura di emissione del pianeta Terra si deve quindi eguagliare la radiazione assorbita appena calcolata con quella emessa da un corpo nero alla temperatura T , che si ricava dalla legge di Stefan-Boltzmann che afferma che l'intensità della radiazione emessa da qualsiasi corpo che abbia una certa temperatura T vale: $I = \sigma T^4$ (dove σ è la costante di Boltzmann che vale $5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$), uguagliando le due intensità in entrata (assorbita dal sistema) e uscita:

$$I_{\text{assorbita}} = I_{\text{emessa}} \quad (\text{energia assorbita} = \text{energia emessa})$$

$$\frac{I_0}{4} (1-\alpha_e) = \sigma T_e^4$$

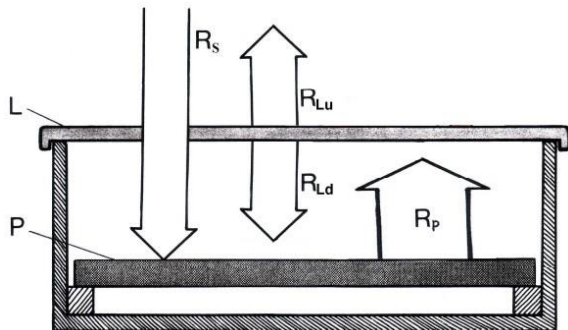
$$T_e = \sqrt[4]{\frac{I_0}{4\sigma} (1-\alpha_e)} = \sqrt[4]{\frac{1367}{4 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8}} (1-0.3)} = 255 \text{ K} = -18^\circ \text{C}$$

Questo valore della temperatura media per il pianeta Terra è evidentemente molto minore del valore osservato, pari a circa $288 \text{ K} = 15^\circ \text{C}$. Per capire questa differenza bisogna prendere in considerazione l'effetto serra. In questo calcolo infatti abbiamo trascurato la presenza dell'atmosfera, quindi la temperatura trovata non è quella reale, ma quella che si avrebbe in assenza di atmosfera. Si può quindi concludere che il sistema Terra-atmosfera non può essere semplicemente considerato come un corpo nero che emette alla temperatura della superficie terrestre, in quanto gran parte della radiazione infrarossa emessa dalla Terra viene assorbita dall'atmosfera, (90% circa). In tal senso quindi, la temperatura della superficie terrestre non rispecchia quella di un corpo nero in equilibrio con la radiazione solare incidente. La temperatura di emissione così ottenuta risulta però essere in buon accordo con la temperatura della tropopausa. La ragione di tutto ciò risiede nel fatto che la tropopausa rappresenta il limite sopra al quale non c'è più apprezzabile assorbimento di radiazione IR, quindi il sistema visto dalla tropopausa è in effetti approssimabile al corpo nero in termini di emissione, in equilibrio con la radiazione solare incidente.

Effetto serra

Consideriamo per iniziare il caso di una serra avente un tetto “ideale”, ossia trasparente a tutta la radiazione solare tranne la componente nel lontano infrarosso, frazione molto piccola dell’intera radiazione solare (infatti abbiamo visto che quasi tutta la radiazione solare è compresa fra 0.15 e 4 μm e che invece assorba *tutta* la radiazione termica nell’infrarosso lontano, diciamo oltre i 4 μm , sappiamo infatti che la radiazione emessa dalla superficie terrestre è compresa fra 5 e 25 μm , quindi in questa banda il vetro della serra è opaco mentre è perfettamente trasparente per la banda entrante fra 0.15 e 4 μm).

Ovviamente nessun materiale realizza esattamente queste condizioni, ma alcuni le approssimano abbastanza bene, il vetro ne è un ottimo esempio; comunque l’assorbimento dipende sempre anche dallo spessore della lastra. Il tetto L (vedi figura) riceve e assorbe energia dalla radiazione termica R_p emessa dalla piastra (terreno), quindi si riscalda ed emette radiazione verso l’esterno R_{Lu} (up) e verso la piastra R_{Ld} (down). Nella situazione stazionaria ora la piastra deve emettere una quantità di energia radiante infrarossa in grado di bilanciare l’energia che riceve dal Sole e quella che riceve dal tetto R_{Ld} .



Bilancio radiativo:

$$R_s + R_{Ld} = R_p \quad (a)$$

$$R_p = R_{Lu} + R_{Ld} \quad (b)$$

Sommando membro a membro

$$R_s + R_{Ld} + R_p = R_p + R_{Lu} + R_{Ld} \quad \text{ossia}$$

$$R_s = R_{Lu} \quad (\text{energia entrante} = \text{energia uscente})$$

per le proprietà del vetro del tetto della serra si può porre $R_{Ld} \cong R_{Lu}$ (poco assorbimento, vetro sottile), dunque

$R_S = R_{Ld}$ ed allora dalla (a) ne viene che

$$R_p = 2R_S \quad (1)$$

Ciò significa che il flusso di radiazione dal coperchio alla piastra R_{Ld} è circa uguale a quello del sole così che l'energia totale che arriva alla piastra è il doppio dell'energia che arriva in assenza del tetto e la piastra dovrà ora emettere un'energia doppia di quella che arriva sulla piastra dal sole. Per valutare questo aumento di temperatura dobbiamo ricorrere alla legge di Stefan–Boltzmann.

L'energia emessa, o meglio e più precisamente la sua intensità (energia emessa ogni secondo riferita all'unità di superficie- W/m^2) da un corpo per radiazione termica è proporzionale alla quarta potenza della sua temperatura assoluta (Legge di Stefan-Boltzmann)

$$I = \sigma T^4$$

$$\text{Si ha evidentemente } R_p = \sigma T_{\text{superficie}}^4 ; R_S = I_a$$

Avendo indicato con I_a l'intensità assorbita dal sistema (cioè in entrata)

allora la relazione (1) ci dice che

$$\sigma T_{\text{sup}}^4 = 2I_a$$

$$T_{\text{sup}} = \sqrt[4]{\frac{2I_a}{\sigma}} = \sqrt[4]{2} \sqrt[4]{\frac{I_a}{\sigma}}$$

Se invece rimuoviamo la serra si ha: energia entrante = energia uscente $I_a = \sigma T_{\text{sup},0}^4$ cioè

$$T_{\text{sup},0} = \sqrt[4]{\frac{I_a}{\sigma}} \text{ avendosi}$$

$$T_{\text{sup}} = \sqrt[4]{2} T_{\text{sup},0}$$

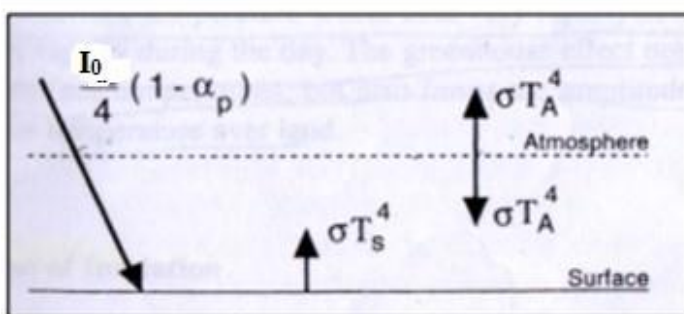
cioè

$$T_{\text{sup}} = 2^{1/4} T_{\text{sup},0} = 1.189 T_{\text{sup},0} \approx T_{\text{sup},0} + 0.2 T_{\text{sup},0} = T_{\text{sup},0} + 20\% T_{\text{sup},0}$$

In conclusione la presenza della serra, con le premesse fatte, fa aumentare la temperatura al suolo del 20%.

B) Temperatura di emissione della Terra considerando l'atmosfera come corpo nero

Tornando al nostro sistema consideriamo un'atmosfera costituita da un unico strato a temperatura T_A che si comporti come un corpo nero nei confronti della radiazione terrestre (ossia con emissività $\varepsilon = 1$) ma che sia trasparente alla radiazione solare (in analogia al comportamento della serra). L'atmosfera risulta quindi in grado di interagire in modo assai differente con la radiazione terrestre (infrarosso lontano) e solare (ultravioletto, visibile e infrarosso vicino). Calcoliamo il bilancio energetico per questo sistema Terra-atmosfera, in perfetta analogia con il calcolo precedente relativo alla serra.



Il bilancio al top dell'atmosfera: siccome l'atmosfera nel modello che stiamo considerando assorbe tutta la radiazione terrestre (infrarosso lontano) ed emette come un corpo nero, l'unica radiazione emessa verso lo spazio sarà quella atmosferica, quindi il bilancio va ora riferito alla temperatura dell'atmosfera T_A :

rad. entrante (assorbita dal sistema) = rad. uscente (dovuta al corpo nero atmosfera)

$$\frac{I_0}{4} (1 - \alpha) = \sigma T_A^4$$

o usando la notazione già introdotta, con I_a indicante l'intensità media assorbita dal sistema, si ha

$$I_a = \sigma T_A^4$$

Consideriamo ora il bilancio energetico del solo strato atmosferico, esso emette energia radiante sia verso l'alto che verso il basso, quindi l'energia uscente da essa è $2\sigma T_A^4$, mentre l'energia entrante (ricordando che atmosfera lascia passare indisturbata la radiazione entrante) è l'energia di emissione (infrarosso lontano) della superficie della Terra, indicando con T_s la sua temperatura superficiale, essa vale σT_s^4 , quindi possiamo scrivere che per l'atmosfera si ha

$$2\sigma T_A^4 = \sigma T_s^4$$

Abbiamo dunque il sistema

$$I_a = \sigma T_A^4$$

$$2\sigma T_A^4 = \sigma T_s^4$$

Risolvendo si ha ($I_a = 240 \text{ W/m}^2$):

$$T_s = \sqrt[4]{\frac{2I_a}{\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot 240}{5.67 \cdot 10^{-8}}} = 303 \text{ K} = 30^\circ \text{C}$$

$$T_A = \sqrt[4]{\frac{I_a}{\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{240}{5.67 \cdot 10^{-8}}} = 255 \text{ K} = -18^\circ \text{C}$$

Dalla prima relazione si evince che

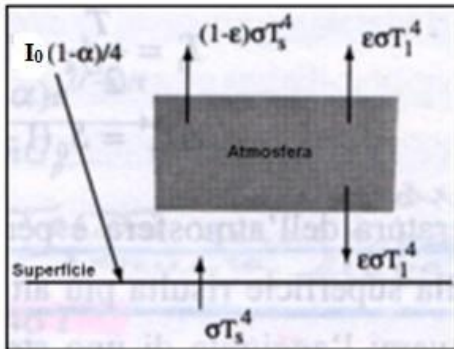
$$T_s = \sqrt[4]{2} T_A \approx 1.2 T_A$$

In accordo con quanto visto sopra per la serra.

In questo grossolano modello di schematizzazione del bilancio radiativo della Terra abbiamo ottenuto una chiara indicazione che la temperatura superficiale della Terra è sicuramente più alta di quella calcolata nel nostro primo approccio dove avevamo ignorato la presenza dell'atmosfera, ma il valore ottenuto è troppo alto, infatti la temperatura media al suolo della Terra è circa 15°C . Questa discrepanza è dovuta dall'aver considerato l'atmosfera emettere come un corpo nero, mentre in realtà non lo è. Perciò dovremo considerare la sua emissività (ϵ) e trasmissività ($1-\epsilon$) (esso emette radiazione infrarossa come un corpo grigio $\epsilon \sigma T_A^4$ ed assorbe parte dell'infrarosso terrestre (circa il 80%, quindi $\epsilon \approx 0.8$) lasciando passare la frazione rimanente $(1-\epsilon) \sigma T_s^4$).

C) Temperatura di emissione della Terra considerando l'atmosfera come corpo grigio

La figura precedente va modificata nel seguente modo: indicando con I_a la radiazione entrante nel sistema, cioè quella assorbita, con I_s la radiazione di corpo nero della Terra, e con I_A la radiazione dell'atmosfera si ha (nella figura indicata con il pedice 1):



Scriviamo allora il bilancio per lo strato dell'atmosfera:

$$2\epsilon\sigma T_A^4 + (1-\epsilon)\sigma T_s^4 = \sigma T_s^4 \Rightarrow 2\epsilon\sigma T_A^4 = \epsilon\sigma T_s^4$$

ed il bilancio per la superficie terrestre

$$I_a + \epsilon\sigma T_A^4 = \sigma T_s^4$$

Risolviendo il sistema si ha

$$2\epsilon\sigma T_A^4 = \epsilon\sigma T_s^4$$

$$I_a + \epsilon\sigma T_A^4 = \sigma T_s^4$$

Si ha

$$T_s = \sqrt[4]{\frac{2I_a}{\sigma(2-\epsilon)}}$$

$$T_A = \sqrt[4]{\frac{I_a}{\sigma(2-\epsilon)}}$$

Da cui si vede che per $\epsilon = 1$ si ricade nel caso precedente, siccome $\epsilon < 1$ ora la T_s sarà minore.

Utilizzando il valore dell'emissività come valutato dall'IPCC (vedi N.B.) pari a 0.6 si ha

$$T_s = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot 240}{5.67 \cdot 10^{-8}(2-0.6)}} = 296 \text{ K} = 23^\circ\text{C}$$

$$T_A = \sqrt[4]{\frac{240}{5.67 \cdot 10^{-8}(2-0.6)}} = 234 \text{ K} = -38^\circ\text{C}$$

Per ottenere il valore corretto della temperatura terrestre occorre usare il valore 0.77 per l'emissività:

$$T_s = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot 240}{5.67 \cdot 10^{-8} (2 - 0.77)}} = 288 \text{ K} = 15^\circ\text{C}$$

$$T_A = \sqrt[4]{\frac{240}{5.67 \cdot 10^{-8} (2 - 0.77)}} = 242 \text{ K} = -31^\circ\text{C}$$

Rispetto alla trattazione precedente la temperatura della superficie risulta correttamente più bassa, passando dai 30 °C a 15 °C a seguito dell'introduzione dell'emissività, con valore di $\varepsilon = 0.77$.

La T_s è diminuita del fattore $[1/(2 - \varepsilon)]^{1/4}$ rispetto al caso precedente in cui l'atmosfera era considerata con $\varepsilon = 1$.

Considerazione finale.

Riguardo ai calcoli fatti, si tenga presente che il modello utilizzato non è ancora ad un livello tale di raffinatezza tale da restituire il valore corretto della temperatura terrestre. E' un esempio semplice ed idealizzato che serve solo a far capire come ci si può progressivamente avvicinare alla descrizione della realtà, a partire dal primo modello grezzo, attraverso ipotesi via via più realistiche. Ad esempio, per la radiazione solare entrante di fatto si considera solo l'albedo del pianeta e nessuna interazione in atmosfera mentre in realtà non è così semplice. La fisica dell'atmosfera è molto complessa, interagiscono fra loro diversi componenti e non tutto è chiaro e definito fin nei dettagli.

Nota: l'emissività dell'atmosfera, come quella di qualsiasi altro materiale, può variare in base a diversi fattori. L'emissività è una misura della capacità di un materiale di emettere radiazione termica, ed è solitamente espressa come un valore compreso tra 0 e 1, dove 0 rappresenta un materiale che riflette tutta la radiazione termica incidente (è un ottimo riflettore), e 1 rappresenta un materiale che emette tutta la radiazione termica incidente (corpo nero).

N.B. L'IPCC riporta un flusso di radiazione termica in uscita (OLR) di $I_{uscita} = 239$ (237-242) W/m^2 , in cui i valori indicate in parentesi indicano gli intervalli di confidenza al 95%, a partire dal 2015, ed un SRL (radiazione in entrata) $I_{entrata} = 398 \text{ W/m}^2$. Questi valori indicano che l'atmosfera (con le nuvole incluse) riduce l'emissività complessiva della Terra, rispetto alle sue emissioni superficiali, di

un fattore di $\frac{I_{uscita}}{I_{entrata}} = \frac{239}{398} = 0.6$. In altre parole, le emissioni nello spazio sono date da

$$I_{uscita} = \epsilon_{eff} \sigma T^4 \text{ dove}$$

$$\epsilon_{eff} \approx 0.6$$

è l'emissività effettiva della Terra vista dallo spazio

e $T_s \equiv (I_{entrata}/\sigma)^{1/4} \approx 289 \text{ K}$ (16 °C) è la temperatura effettiva della superficie.

Curiosità: l'inversione termica

Si parla di inversione termica quando la temperatura dell'aria aumenta salendo di quota per alcune centinaia di metri, invece di diminuire.

L'inversione termica al suolo è un fenomeno temporaneo dovuto al fatto che la roccia di notte si raffredda molto rapidamente e conseguentemente gli strati a contatto con il suolo risultano più freddi di quelli sovrastanti. Al sorgere del sole il fenomeno scompare. Il fenomeno è più frequente in inverno quando le notti sono lunghe e fredde. Fenomeno analogo si ha nelle zone montuose, quando il sole al mattino riscalda prima le zone elevate, mentre nelle vallate profonde si conservano il freddo e l'umidità notturna.

L'inversione termica in quota è più duratura e si verifica quando una massa d'aria scende e si riscalda per compressione: se non si rimescola con quella più fredda presente al suolo, troviamo una temperatura inferiore in basso rispetto agli strati più alti. Se l'aria al suolo è carica di umidità si formano le nebbie come quelle invernali tipiche della Pianura Padana dove, nelle grandi città, le goccioline si mescolano ai fumi e alle polveri formando lo smog, che rimane imprigionato dalla cappa di aria calda sovrastante impedendone il rimescolamento.

Il Bilancio Energetico del Corpo Umano

Analisi quantitativa del Metabolismo e della Termoregolazione

A cura di Giancarlo Buccella



Indice

1. Introduzione
 2. Principi Fondamentali
 3. Metabolismo Basale e Totale
 4. Apporti Energetici
 5. Dispendio Energetico
 6. Termoregolazione
 7. Bilancio Energetico e Peso Corporeo
 8. Fattori che Influenzano il Bilancio
 9. Conclusioni
-

Introduzione

Il corpo umano è un sistema complesso che, come ogni macchina, ha bisogno di energia per funzionare. Questa energia proviene principalmente dal cibo che ingeriamo e viene spesa attraverso una serie di processi fisiologici e attività quotidiane. Comprendere il bilancio energetico è fondamentale per mantenere uno stato di salute ottimale e prevenire malattie legate a squilibri energetici, come obesità o malnutrizione.

Il bilancio energetico del corpo umano è la differenza tra l'energia introdotta con l'alimentazione e l'energia consumata dal corpo. Un bilancio positivo (più calorie introdotte che consumate) porta ad un aumento di peso, mentre un bilancio negativo (più calorie consumate che introdotte) porta alla perdita di peso. Un bilancio energetico equilibrato, invece, permette il mantenimento del peso corporeo.

Il bilancio energetico del corpo umano rappresenta uno dei principi fondamentali della fisiologia umana e costituisce la base per comprendere i meccanismi che regolano il peso corporeo, la performance fisica e la salute metabolica. Questo equilibrio dinamico tra energia introdotta e energia consumata determina se un individuo mantiene, aumenta o diminuisce il proprio peso corporeo.

Il corpo umano può essere considerato come un sistema termodinamico aperto, ossia che scambia continuamente energia e materia con l'ambiente circostante. L'energia viene introdotta attraverso gli alimenti e viene utilizzata per mantenere le funzioni vitali, sostenere l'attività fisica e regolare la temperatura corporea.

La comprensione quantitativa di questi processi è essenziale non solo dal punto di vista teorico, ma anche per applicazioni pratiche in ambito clinico, sportivo e nutrizionale. La capacità di calcolare con precisione il fabbisogno energetico individuale e di predire le variazioni del peso corporeo in risposta a modifiche dell'apporto calorico o dell'attività fisica rappresenta uno strumento fondamentale per la gestione della salute e della performance.

Il corpo umano è un sistema complesso che, come ogni macchina, ha bisogno di energia per funzionare. Questa energia proviene principalmente dal cibo che ingeriamo e viene spesa attraverso una serie di processi fisiologici e attività quotidiane. Comprendere il bilancio energetico è fondamentale per mantenere uno stato di salute ottimale e prevenire malattie legate a squilibri energetici, come obesità o malnutrizione.

L'energia è necessaria non solo quando una persona è fisicamente attiva, ma anche quando il corpo è sdraiato immobile. A seconda del livello di attività fisica di un individuo, tra il 50 e l'80% dell'energia spesa ogni giorno è dedicata ai processi metabolici di base (metabolismo basale), che consentono al corpo di mantenersi caldo, respirare, pompare sangue e svolgere numerose attività fisiologiche e biosintetiche, tra cui la sintesi di nuovi tessuti nei bambini in crescita e nelle donne in gravidanza e allattamento. Anche la digestione e la successiva elaborazione del cibo da parte dell'organismo consumano energia e producono calore. Questo fenomeno, noto come effetto termico del cibo (o termogenesi indotta dalla dieta), rappresenta circa il 10% del dispendio energetico giornaliero, variando leggermente a seconda della composizione della dieta e delle abitudini alimentari precedenti. Infine, la componente più variabile del dispendio energetico è l'attività fisica, che include esercizio fisico e altre attività volontarie, nonché attività involontarie come agitarsi, tremare e mantenere la postura. L'attività fisica rappresenta dal 20 al 40% del dispendio energetico totale, una percentuale ancora inferiore in una persona molto sedentaria e maggiore in una persona estremamente attiva.

Principi Fondamentali

Prima Legge della Termodinamica

Il bilancio energetico del corpo umano è governato dalla prima legge della termodinamica, che stabilisce il principio di conservazione dell'energia, esso afferma che l'energia non può essere creata né distrutta, ma solo trasformata da una forma all'altra o trasferita da un sistema all'altro, applicata al corpo umano, questa legge può essere espressa come:

$$\Delta U = E_{in} - E_{out} \quad (1)$$

Dove:

- ΔU = variazione dell'energia interna
- E_{in} = energia introdotta (alimentazione)
- E_{out} = energia ceduta all'ambiente (sotto forma di calore e lavoro)

Questa considerazione discende dal considerare la seguente relazione, che fonda il primo principio, che nella sua forma standard è la seguente:

$$\Delta U = Q - L \quad (2)$$

dove ΔU è la variazione di energia interna del sistema (U è la somma dell'energia cinetica e potenziale di tutte le particelle del sistema), i valori di Q ed L possono essere sia positivi che negativi; secondo la convenzione dei segni Q negativo se ceduto, positivo se assorbito e viceversa per L .

Q è il calore scambiato (assorbito o ceduto) con l'ambiente esterno

L è il lavoro meccanico scambiato (assorbito o ceduto) con l'ambiente esterno

Quindi Q ed L vanno inseriti nella (2) con il loro segno.

Se consideriamo l'intero universo, esso è un sistema chiuso, in quanto proprio per definizione di universo non esiste un ambiente esterno ad esso, quindi il secondo membro sarà nullo: $\Delta U = 0$ e questo significa che ci sarà nessuna variazione dell'energia interna del sistema, ossia il suo contenuto energetico rimane costante; ecco quindi da dove nasce l'affermazione che nulla si crea e nulla si distrugge ma tutto si trasforma.

Per un organismo in equilibrio $\Delta U = 0$, esso mantiene il proprio peso costante e non ci sarà diminuzione o aumento di energia interna. Siccome la vita dell'organismo ha bisogno di un continuo apporto di energia vi dovrà essere un qualche meccanismo interno al corpo tale da rifornire continuamente "le perdite energetiche", tale meccanismo è il metabolismo, ossia quel processo che "trasforma" il cibo ingerito in energia. La relazione (2) è la formulazione classica del primo principio della termodinamica, esso descrive un sistema che scambia solo lavoro e calore con l'ambiente, ma

nel nostro caso il corpo riceve energia dall'ambiente (dall'assunzione di cibo), per tener conto di questo termine la relazione diventa:

$$\Delta U = E_{in} + Q - L \quad (3)$$

Questa relazione è la formulazione del Primo principio della termodinamica esteso ai sistemi aperti, in cui cioè avviene un "rifornimento" di energia dall'esterno.

Se poniamo:

Energia in entrata = E_{in} = energia chimica contenuta nei cibi + calore assorbito + lavoro assorbito

Energia in uscita = E_{out} = calore ceduto + lavoro fatto sull'ambiente

Allora la (3) diventa

$$\Delta U = E_{in} + E_{out}$$

Ritrovando la (1).

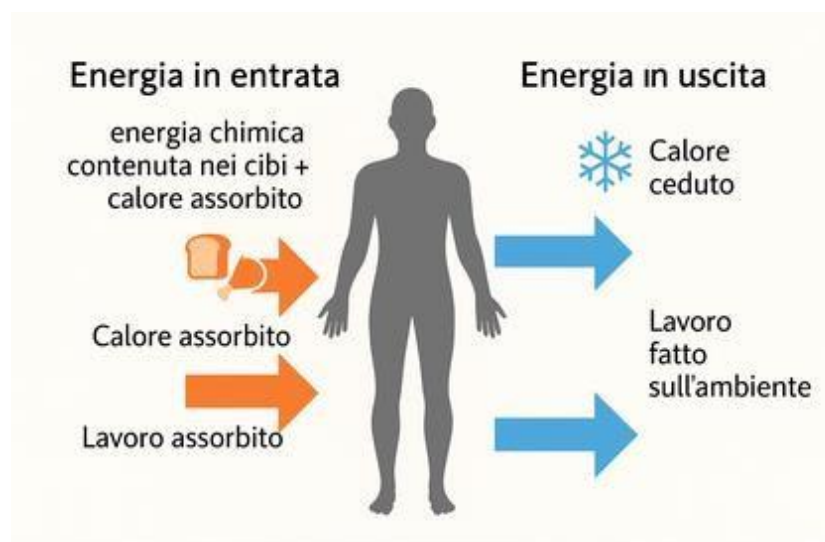
Calore assorbito: quando la temperatura del corpo è inferiore a quella dell'ambiente, ad esempio quando se si è in una sauna o semplicemente esposti al sole o sotto una lampada solare...

Lavoro assorbito: massaggio meccanico (è una macchina agisce sul corpo, comprimendo e rilasciando muscoli), terapia ad ultrasuoni è energia meccanica oscillante trasferita ai tessuti...

Calore ceduto: quando la temperatura del corpo è superiore a quello dell'ambiente, ad esempio quando si è accaldati, (esercizio fisico, esposizione a fonti di calore) il corpo sudando cede calore all'ambiente, quando si è all'aperto in inverno...

Lavoro ceduto: quando si fa ad esempio un lavoro meccanico contro la gravità (sollevare pesi), camminare, correre, parlare, scrivere...

Graficamente



Quando si dice che "l'energia in entrata deve uguagliare quella in uscita", si sta implicitamente assumendo che sia $\Delta U = 0$, cioè che non ci sia variazione dell'energia interna del corpo.

Per quanto concerne il lavoro assorbito che rappresenta l'energia meccanica ricevuta dall'esterno (se una persona viene spinta o sollevata da una forza esterna, sta ricevendo lavoro, ad esempio, essere trasportati passivamente su una sedia a rotelle o essere sollevati da un'altra persona o da un macchinario sono esempi di lavoro compiuto sul corpo), esso non viene immagazzinato come energia interna a meno di casi molto particolari, (come ad esempio essere sottoposti ad una fonte sonora molto intensa, infatti le onde sonore esercitano una pressione sul corpo trasferendo così energia, o anche durante un massaggio, in tal caso ai muscoli viene applicata una forza trasferendo così lavoro), e comunque anche in questi casi marginali l'entità di energia trasferita è veramente minimale per cui è del tutto lecito trascurare il lavoro assorbito.

Rispetto invece al calore assorbito possiamo affermare che è anch'esso trascurabile, infatti in ambienti normali, la temperatura esterna è uguale o inferiore a quella corporea, quindi il corpo cede calore (non lo assorbe). Solo in ambienti molto caldi (es. sauna, deserto) il corpo può assorbire un po' di calore che in genere viene dissipato immediatamente.

Conclusione: in condizioni normali, sia il lavoro che il calore assorbito sono del tutto trascurabili.

[N.B. Si potrebbe pensare che la temperatura esterna ottimale fosse quella corporea di 37 °C, infatti fra due corpi alla stessa temperatura non vi è transito di calore e quindi sembrerebbe la situazione ideale di equilibrio termico. Ma non è così a causa del fatto che la sensazione di caldo non dipende solo dalla temperatura assoluta dell'ambiente, ma dal fatto che la capacità del corpo di dissipare calore diminuisce man mano che la temperatura esterna si avvicina ai 37 °C. A 30–32 °C: l'aria è già molto vicina alla temperatura del corpo. L'irraggiamento e la convezione non bastano più. Il corpo attiva la sudorazione come principale strategia di raffreddamento. Se l'umidità è alta, il sudore non evapora facilmente ci sentiamo ancora più accaldati. A 37 °C (o oltre): non solo non perdiamo più calore all'ambiente, ma potremmo assorbirne. Il corpo è costretto a sudare continuamente. In mancanza di evaporazione efficace, si rischia ipertermia.]

Riprendendo la relazione (3) e considerando che come abbiamo detto il calore e lavoro saranno essenzialmente quelli ceduti all'ambiente, in base alla convezione sui segni, L sarà positivo e Q negativo, per cui avremo

$$\Delta U = E_{in} - Q - L = E_{in} - (Q + L) = E_{in} - E_{out}$$

Q ed L al secondo membro sono entrambi negativi e pertanto essi rappresentano l'energia in uscita. Se ad esempio $(Q + L) > E_{in}$ l'energia interna deve diminuire ($\Delta U < 0$) e viceversa.

Equazione del Bilancio Energetico

Il sistema termodinamico “corpo umano” produce calore e lavoro attraverso la sua attività metabolica (metabolismo base + energia per la digestione) e il suo movimento muscolare (attività fisica). Con queste premesse è possibile scrivere l'equazione fondamentale del bilancio energetico che, nel caso di pareggio fra energia in entrata ed energia in uscita, è:

$$E_{in} = E_{out} \equiv BMR + TEF + A \quad (4)$$

- E_{in} = energia introdotta con il cibo (kcal/giorno)
- BMR = metabolismo basale (Basal Metabolic Rate)
- TEF = effetto termico degli alimenti (Thermic Effect of Food) cioè l'energia spesa per la digestione
- A = attività fisica volontaria e involontaria

Se il bilancio non è a pareggio, indicando con ΔS il “disavanzo”, la (4) diventa:

$$\Delta S = E_{in} - E_{out} = E_{in} - (BMR + TEF + A) \quad (5)$$

A parole: l'energia che entra nell'organismo meno l'energia spesa è uguale al disavanzo, che può essere positivo (aumento di peso), negativo (perdita di peso) o nullo (situazione stazionaria).

Il termine riguardante l'attività motoria (A) viene diviso in due contributi:

- TEA: attività fisica programmata (Thermic Effect of Activity)
- NEAT: termogenesi non associata all'attività fisica programmata (Non-Exercise Activity Thermogenesis)

Allora possiamo riscrivere la (1) esplicitando la A nelle sue due componenti, avendosi:

$$E_{in} = BMR + TEF + TEA + NEAT \quad (6)$$

Ma come raccordare questa relazione con la (3)? Basta considerare che BMR e TEF sono attività che non producono lavoro meccanico, pertanto tutta l'energia consumata dal BMR + TEF deve essere convertita in qualcos'altro, questo qualcos'altro è il calore, Il BMR è la principale fonte di calore che ci permette di mantenere la nostra temperatura corporea costante intorno ai 37°C.

Soffermiamoci un attimo su questo aspetto.

Il BMR rappresenta l'energia spesa per compiere un'enorme quantità di "lavoro" che però rimane confinato all'interno del nostro corpo. Questo include:

Sintesi di molecole: Costruire nuove proteine, ormoni, neurotrasmettitori, enzimi, ecc.

Trasporto attivo: Le famose pompe ioniche (come la pompa sodio-potassio) che consumano ATP per mantenere i gradienti elettrici e chimici attraverso le membrane cellulari, fondamentali per la funzione nervosa e muscolare.

Attività elettrica: L'attività incessante del cervello e del sistema nervoso.

Replicazione e riparazione cellulare: La continua sostituzione di cellule vecchie.

Contrazione dei muscoli involontari: Il cuore che pompa sangue, il diaframma per la respirazione.

Tutte queste sono attività vitali ed energeticamente dispendiose. Dal punto di vista della termodinamica, che guarda al sistema "corpo" nel suo insieme e ai suoi scambi con l'esterno, tutto questo lavoro interno, alla fine, si degrada in calore all'interno del corpo stesso. Perché?

Inefficienza dei Processi: nessuna conversione di energia è efficiente al 100%. Quando l'ATP viene usato per alimentare la pompa sodio-potassio, una parte dell'energia compie il "lavoro" di spostare gli ioni, ma un'altra parte viene immediatamente persa come calore a causa dell'inefficienza del processo chimico.

Lavoro a circuito chiuso: si pensi al cuore. Esso compie un lavoro meccanico pompando il sangue. Ma questo lavoro è interno al sistema. L'energia cinetica data al sangue viene poi dissipata in calore a causa dell'attrito del sangue contro le pareti dei vasi. Il cuore non sta compiendo un lavoro sull'ambiente esterno. L'effetto netto, per l'intero organismo, è il consumo di energia chimica (dagli alimenti) e la produzione di calore.

Analogia della fabbrica: si può pensare al corpo come a una fabbrica sigillata. L'energia elettrica (cibo) entra. Questa energia alimenta i macchinari (lavoro biologico interno) che assemblano prodotti. Tuttavia, ogni motore, ogni computer, ogni luce in quella fabbrica, mentre funziona, produce calore. Se ci si mette fuori dalla fabbrica e si misura l'energia che esce, non si vedrà uscire "lavoro", ma solo calore dissipato dalle pareti. L'energia è stata usata per scopi vitali all'interno, ma il suo sottoprodotto finale, misurabile dall'esterno, è il calore.

Il BMR rappresenta l'energia utilizzata per compiere tutto il lavoro biologico interno necessario a mantenerci in vita. A causa delle leggi della termodinamica, il risultato netto di tutta questa attività interna è la continua produzione di calore.

Per quanto riguarda l'attività muscolare occorre precisare che esso è un processo inefficiente in quanto produce solo il 20 % di lavoro meccanico, il restante 80% viene disperso sotto forma dell'unico altro modo di trasferire energia, cioè di calore.

Quindi la (3) diventa (considerando il caso in cui il calore venga ceduto all'ambiente)

$$\Delta U = E_{in} - [L (20\% A) + Q (BMR+TEF+80\%A)] \quad (7)$$

Il calore Q, come vedremo, verrà ceduto all'ambiente tramite diversi processi di scambio.

Unità di Misura

L'energia, nei processi in cui interviene il calore, viene comunemente misurata in:

Caloria (cal): quantità di energia necessaria per innalzare di 1°C la temperatura di 1 g d'acqua distillata da 14,5 °C a 15,5 °C, alla pressione atmosferica normale (detta in passato "piccola caloria" (cal) per distinguerla dalla "grande caloria" (Cal), pari a 1 kcal);

$$1\text{Cal} = 1000 \text{ cal} = 1 \text{ kcal}$$

In fisica, l'energia si misura in joule. Tuttavia, in passato, quando si iniziò a studiare i fenomeni termici, il legame tra calore ed energia non era ancora noto. Per questo motivo, fu creata un'unità di misura specifica per il calore: la caloria. Oggi si preferisce in genere esprimere sempre l'energia in joule.

"Conversione (caloria – joule): $1 \text{ cal} = 4,184 \text{ J}$

Energia introdotta (E_{in})

L'energia introdotta nell'organismo è quella contenuta nei legami chimici dei nutrienti.

Il nostro corpo non "brucia" il cibo come farebbe un fuoco. Utilizza un processo molto più controllato e efficiente chiamato metabolismo, in particolare attraverso le reazioni di catabolismo.

Il processo chiave è la respirazione cellulare. Funziona così:

1. Rottura dei Legami: Attraverso una serie di reazioni chimiche complesse (come la glicolisi e il ciclo di Krebs), l'organismo smonta le molecole di cibo (es. glucosio) pezzo per pezzo, rompendo i loro legami chimici.
2. Rilascio di Energia: La rottura di questi legami ad alta energia rilascia l'energia che contenevano.
3. Cattura e Trasferimento: Questa energia non viene usata direttamente. Sarebbe inefficiente e dispersiva. Viene invece catturata e utilizzata per "caricare" una molecola speciale, la "moneta energetica" della cellula: l'ATP (Adenosina Trifosfato). L'energia viene usata per aggiungere un gruppo fosfato all'ADP (Adenosina Difosfato), trasformandolo in ATP.

I macronutrienti forniscono energia secondo questi valori, espressi sia in termini di calorie che di joule

Macronutriente	Energia (kcal/g)	Energia (kJ/g)
Carboidrati	4,0	16,7
Proteine	4,0	16,7
Grassi	9,0	37,7
Alcol	7,0	29,3

Il calcolo dell'apporto energetico totale si basa sulla composizione della dieta, spesso viene utilizzata la seguente formula empirica:

Energia totale = (grammi di carboidrati $\times$ 4) + (grammi di proteine $\times$ 4) + (grammi di grassi $\times$ 9) + (grammi di alcol $\times$ 7)

Per una dieta contenente ad esempio: 250g di carboidrati, 100 g di proteine, 80 g di grassi e 20g di alcol si ha

Energia totale = $(250 \times 4) + (100 \times 4) + (80 \times 9) + (20 \times 7) = 1000 + 400 + 720 + 140 = 2260 \text{ kcal}$

Ma non tutta l'energia contenuta negli alimenti è disponibile per il metabolismo:

Fattore	Perdita Energetica	%
Digestione incompleta	Feci	5-10%
Perdite urinarie	Urea, creatinina	2-3%
Fermentazione intestinale	Gas intestinali	1-2%

Quindi effettivamente l'energia metabolizzabile oscilla fra l'85- 92%

Il termine E_{in} , quindi (supponendo, come normalmente accade, che il calore e lavoro assorbiti siano del tutto trascurabili) si può calcolare in maniera approssimativa facendo il 90% dell'energia contenuta nei cibi che vengono assunti.

Metabolismo Basale (BMR)

Il metabolismo rappresenta l'insieme delle reazioni biochimiche che avvengono nell'organismo per mantenere la vita, esso è l'insieme di tutte le reazioni chimiche che avvengono nelle cellule di un organismo, e si divide in due processi principali: catabolismo e anabolismo. Il catabolismo è la fase di scomposizione delle molecole complesse in molecole più semplici, con rilascio di energia. L'anabolismo è il processo opposto, in cui l'energia viene utilizzata per costruire molecole complesse a partire da molecole più semplici.

Il metabolismo basale rappresenta la quantità minima di energia necessaria per mantenere le funzioni vitali in condizioni di riposo completo. Rappresenta circa il 60-70% del dispendio energetico totale in individui sedentari. Si misura da svegli, in posizione supina, a digiuno da almeno 12 ore, a riposo fisico e mentale, e in un ambiente con temperatura neutra (22 – 26°C).

Il tasso metabolico M , ossia la velocità con cui il corpo utilizza l'energia introdotta, che si misura in watt (energia/tempo), non può essere misurato facilmente, esso viene determinato principalmente tramite la calorimetria indiretta, che si basa sul principio che tutto il metabolismo energetico dipende dal consumo di ossigeno (O_2) e dalla produzione di anidride carbonica (CO_2).

La formula più utilizzata è l'equazione di Weir:

$$M \text{ (in kcal/min)} = 3.941 \cdot V_1(O_2) + 1.106 \cdot V_2(CO_2)$$

dove:

$V_1(O_2)$ è il volume di ossigeno consumato in litri al minuto (L/min).

$V_2(CO_2)$ è il volume di anidride carbonica prodotta in litri al minuto (L/min).

Considerando ad esempio un uomo adulto di 70 kg che sia a riposo (condizioni basali). I valori tipici di scambio gassoso sono:

$$V_1(O_2) \approx 0.25 \text{ L/min}$$

$$V_2(\text{CO}_2) \approx 0.21 \text{ L/min}$$

Applicando l'equazione di Weir si ha:

$$M = (3.941 \cdot 0.25) + (1.106 \cdot 0.21) = 0.985 + 0.232 = 1.217 \text{ kcal/min}$$

Poco più di una chilocaloria al minuto.

Per conoscere il valore giornaliero occorre moltiplicare per i minuti presenti in 24 ore, ossia 1440, avendosi

$$M = 1750 \text{ kcal/giorno}$$

Possiamo convertire in watt questo risultato, ricordando che la potenza è l'energia scambiata nell'unità di tempo (1 kcal = 4184 J, 1 min = 60 s), si ha:

$$M \approx 85 \text{ W}$$

Questo è l'ordine di grandezza della potenza sviluppata dal nostro corpo per il suo Metabolismo Basale. Ovviamente quando il corpo non è a riposo il suo valore aumenta.

Per una persona sveglia e seduta, a causa del tono muscolare e di piccole attività, il valore è leggermente più alto di quello basale:

$$M \approx 100 \text{ W}$$

Il metabolismo basale, in alternativa al metodo diretto, può essere stimato attraverso diverse formule empiriche. Una delle più utilizzate è la formula di Harris-Benedict (il cui risultato è il kcal):

$$\text{Per gli uomini: BMR} = 88,36 + (13,4 \cdot \text{peso}) + (4,8 \cdot \text{altezza}) - (5,7 \cdot \text{età})$$

$$\text{Per le donne: BMR} = 447,6 + (9,2 \cdot \text{peso}) + (3,1 \cdot \text{altezza}) - (4,3 \cdot \text{età})$$

Esempio numerico:

Un uomo di 30 anni, 75 kg di peso e 180 cm di altezza:

$$\text{BMR} = 88,36 + (13,4 \cdot 75) + (4,8 \cdot 180) - (5,7 \cdot 30) = 88,36 + 1005 + 864 - 171 = 1786 \text{ kcal}$$

Il BMR è distribuito tra i diversi organi e tessuti:

Organo/Tessuto	Perc. del BMR	kcal/kg tessuto/giorno
Fegato	21%	200
Cervello	20%	240
Cuore	9%	440
Reni	8%	440
Muscolo scheletrico	22%	13
Tessuto adiposo	4%	4,5
Altri tessuti	16%	

Fattori che influenzano il Metabolismo Basale

Età

Il metabolismo basale diminuisce con l'età: $\Delta\text{BMR} = -1$ a -2% per decade dopo i 30 anni

Sesso

Le differenze di genere nel metabolismo:

- Uomini: BMR mediamente 10-15% superiore
- Differenze nella composizione corporea
- Effetti ormonali (testosterone vs estrogeni)

Composizione Corporea

$$\text{BMR} = 21,6 \cdot \text{FFM (kg)} + 370$$

Dove FFM è la massa magra in kg.

Genetica

La variabilità genetica del metabolismo:

- Variazione inter-individuale: ± 200 -300 kcal/giorno
- Polimorfismi genetici influenzano:
 - Proteine disaccoppianti (UCP)
 - Recettori β -adrenergici
 - Ormoni tiroidei

Temperatura Ambientale

Zona di Termoneutralità: 22-27 °C (per un corpo vestito in modo leggero)

Al di fuori di questa zona:

- Freddo: +10-15% del BMR per ogni 10°C sotto 18°C
- Caldo: +5-10% del BMR per ogni 10°C sopra 25°C

Altitudine

Effetti dell'ipossia:

- Aumento del BMR del 5-10% sopra i 3000m
- Aumento della ventilazione
- Modifiche nella composizione corporea

Stato Nutrizionale

- Digiuno: -20-30% del BMR in 72 ore
- Restrizione calorica: -15-20% del BMR in 6 mesi

- Overfeeding: +10-15% del BMR

Fattori Patologici

Disturbi Tiroidei

- Ipertiroidismo: +20-30% del BMR
- Ipotiroidismo: -20-30% del BMR

Febbre

Aumento del BMR = 13% per ogni grado di febbre

Malattie Croniche

- Cancro: +10-20% del BMR
- Insufficienza cardiaca: +15-25% del BMR
- Malattie respiratorie: +10-15% del BMR

Effetto termico degli alimenti (TEF)

L'effetto termico del cibo (TEF, dall'inglese "Thermic Effect of Food") rappresenta l'energia che il corpo utilizza per digerire, assorbire, trasportare e metabolizzare i nutrienti contenuti negli alimenti. Questo processo avviene in seguito ai pasti ed è una componente fondamentale del dispendio energetico giornaliero.

Esso varia, ovviamente, in base alla composizione del pasto.

Nutriente	Percentuale dell'energia utilizzata per la digestione per tipo di nutriente
Proteine	20-30%
Carboidrati	5-10%
Grassi	0-3%
Alcol	10-15%

Ad esempio, se si assumono 100 kcal da proteine, circa 20-30 kcal saranno spese solo per digerirle e metabolizzarle. Questo rende gli alimenti ricchi in proteine leggermente più "costosi" da un punto di vista energetico.

Questo termine viene stimato intorno al 10 % dell'energia introdotta (E_{in}).

Attività fisica programmata (TEA)

Questo termine include tutte le attività fisiche strutturate e volontarie, come ad esempio fare attività sportiva.

Il dispendio energetico per attività fisica può essere calcolato usando il parametro MET (Metabolic Equivalent of Task), secondo la seguente formula empirica:

$$\text{Dispendio (kcal)} = [\text{MET} \cdot 3,5 \cdot \text{peso (kg)} / 200] \cdot \text{tempo (min)}$$

Attività	MET	Esempio
Riposo	1,0	Dormire
Leggero	1,5-3,0	Camminare lentamente
Moderato	3,0-6,0	Camminare velocemente
Vigorouso	6,0-9,0	Correre
Molto vigoroso	> 9,0	Correre velocemente

Esempio di calcolo del dispendio energetico dell'attività fisica volontaria.

Per un uomo di 75 kg che corre per 30 minuti a 10 km/h (MET = 9,8):

$$\text{Dispendio energetico (TEA)} = [9,8 \cdot 3,5 \cdot 75 / 200] \cdot 30 = 386 \text{ kcal}$$

Termogenesi non associata all'esercizio fisico (NEAT)

Questo parametro include tutte le attività non sportive, quali ad esempio il mantenimento della postura, fare lavori domestici, gesticolare mentre si parla, svolgere le attività lavorative a basso dispendio energetico.

Il NEAT può rappresentare dal 6% fino al 50% del dispendio energetico totale, a seconda dello stile di vita dell'individuo. Negli individui molto sedentari, il NEAT sarà minimo, mentre in soggetti con lavori fisicamente attivi o semplicemente più dinamici durante la giornata, può superare la TEA.

Esempio comparativo: due persone con lo stesso BMR e stessa alimentazione:

- Persona sedentaria (NEAT basso): dispendio giornaliero totale = 2200 kcal
- Persona attiva durante il lavoro (NEAT alto): dispendio giornaliero totale = 2700 kcal

Una differenza di 500 kcal al giorno può comportare un impatto significativo sul peso corporeo nel lungo termine (oltre 1 kg al mese).

Strategie per aumentare il NEAT: camminare mentre si parla al telefono, fare pause attive durante il lavoro sedentario, usare le scale invece dell'ascensore, fare brevi camminate dopo i pasti.

Il NEAT è quindi una leva molto efficace per migliorare il bilancio energetico senza necessariamente dedicare tempo a sessioni di allenamento strutturate.

Possiamo riassumere quanto detto finora osservando che il dispendio energetico totale giornaliero (TDEE) può essere suddiviso in quattro componenti principali (trascurando per ora la termoregolazione in quanto nel modello che stiamo utilizzando esso è inglobato nel metabolismo basale in quanto esso viene calcolato a temperatura ambiente "standard" (circa 22-25 °C), in condizioni neutre.

1. Metabolismo Basale (BMR) - 60-70%

Rappresenta l'energia necessaria per mantenere le funzioni vitali basilari:

- Respirazione cellulare
- Circolazione sanguigna
- Funzione renale
- Sintesi proteica
- Mantenimento del potenziale di membrana

2. Effetto Termico degli Alimenti (TEF) - 8-12%

L'energia spesa per la digestione, assorbimento e metabolismo degli alimenti:

3. Attività Fisica da Esercizio Fisico (TEA) - 15-30%

Include tutte le attività fisiche strutturate e volontarie (come ad esempio lo sport).

4. Attività (termogenesi) non da Esercizio Fisico (NEAT) - 15-50%

Attività lavorative a basso dispendio energetico, lavori domestici, ecc...

La seguente figura riassume in modo sintetico quanto detto, avendo inglobato nel riquadro attività fisica sia quella volontaria che involontaria.



Se invece vogliamo avere un quadro più dettagliato occorrerà dividere il riquadro attività fisica nel seguente modo.



Quando siamo in un ambiente a temperatura confortevole, e il corpo non è sotto stress, non c'è bisogno di attivare sudorazione, brividi, ecc. in quanto il flusso di calore che entra è pari a quello che esce. Il metabolismo basale è sufficiente a mantenere la temperatura costante senza sforzo, quindi in condizioni normali non si ha spesa energetica aggiuntiva per la termoregolazione (termogenesi adattiva), ma nel caso in cui ci sia scambio di calore, (situazione in cui fa troppo caldo o freddo) occorre considerarla, ecco come si modifica l'illustrazione precedente.



Metabolismo Totale (MT)

In modo grossolano, il dispendio energetico totale giornaliero può essere stimato moltiplicando il BMR per un fattore di attività F:

$$\text{Metabolismo Totale} = \text{BMR} \cdot F$$

Livello di Attività	F	Descrizione
Sedentario	1,2	Nessuna attività fisica
Leggermente attivo	1,375	Esercizio leggero 1-3 giorni/settimana
Moderatamente attivo	1,55	Esercizio moderato 3-5 giorni/settimana
Molto attivo	1,725	Esercizio intenso 6-7 giorni/settimana
Estremamente attivo	1,9	Esercizio molto intenso, lavoro fisico

In particolare per quanto riguarda il cervello possiamo chiederci quale sia il suo dispendio energetico. Il cervello rappresenta circa 2% del peso corporeo, ma consuma circa il 20% dell'energia totale a riposo, ossia del metabolismo basale.

In termini assoluti, consuma in media circa 300-400 kcal al giorno solo per funzionare "normalmente".

Il suo consumo energetico è continuo: anche quando dormiamo, il cervello resta attivo per funzioni come sogni, memoria, regolazione autonoma, ecc.

Ma pensare "intensamente" fa bruciare più calorie?

Sì, ma non quanto si potrebbe pensare. Anche durante attività mentali intense (esami, programmazione, scacchi, ecc.), l'aumento del consumo energetico è modesto rispetto ad attività fisiche. Alcuni studi mostrano che il consumo può aumentare di un 5-10%, quindi parliamo di qualche decina di kcal in più all'ora. Tuttavia, queste attività possono aumentare la sensazione di stanchezza mentale, anche senza un grosso dispendio calorico. In condizioni normali la "benzina" del cervello è il glucosio, mentre in caso di digiuno prolungato, entra in gioco anche l'utilizzo di corpi chetonici.

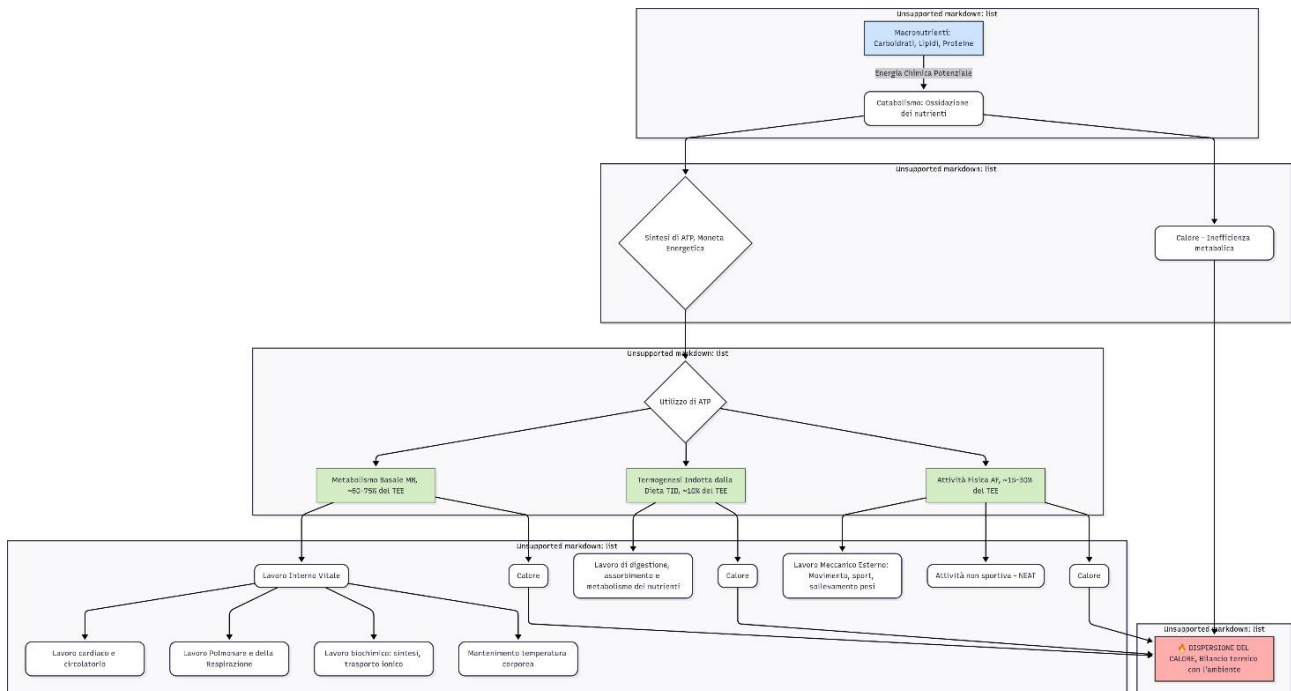
In sintesi

Stato cerebrale	Consumo energetico
Stato di veglia a riposo	~20% del metabolismo basale
Lavoro mentale intenso	+5-10% (modesto incremento)
Sonno	~15-20% meno che da svegli

Termoregolazione (Termogenesi adattiva)

Premessa

Prima di parlare della termoregolazione, è utile soffermarsi sulla seguente figura in cui viene illustrato il bilancio energetico del corpo umano, notando che il calore (riquadro colorato in basso a destra) si accumula come sottoprodotto di diversi processi: catabolismo, metabolismo basale, termogenesi degli alimenti e attività fisica.



Il primo passaggio del diagramma rappresenta l'ingresso dell'energia chimica nell'organismo umano, ed è indicato in alto nella casella blu:

(Carboidrati, Lipidi, Proteine, Alcol) → Energia chimica potenziale

Quando assumiamo cibo, introduciamo macronutrienti: carboidrati, grassi (lipidi), proteine e alcol. Questi nutrienti contengono energia chimica immagazzinata nei legami molecolari.

Energia chimica potenziale vuol dire che questa energia non è ancora utilizzata, ma è disponibile per essere trasformata in energia utilizzabile dal corpo, ad esempio sotto forma di ATP (adenosina trifosfato), la “moneta energetica” delle cellule. In breve: il corpo prende i macronutrienti, li “smonta” tramite reazioni, chimiche dette catabolismo, e ne ricava energia.

N. B. Il primo riquadro verde indicato come “Metabolismo” si intende il metabolismo in senso fisiologico, cioè l’insieme di processi energetici che servono a mantenere il corpo in vita, a riposo, in senso generale invece il metabolismo in senso generale viene definito come composto da due fasi: catabolismo (degradazione di molecole complesse) e anabolismo (costruzione di altre molecole complesse). Nella relazione (7) il termine metabolismo basale va inteso nella sua accezione generale di catabolismo e anabolismo.

Ad esempio, quasi tutte le reazioni metaboliche rilasciano calore:

La respirazione cellulare ($C_6H_{12}O_6 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O + ATP + \text{calore}$)

Il ciclo di Krebs, la fosforilazione ossidativa, ecc.

Anche il semplice funzionamento degli organi interni (cuore, fegato, cervello) produce calore.

Anche digerire, assorbire e metabolizzare i nutrienti genera calore, in particolare:

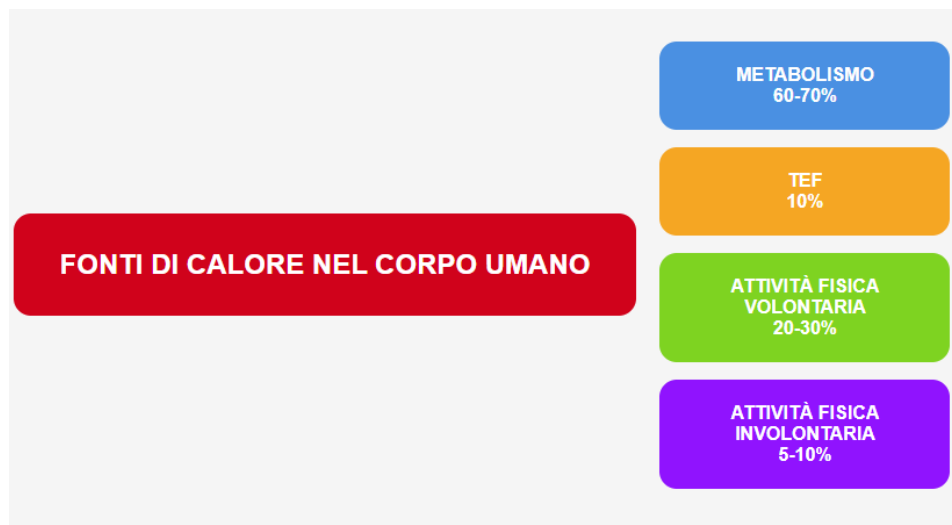
- Le proteine hanno il più alto TEF (fino al 30% dell'energia assunta!)
- I lipidi il più basso (~5-10%)

Nella relazione (7) che qui riportiamo

$$\Delta U = E_{in} - [L (20\% A) + Q (BMR + TEF + 80\% A)]$$

è specificato quali siano le fonti del calore che viene prodotto dal corpo umano, ossia metabolismo, digestione e attività fisica (in questa relazione il BMR è inteso nella sua accezione generale come catabolismo e anabolismo).

La seguente illustrazione riassume quanto detto (dove il termine metabolismo è nella sua accezione generale, invece del disegno di cui sopra veniva usato, come già detto, in senso più ristretto).



Scambio termico con l'ambiente (Q)

In condizioni ambientali normali, cioè a temperatura termoneutra (di solito tra i 22 e i 27 °C per un corpo vestito in modo leggero e in stato di riposo, invece di 28 – 30 °C per un corpo nudo), il contributo energetico della termoregolazione è praticamente nullo, ecco perché non lo abbiamo considerato quando abbiamo detto che il dispendio energetico totale è la somma di quattro contributi (BMR+TEF+TEA+NEAT).

La termoregolazione è quel processo sempre attivo che mantiene costante il valore della temperatura interna del corpo umano intorno ai 37 °C, mentre la nostra superficie esterna, la pelle, è circa 36 °C.

La termoregolazione è un meccanismo omeostatico controllato dall'ipotalamo, che agisce come un termostato biologico. Quando la situazione non è più termoneutra la temperatura del corpo può scendere oppure salire.

Quando la temperatura scende:

- Brividi
- Vasocostrizione periferica (mani, piedi) → meno dispersione di calore
- Piloerezione (la "pelle d'oca") → cerca di intrappolare uno strato d'aria isolante (efficace solo nei mammiferi pelosi... quindi meno utile per noi)
- A lungo termine: attivazione del grasso bruno

Quando la temperatura sale:

- Sudorazione → evaporazione dell'acqua rimuove calore (1 g di sudore evapora = ~0.58 kcal dissipate)
- Vasodilatazione periferica → aumenta la perdita di calore
- Riduzione della termogenesi

Il bilancio termico: una "lotta continua"

Ogni secondo il corpo bilancia produzione e perdita di calore:

- Produzione: metabolismo, termogenesi della dieta, attività muscolare.
- Perdita: irraggiamento, convezione, conduzione ed evaporazione.

La regolazione è finemente modulata: bastano variazioni di 0.5 °C per scatenare meccanismi compensatori.

La determinazione della potenza termica emessa dal corpo umano è un'applicazione affascinante della termodinamica e della fisiologia. Si basa sul Primo Principio della Termodinamica applicato a un sistema biologico. A tal uopo riprendiamo la relazione (3) $\Delta U = E_{in} + Q - L$ osservando che nell'ipotesi di stazionarietà $\Delta U = 0$ si ha $E_{in} = -(Q - L)$ ma il calore ceduto all'ambiente va preso con il segno negativo, quindi $E_{in} = Q + L$ o anche

$$Q = E_{in} - L \quad (8)$$

A parole: l'energia netta dispersa verso l'ambiente (Q) è data dalla differenza fra l'energia prodotta dal metabolismo E_{in} e l'energia (L) spesa verso l'esterno.

Se ora consideriamo la versione differenziale con il tempo si ha

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dE_{in}}{dt} - \frac{dL}{dt} \rightarrow \dot{Q} = M - P$$

Ed ogni termine sarà espresso non più in joule ma in watt, allora dQ/dt sarà la potenza termica, M sarà il tasso metabolico, ossia la velocità con cui il corpo converte l'energia chimica del cibo in energia utilizzabile e P sarà la potenza meccanica (energia/unità di tempo) che il corpo esercita sull'ambiente (sollevare un peso, camminare, scrivere, parlare, correre...). Al fine di calcolare Q occorrerà preliminarmente calcolare M e P .

Per quanto riguarda L diciamo innanzitutto che una persona a riposo, seduta o in piedi, il lavoro meccanico esterno è nullo: $L \approx 0$. Anche se i muscoli si contraggono per mantenere la postura, non stanno compiendo lavoro su un oggetto esterno (Lavoro = Forza · Spostamento). Tutta l'energia di queste contrazioni si degrada immediatamente in calore all'interno del corpo. Per una persona in attività, invece, L è la potenza meccanica misurabile.

Ipotizziamo uno scenario semplice da valutare pensando ad un ciclista su un ergometro (cyclette con misuratore di potenza) pedalando con una velocità costante, sviluppi una potenza, che sarà anch'essa costante, di 180 W, si avrà $P = 180$ W.

[Ci si potrebbe chiedere con quale velocità pedalare per sviluppare una potenza di 180 W, la risposta dipende da che tipo di ergometro stai usando, perché ogni macchina ha un suo profilo di resistenza, ad esempio: fissa (imposta una certa forza), proporzionale alla velocità (resistenza tipo frenatura magnetica o aria), oppure costante in potenza (le più moderne). La relazione da usare è quella che lega la potenza alla forza ed alla velocità

$$P = F v$$

Supponiamo un ergometro che abbia una forza resistente sui pedali di 150 N (circa 15 kg), quindi la velocità lineare con cui pedalare è $v = P/F = 180 / 150 = 1.2$ m/s

Ma forse è più utile calcolare le pedate al minuto, a tal fine supponendo che la cyclette abbia un raggio della corona di 17.5 cm (valore tipico), la sua circonferenza è $C = 2 \pi r = 1.10$ m, quindi in numero di pedate al secondo è, ricordando che $v = \text{spazio/tempo} = C/\text{tempo} = Cf$, si ha $f = v/C = 1.2/1.1 = 1.09$ giri/s, se li vogliamo convertire al più usuale ed utile giri al minuto (rpm) si ha

$$rpm = 1.09 \frac{60 \text{ giri}}{60 \text{ s}} = 1.09 \frac{60 \text{ giri}}{\text{min}} = 65.4 (\text{giri} / \text{min})$$

Cioè poco più di una pedalata al secondo.]

Al fine di valutare M bisogna considerare che durante una attività fisica esso aumenta. Ricordiamo che il suo valore basale che potremo indicare con M_0 è di circa 100 W, come abbiamo già visto nel paragrafo dedicato al metabolismo basale, allora l'aumento sarà $\Delta M = M - M_0$. Considerando che la "macchina" corpo umano ha una efficienza intorno al 20%, vuol dire che per compiere un lavoro utile con potenza di 180 W, come nel caso del ciclista, l'attività metabolica dovrà aumentare di 900 W!

$$\text{efficienza} \equiv \eta = \frac{P}{\Delta M}$$

$$\Delta M \equiv M - M_0 = \frac{P}{\eta} = \frac{180}{0.2} = 900W$$

$$M = 900 + M_0 = 900 + 100 = 1000W$$

Ora possiamo calcolare il calore da dissipare

$$dQ/dt = M - P = 1000 - 180 = 820 W$$

Questo risultato è impressionante: per produrre 180 Watt di potenza sui pedali, il corpo del ciclista deve dissipare 820 Watt di calore!

Questo spiega l'intensa sudorazione e il surriscaldamento durante l'attività fisica.

Possiamo riassumere in questo schemetto l'esempio visto sopra.

Scenario	Tasso Metabolico (M)	Lavoro meccanico (L)	Potenza termica dQ/dt
Persona a riposo	100	0	100
Ciclista (con pedalata leggera)	1000	180	820

Ecco alcuni valori approssimativi dei valori di potenza meccanica in varie attività.

Attività	Consumo (Watt)	Note
🛌 Dormire	~70 W	Metabolismo basale
📖 Seduti rilassati	~100 W	Lavoro da scrivania
🚶 Camminare (3-4 km/h)	~200 W	Passeggiata tranquilla
🚶 Camminare (5-6 km/h)	~300 W	Passo sostenuto
🚲 Pedalare (tranquillo)	~400-500 W	Bici da città, ritmo blando
🚲 Pedalare (intenso)	~800-1000 W	Ciclista allenato, ritmo forte
🏃 Correre (8-10 km/h)	~700-900 W	Corsa regolare
🏃 Correre (12-15 km/h)	~1000-1200 W	Corsa veloce
🏋 Sforzo fisico intenso	~1200-1500+ W	Lavoro fisico pesante, sport ad alta intensità

Conoscere la potenza termica del corpo umano è fondamentale in molti campi, ad esempio:

Progettazione di impianti di climatizzazione (HVAC): Gli ingegneri devono calcolare il "carico termico" di un ambiente. In un ufficio, un cinema o una palestra affollata, il calore emesso dalle persone è una componente significativa da considerare per dimensionare correttamente l'impianto di raffreddamento.

Architettura e bioedilizia: Per progettare edifici energeticamente efficienti che sfruttino o gestiscano il calore umano.

Abbigliamento tecnico: I tessuti sportivi sono progettati per massimizzare la dispersione del calore, soprattutto tramite evaporazione.

Occorrerà precisare che finora abbiamo usato un valore approssimativo del tasso metabolico a riposo indicandolo intorno ai 100 W, ma tale valore in effetti varia da 60 a 100W seconda di età, sesso, massa magra e superficie corporea.

Un valore medio per uomo è circa $80 \text{ W} \pm 10 \text{ W}$.

Per le donne tale valore è inferiore: 50–70 W.

Come riportano le riviste McArdle, Katch & Katch – "Exercise Physiology" e NASA technical reports.

Il dato dei 100 W sono più un valore simbolico che reale è una stima comoda da ricordare (e usata spesso anche nei corsi di fisica come ordine di grandezza).

Considerando una potenza media giornaliera M di 70 W erogata in modo costante per 24 ore, si ottiene un'energia giornaliera:

$$E = P \cdot t = 70 \text{ W} \cdot 24 \text{ h} = 70 \text{ W} \cdot 86,400 \text{ s} = 6.048 \text{ MJ} = 1450 \text{ kcal}$$

$M = 1450 \text{ kcal/giorno} = 70 \text{ W}$

Questo valore è in linea con quello stimato con le formule empiriche che abbiamo usato nel paragrafo sul Metabolismo Basale.

Principi della Termoregolazione

Il corpo umano mantiene una temperatura interna costante di circa 37°C attraverso un equilibrio tra produzione e perdita di calore:

Bilancio Termico all'equilibrio: produzione di calore = uscita di calore

$$M = \pm R \pm C \pm D - E$$

Dove:

M = produzione di calore

R = radiazione

C = convezione

D = conduzione

E = evaporazione

Produzione di Calore (M)

Termogenesi Metabolica

La produzione di calore deriva principalmente da:

- Metabolismo basale (60-70%)
- Attività muscolare (20-30%)
- Effetto termico degli alimenti (8-12%)

Termogenesi da Brivido

In condizioni di freddo, il brivido può aumentare la produzione di calore fino a 5 volte il valore basale:

Produzione di calore da brivido = BMR $\times$ 5

Perdita di Calore ($\pm R \pm C \pm D - E$)

Meccanismi di perdita e formule quantitative per il loro calcolo.

R: Radiazione (45-50%) $Q_{\text{rad}} = \sigma \varepsilon A (T_{\text{pelle}}^4 - T_{\text{amb}}^4)$

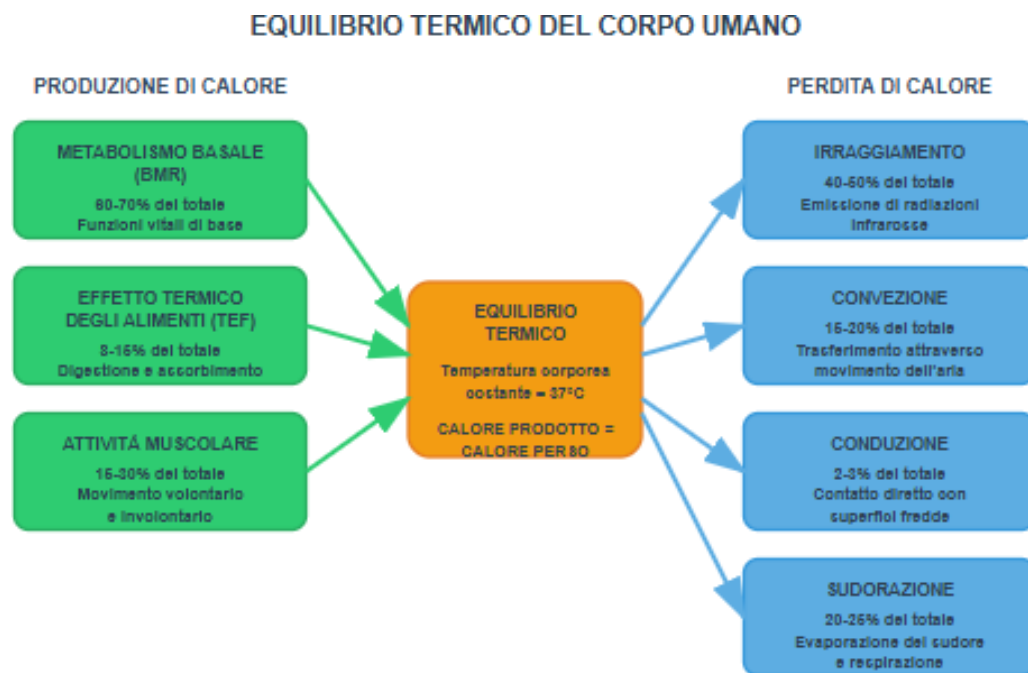
C: Convezione (30-35%) $Q_{\text{conv}} = h A (T_{\text{pelle}} - T_{\text{amb}})$

D: Conduzione (2-3%) $Q_{\text{cond}} = k A (T_{\text{pelle}} - T_{\text{superficie di contatto}}) / d$

E: Evaporazione (20-25%) $Q_{\text{evap}} = \lambda m_{\text{vapore}}$

Dove:

- σ = costante di Stefan-Boltzmann ($5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$)
- ε = emissività della pelle ($\approx 0,95$)
- A = area superficiale corporea
- h = coefficiente di convezione
- k = conduttività termica
- d è lo spessore attraverso il quale avviene lo scambio termico, esso non è solo lo spessore della pelle, ma rappresenta lo spessore efficace dello strato isolante combinato di pelle e, soprattutto, di grasso sottocutaneo.
- λ = calore latente di vaporizzazione dell'acqua (2430 kJ/kg)



- **Irraggiamento (R)** - Ogni corpo per il solo fatto di essere ad una certa temperatura emette radiazione, detta termica, a temperature ordinarie essa è sostanzialmente radiazione infrarossa. Non ha bisogno di contatto. È la sensazione di calore che provate vicino a un caminetto acceso, anche se l'aria della stanza è fresca. O la sensazione di freddo vicino a una grande finestra in inverno, perché il vostro corpo "irradia" calore verso la superficie fredda del vetro.
- **Convezione (C)** - È il calore trasportato via dal movimento di un fluido (l'aria). Una leggera brezza in estate ci fa sentire subito meglio perché porta via lo strato d'aria calda a contatto con la nostra pelle.
- **Conduzione (D)** - È il calore disperso quando tocchiamo oggetti con temperatura diversa da quella corporea, si ricordi che la conduzione avviene quando due corpi solidi aventi differenza di temperatura vengono a contatto, pertanto si capisce che questo aspetto del trasferimento termico è del tutto marginale.
- **Evaporazione (E)** - quando il corpo si surriscalda (temperatura esterna alta e/o attività muscolare) il sistema di termoregolazione entra in azione facendo produrre sudore dalle ghiandole sudoripare. Il sudore è principalmente acqua con un po' di sali minerali. Il sudore evaporando dalla pelle sottrae calore al corpo.

Irraggiamento

Si tratta, come già osservato, dell'emissione di radiazione elettromagnetica da parte di un corpo dovuta alla sua temperatura. Qualunque corpo con temperatura > 0 K irradia energia sotto forma di onde elettromagnetiche (in particolare infrarosse per il corpo umano).

L'irraggiamento è un processo a due vie. Il nostro corpo irradia calore verso l'ambiente, ma allo stesso tempo assorbe il calore irradiato dagli oggetti circostanti (muri, mobili, ecc.). La perdita netta di calore è quindi determinata dalla differenza tra l'energia emessa dal corpo e quella assorbita dall'ambiente. Se ci troviamo in una stanza fredda, la perdita di calore per irraggiamento sarà maggiore rispetto a quando siamo in una stanza calda.

La temperatura del corpo in condizioni in cui la temperatura non superi i $25\text{ }^{\circ}\text{C}$ circa irradia energia verso l'ambiente, nel contempo riceve anche energia dall'ambiente in quanto anch'esso per il fatto di essere ad una certa temperatura emetterà radiazione termica. La quantità di calore netta emessa per irraggiamento dipende allora sia dalla temperatura corporea che da quella ambientale, la formula che descrive questo comportamento è la seguente (legge di Stefan-Boltzmann)

$$P_{\text{rad}} = \sigma \varepsilon A_{\text{eff}} (T_{\text{pelle}}^4 - T_{\text{amb}}^4)$$

P è la potenza netta irradiata (W)

ε = emissività del corpo umano (~ 0.97 , quasi un corpo nero)

σ (costante di Stefan-Boltzmann) = $5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$

A_{eff} = area radiante effettiva (non è la superficie corporea (circa 1.8 m^2 per un adulto medio) ma l'area del corpo che "vede" effettivamente l'ambiente circostante). Parti del corpo irradiano calore verso altre parti del corpo (es. l'interno delle braccia verso il torso) e questo non contribuisce alla perdita netta di calore. L'area radiante effettiva tiene conto solo delle superfici che hanno una "linea di vista" libera con l'ambiente esterno. Si stima questo valore a circa l'80% della superficie corporea, quindi il suo valore di riferimento è circa 1.35 m^2 .

T_{pelle} = temperatura del corpo (pelle) in kelvin

T_{amb} = temperatura media ponderata dell'ambiente in kelvin

Ad esempio se $T_{\text{pelle}} = 306 \text{ K} = 33\text{ }^{\circ}\text{C}$ e $T_{\text{amb}} = 294 \text{ K} = 21\text{ }^{\circ}\text{C}$, $A_{\text{eff}} = 1.35 \text{ m}^2$

$P = 97.5 \text{ W}$

Se invece, ci riferiamo ad una stanza con temperatura di 25°C (298 K) la potenza irraggiata è

$P = 65 \text{ W}$

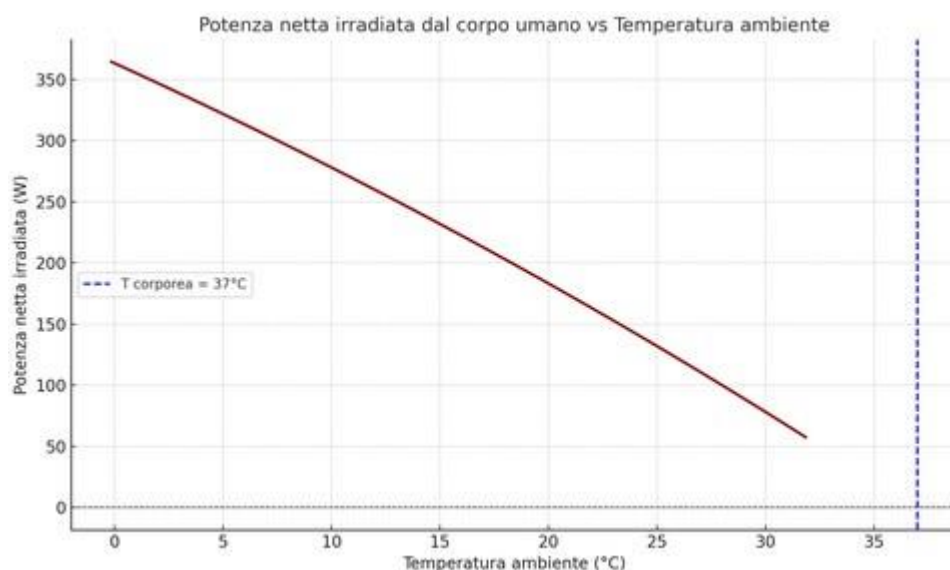
Come si può vedere, semplicemente aumentando la temperatura della stanza di $4\text{ }^{\circ}\text{C}$, la potenza dissipata per irraggiamento crolla da 97.5 W a circa 65 W . Questo dimostra la sensibilità estrema della legge di Stefan-Boltzmann alla differenza di temperatura.

Si tenga presente che tale irraggiamento di calore vale per un corpo nudo. L'abbigliamento gioca un ruolo cruciale nel controllare la perdita di calore per irraggiamento. I vestiti non "producono" calore, ma agiscono come uno strato isolante che intrappola uno strato d'aria vicino alla pelle. Questo riduce la quantità di calore che può essere irradiata direttamente verso l'ambiente esterno.

Materiali diversi hanno proprietà radiative diverse. Ad esempio, una coperta di emergenza (la classica coperta isoterma color argento/oro) ha una superficie a bassa emissività che riflette il calore del corpo verso l'interno, riducendo drasticamente la perdita per irraggiamento.

Si osservi inoltre che la temperatura ambiente non coincide con la temperatura dell'aria: se all'interno di una stanza ci sono delle superfici che presentano una temperatura molto più alta di quella dell'aria (si pensi alla fiamma di un caminetto), la temperatura ambientale sarà una media nella quale la presenza di questa zona molto calda incide significativamente.

Nelle case italiane invece, dove ormai non esistono più camini o stufe, generalmente la temperatura media radiante coincide con la temperatura dell'aria, o addirittura risulta inferiore.



Si vede che più l'ambiente è freddo, più il corpo irradia energia (fino a oltre 300 W a 0 °C). Man mano che la temperatura ambiente si avvicina ai 37 °C, la radiazione netta tende a zero: il corpo non riesce più a disperdere calore per irraggiamento. A temperature sopra i 37 °C, la curva diventerebbe negativa (il corpo assorbirebbe calore dall'ambiente).

Osservazione

Nel caso della temperatura ambiente di 21 °C abbiamo visto che si ha $P = 97.5$ W, ma sappiamo che il metabolismo basale è intorno ai 80 W, inoltre considerando che si ha anche perdita di calore per conduzione ed evaporazione il suo valore è maggiore, diciamo intorno ai 120 W, allora come è possibile che l'uscita sia maggiore dell'entrata? La risposta è che il valore di 80 W si riferisce alle condizioni di metabolismo basale, quindi per una temperatura, per un corpo nudo, di 28-30°C, se invece il corpo è vestito in modo leggero la temperatura "comfort" è sui 22 °C.. Una stanza a 21 °C è un ambiente freddo per un corpo nudo. In queste condizioni, il corpo non può rimanere al suo metabolismo basale. Per evitare che la temperatura interna scenda, il sistema nervoso attiva la

termogenesi, cioè aumenta la produzione di calore attraverso la vasocostrizione e le contrazioni muscolari involontarie (brividi).

La vasocostrizione riduce il flusso di sangue alla pelle, questo abbassa la temperatura della pelle (T_{pelle}), riducendo la differenza ($T_{\text{pelle}}^4 - T_{\text{amb}}^4$) e quindi limitando la perdita per irraggiamento.

Termogenesi non da brivido: Il metabolismo dei tessuti, in particolare del tessuto adiposo bruno, viene accelerato per produrre più calore.

Termogenesi da brivido: Se la prima non basta, iniziano le contrazioni muscolari involontarie (brividi), che generano una quantità significativa di calore.

In conclusione: il corpo non emette più di quanto produce. Semplicemente, quando la perdita di calore è alta (come a 21°C per un corpo nudo), il corpo aumenta la sua produzione di calore ben al di sopra del livello basale per compensare perfettamente questa perdita.

E se la temperatura esterna è maggiore di quella della pelle?

Analizziamo il caso con una temperatura ambiente di 40 °C.

Temperatura Ambiente (T_{amb}): 40 °C

Temperatura Corporea T_{interna} : 37 °C

Temperatura della Pelle (T_{pelle}): 36°C

In condizioni di caldo, il corpo fa di tutto per raffreddarsi, quindi attua la vasodilatazione: aumenta al massimo il flusso di sangue verso la pelle per portare il calore dall'interno verso la superficie. La temperatura della pelle si avvicina molto a quella interna. Ipotizziamo una T_{pelle} di 36 °C (309.15 K).

Inserendo questi valori nella relazione mostrata sopra si ha

$$P_{\text{rad}} = \sigma \varepsilon A_{\text{eff}} (T_{\text{pelle}}^4 - T_{\text{amb}}^4) = -36 \text{ W}$$

Cosa significa un valore negativo?

Significa che il flusso netto di calore è dall'ambiente verso il corpo. Invece di perdere calore per irraggiamento, il corpo umano sta assorbendo circa 36 Watt di calore radiante dalle pareti e dagli oggetti circostanti, che sono più caldi della sua pelle.

Analisi della Convezione (Q_{conv})

La convezione è la trasmissione di calore tramite il movimento di un fluido (in questo caso, l'aria). La sua direzione dipende dalla differenza di temperatura tra la pelle e l'aria.

Poiché la temperatura dell'aria (40 °C) è superiore a quella della pelle (36 °C), anche la convezione lavora contro di noi.

L'aria calda a contatto con la pelle le cede calore. Anche la convezione diventa un guadagno termico per il corpo. Il valore esatto dipende dalla velocità dell'aria, ma possiamo stimare un guadagno di circa 10-20 W.

A 40 °C, i due meccanismi principali di raffreddamento a riposo (irraggiamento e convezione) sono diventati inefficaci e, anzi, contribuiscono a riscaldare il corpo.

Come fa il corpo a sopravvivere?

La risposta è: l'evaporazione. Essa diventa in questa situazione l'unico meccanismo efficace di dissipazione del calore.

L'equazione del bilancio energetico diventa:

$$M - W + Q_{\text{rad}} + Q_{\text{conv}} + Q_{\text{evap}} = 0$$

Dove:

M: Produzione di calore metabolico (ad esempio quello basale è circa 100 W).

W: Lavoro meccanico (lo poniamo a zero a riposo).

Q_{rad} : Guadagno di calore per irraggiamento (es. +36 W).

Q_{conv} : Guadagno di calore per convezione (es. +15 W).

Q_{evap} : Perdita di calore per evaporazione. Deve compensare tutto il resto.

Calcoliamo la perdita per evaporazione richiesta:

$$Q_{\text{evap}} = - (M + Q_{\text{rad}} + Q_{\text{conv}})$$

$$Q_{\text{evap}} = - (100 \text{ W} + 36 \text{ W} + 15 \text{ W})$$

$$Q_{\text{evap}} = - 151 \text{ W}$$

Il corpo deve dissipare 151 W di potenza termica solo attraverso l'evaporazione (il segno meno indica una perdita).

Per sapere come quantificare questo processo vedi Nota 1 del paragrafo “Evaporazione”.

La nostra armatura segreta: l'abbigliamento

L'abbigliamento è la nostra principale arma per controllare lo scambio termico. La sua capacità di isolamento si misura in "clo".

1 clo = L'isolamento fornito da un tipico abito da uomo (pantaloni, camicia, giacca, cravatta).

0 clo = Corpo nudo (nessuna resistenza termica).

0,5 clo = Abbigliamento estivo leggero.

4 clo = Abbigliamento polare pesante.

I vestiti non solo isolano, ma aumentano anche la superficie che scambia calore con l'ambiente (FCL). Un cappotto ampio ha una superficie esterna maggiore del nostro corpo.

Quando calcoliamo lo scambio di calore per irraggiamento di una persona vestita, non usiamo la temperatura della pelle, ma la temperatura superficiale esterna dei vestiti, che è ovviamente più bassa.

Convezione

La convezione è uno dei principali meccanismi con cui il corpo umano scambia calore con l'ambiente, insieme a conduzione, irraggiamento ed evaporazione. Si tratta di un processo in cui il calore viene trasferito grazie al movimento di un fluido (aria o acqua) a contatto con la pelle.

A differenza della conduzione, che avviene per contatto diretto con una superficie statica, la convezione implica il trasferimento di calore tramite il movimento di un fluido, come l'aria o l'acqua. Questo processo gioca un ruolo fondamentale nella nostra termoregolazione quotidiana, influenzando la nostra sensazione di caldo e freddo in modi talvolta sorprendenti.

Principio fisico della convezione

La convezione si basa su un principio fisico semplice: quando un fluido (aria o acqua) viene a contatto con una superficie più calda, come la nostra pelle, ne assorbe il calore. Riscaldandosi, questo fluido si espande, diventa meno denso e tende a salire, venendo rimpiazzato da fluido più freddo e denso che a sua volta si riscalda. Questo ciclo continuo, chiamato moto convettivo, crea una corrente che allontana efficacemente il calore dalla superficie del corpo. Si stima che, in condizioni di riposo, la convezione sia responsabile di circa il 10-15% della perdita totale di calore del corpo.

Esistono due tipi principali di convezione:

- **Convezione Naturale:** avviene spontaneamente. L'aria a contatto con la nostra pelle si riscalda, diventa più leggera e sale, sostituita da aria più fresca. È un processo costante ma relativamente lento.
- **Convezione Forzata:** si verifica quando il movimento del fluido è accelerato da una forza esterna, come il vento generato da un ventilatore o le correnti naturali. Questo tipo di convezione aumenta drasticamente la velocità di scambio termico.

Il nostro corpo è quasi sempre circondato da un sottile strato di aria che, riscaldato dalla pelle, funge da isolante, rallentando la perdita di calore. La convezione, specialmente quella forzata, "strappa via" questa bolla d'aria isolante, sostituendola continuamente con aria più fredda. Questo è il motivo per cui una leggera brezza in una giornata calda può dare una piacevole sensazione di fresco: non abbassa la temperatura dell'aria, ma accelera la rimozione del calore dal nostro corpo.

Il sistema circolatorio, come per la conduzione, è un attore chiave. In risposta al caldo, la vasodilatazione porta più sangue caldo in superficie, aumentando la temperatura della pelle e massimizzando così la perdita di calore per convezione. Al contrario, con il freddo, la vasocostrizione riduce il flusso di sangue alla pelle, abbassandone la temperatura e conservando il calore interno.

L'impatto della convezione sulla nostra vita è evidente in molte situazioni quotidiane e ha implicazioni dirette per il nostro comfort, la nostra salute e le nostre prestazioni.

L'Effetto Vento (Wind Chill)

Il vento è l'esempio più comune di convezione forzata. L'effetto "wind chill" descrive come la nostra percezione della temperatura sia più bassa di quella reale a causa dell'azione del vento. Un vento freddo e secco può aumentare il rischio di irritazioni cutanee e problemi alle vie respiratorie. In casi estremi, può accelerare pericolosamente la perdita di calore, portando all'ipotermia.

L'Immersione in Acqua

L'acqua è un conduttore di calore molto più efficiente dell'aria. Quando siamo immersi, il calore viene trasferito dal nostro corpo all'acqua non solo per conduzione, ma anche e soprattutto per convezione, a causa dei movimenti del fluido. Questo spiega perché si avverte freddo molto più rapidamente in acqua a 25°C che in aria alla stessa temperatura. La perdita di calore per convezione in acqua può essere fino a 25 volte superiore a quella in aria calma alla stessa temperatura, rendendo l'immersione in acque fredde particolarmente pericolosa.

Il Ruolo dell'Abbigliamento

Gli indumenti agiscono come una barriera contro la convezione. Intrappolano uno strato d'aria tra il tessuto e la pelle, impedendone il movimento. Quest'aria ferma si riscalda e funge da isolante, riducendo drasticamente la quantità di calore persa. I vestiti a più strati sono particolarmente efficaci perché creano molteplici strati d'aria intrappolata. I materiali antivento sono progettati specificamente per bloccare la convezione forzata, mantenendo intatto lo strato d'aria isolante vicino al corpo.

Convezione e Salute

Sebbene spesso associata al raffreddamento, la convezione ha anche aspetti benefici. Una brezza leggera può migliorare la qualità dell'aria che respiriamo, disperdendo inquinanti e allergeni. Tuttavia, correnti d'aria costanti, soprattutto se fredde o umide, possono avere effetti negativi. Alcune persone, definite "meteoropatiche", sono particolarmente sensibili al vento, che può scatenare mal di testa, nervosismo, dolori muscolari e persino un aumento della pressione sanguigna.

In sintesi, la convezione è un potente meccanismo di scambio termico, un "vento" che può rinfrescare o raffreddare, a seconda della sua intensità e della temperatura del fluido circostante. Il nostro corpo, attraverso la regolazione del flusso sanguigno cutaneo, e noi, attraverso la scelta dell'abbigliamento, mettiamo in atto continue strategie per gestire questo dialogo con l'ambiente, cercando di mantenere l'equilibrio termico necessario per il nostro benessere.

La relazione che quantifica tale effetto è la Legge del raffreddamento di Newton:

$$\frac{Q}{t} = h A (T_{\text{pelle}} - T_{\text{fluido}})$$

dove:

$\frac{Q}{t}$ = flusso di calore (W)

h = coefficiente di scambio termico (W/(m² · K)), dipende da velocità e tipo di fluido

A = area di pelle esposta (m²)

T_{pelle} e T_{fluido} = temperature in °C

In aria: il coefficiente h è basso ($\sim 2\text{--}25 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$) e cresce molto con la velocità del vento.

In acqua: il coefficiente h è molto più alto ($\sim 100\text{--}600 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$) → raffreddamento molto più rapido, anche senza movimento.

L'acqua sottrae calore ~ 25 volte più velocemente dell'aria alla stessa temperatura.

Esempio numerico

Temperatura pelle = 34°C

Temperatura aria = 20°C ($\Delta T = 14 \text{ K}$)

Area esposta $A = 0.8 \text{ m}^2$ (gran parte del corpo)

Coefficiente $h = 10 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ (aria in leggera brezza)

$$\frac{Q}{t} = 10 \times 0.8 \times 14 = 112 \text{ W}$$

Significa $\sim 112 \text{ J/s}$ persi per convezione → circa 96.4 kcal/ora .

Se il vento aumenta e h passa a 25:

$$\frac{Q}{t} = 25 \times 0.8 \times 14 = 280 \text{ W}$$

→ $\sim 241 \text{ kcal/ora}$: quasi 2,5 maggiore in questo caso.

Ruolo fisiologico

Il corpo può modulare la perdita per convezione:

Vasodilatazione cutanea: più sangue caldo arriva alla pelle → più calore ceduto all'aria o all'acqua.

Vasocostrizione cutanea: riduce il flusso sanguigno superficiale per trattenere calore.

Peli eretti (piloerezione): negli animali, intrappolano uno strato d'aria riducendo la convezione naturale (negli umani l'effetto è minimo).

Comportamenti: vestirsi a strati, cercare riparo dal vento, o viceversa esporsi ad aria in movimento per raffreddarsi.

Convezione vs conduzione

Conduzione: richiede contatto diretto e scambio molecolare (importante solo se il fluido è fermo).

Convezione: richiede movimento del fluido, ed è molto più efficace quando il fluido ha alta velocità o alta capacità termica (es. acqua).

In aria ferma, la perdita per convezione naturale è simile alla conduzione; con vento o movimento in acqua, domina nettamente.

Importanza clinica e sportiva

In sport acquatici (nuoto, immersione) il raffreddamento per convezione in acqua può portare rapidamente a ipotermia, anche in acque temperate.

In montagna, la combinazione di freddo e vento (wind chill) aumenta drasticamente la perdita di calore e il rischio di assideramento.

In ambienti caldi, ventilatori o vento accelerano la dispersione di calore (a patto che la temperatura dell'aria sia inferiore a quella della pelle).

Conduzione

La conduzione è il trasferimento di calore attraverso il contatto diretto tra corpi o materiali con diversa temperatura. L'energia si propaga per vibrazione molecolare e trasferimento microscopico di energia cinetica, senza movimento macroscopico di materia.

Legge di Fourier della conduzione:

$$\frac{Q}{t} = k A \frac{\Delta T}{d}$$

dove:

$\frac{Q}{t}$ = flusso di calore (W)

k = conducibilità termica del materiale (W/(m · K))

A = area di contatto (m²)

ΔT = differenza di temperatura tra le superfici (K o °C)

d = spessore dello strato conduttore (m)

A livello microscopico, l'energia termica si manifesta come l'oscillazione delle molecole di un materiale.[1] Quando una parte del corpo più calda entra in contatto con una più fredda, le molecole che vibrano più velocemente (più calde) urtano quelle vicine più lente (più fredde), trasferendo loro energia. Questo processo a catena continua fino a quando non si raggiunge un equilibrio termico. È importante notare che nella conduzione non c'è un trasporto di materia, ma solo di energia.

Conduzione nel corpo umano

Nel corpo umano, la conduzione può avvenire in due contesti principali:

All'interno del corpo

Il calore prodotto nei muscoli e negli organi si propaga verso la pelle attraverso tessuti biologici (muscoli, grasso, pelle).

La conducibilità termica dei tessuti è relativamente bassa:

Acqua/tessuto muscolare: $k \approx 0.5 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$

Tessuto adiposo: $k \approx 0.2 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ (ottimo isolante)

Lo strato adiposo funziona quindi come una “coperta naturale” riducendo la perdita di calore.

Tra corpo e ambiente

Quando il corpo tocca una superficie (terra, metallo, acqua ferma), il calore fluisce per conduzione.

L'effetto è più marcato se il materiale a contatto ha alta conducibilità termica:

Metalli $\rightarrow$ alto $k \rightarrow$ raffreddamento rapido

Legno o tessuti $\rightarrow$ basso $k \rightarrow$ raffreddamento lento

L'acqua, pur non essendo conduttrice come i metalli, ha k e calore specifico elevati $\rightarrow$ grande capacità di sottrarre calore.

Nel corpo umano, la conduzione gioca un ruolo duplice: può essere un meccanismo di perdita di calore o di acquisizione di calore. Se tocchiamo un oggetto più freddo della nostra pelle, come una lastra di metallo o un bicchiere di acqua ghiacciata, il calore fluisce dal nostro corpo verso l'oggetto, provocando una sensazione di freddo. Al contrario, se entriamo in contatto con una superficie più calda, il calore si trasferisce a noi. Sebbene a riposo rappresenti solo una piccola percentuale della dispersione totale di calore (circa il 2-3%), il suo impatto può diventare significativo in determinate situazioni, come quando si è immersi in acqua, che conduce il calore circa 20 volte più efficacemente dell'aria.

Esempio numerico

Supponiamo di poggiare la mano (area $A = 0.015 \text{ m}^2$) su una lastra metallica a 10°C . Temperatura pelle = 33°C , spessore pelle $d \approx 2 \text{ mm} = 0.002 \text{ m}$. Conducibilità pelle $k \approx 0.37 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$.

Applicando Fourier:

$$\frac{Q}{t} = 0.37 \times 0.015 \times \frac{(33 - 10)}{0.002}$$
$$\frac{Q}{t} \approx 42.6 \text{ W}$$

Quindi in questa condizione si trasferiscono $\sim 42 \text{ J}$ ogni secondo dalla mano al metallo. In pochi secondi, la mano percepisce un forte raffreddamento.

Esempi Pratici di Conduzione Termica

Vestiario: Gli abiti non "producono" calore, ma agiscono come isolanti. Intrappolano uno strato d'aria vicino alla pelle. Poiché l'aria ferma è un cattivo conduttore di calore, questo strato rallenta notevolmente la dispersione di calore dal corpo per conduzione e convezione. Il potere isolante di un indumento dipende dal tipo di tessuto e dal suo spessore.

Sensazione Termica: Perché una maniglia di metallo a 20°C sembra molto più fredda di un libro alla stessa temperatura? La risposta risiede nella diversa conducibilità termica.[5] Il metallo è un eccellente conduttore e sottrae calore dalla nostra mano molto più rapidamente del legno o della carta, che sono isolanti. La nostra percezione non misura la temperatura dell'oggetto, ma la velocità con cui scambia calore con la nostra pelle.

Attività Fisica: Durante l'esercizio, l'attività muscolare genera una grande quantità di calore. Il corpo risponde con una vasodilatazione massiccia per trasportare questo calore in eccesso alla pelle, da cui può essere dissipato, anche per conduzione se siamo a contatto con superfici più fredde.

Applicazioni Mediche: La conduzione termica è sfruttata in diverse pratiche mediche. Impacchi caldi o freddi vengono utilizzati per alleviare il dolore muscolare o ridurre il gonfiore, trasferendo calore da o verso l'area interessata per conduzione. In procedure più complesse come la termoablazione, temperature estreme vengono applicate direttamente ai tessuti (ad esempio, tumori) per distruggerli, utilizzando la conduzione per propagare l'effetto termico.

Fattori che influenzano la perdita di calore per conduzione

1. Differenza di temperatura (ΔT): maggiore differenza → maggiore flusso di calore.
2. Area di contatto: superfici più grandi → più perdita.
3. Spessore dello strato isolante (pelle, abiti): maggiore spessore → minore conduzione.
4. Conducibilità del materiale a contatto: metallo > acqua > legno > aria.
5. Durata del contatto: più tempo → più energia scambiata.

La conduzione, pur essendo meno dominante della convezione o evaporazione in condizioni di aria ferma e asciutta, diventa cruciale in contatto diretto con materiali ad alta conducibilità o in acqua fredda. La sua comprensione è essenziale per la medicina sportiva, la fisiologia ambientale e la prevenzione dell'ipotermia.

Evaporazione

Quando l'acqua del sudore evapora, cioè passa dallo stato liquido a quello di vapore, assorbe energia.. Questo è l'energia necessaria per spezzare i legami tra le molecole d'acqua e farlo passare allo stato gassoso.

Il calore viene sottratto dalla pelle → la pelle si raffredda → il sangue che scorre vicino alla superficie si raffredda → il corpo si raffredda.

La formula che rende conto del processo è $Q = m \cdot L$

Q è il calore perso per evaporazione ed m è la massa di acqua che evapora

L è il calore latente di evaporazione che per l'acqua vale $L = 2.43 \text{ MJ/kg}$ (per temperatura corporea di 37°C). Se convertiamo L in kcal, ricordando che $1 \text{ kcal} = 4184 \text{ J}$, si ha

$$L = \frac{2.43 \cdot 10^6 \text{ J / kg}}{4184 \text{ J / kcal}} = 584 \text{ kcal / kg} = 0.58 \text{ kcal / g}$$

Abbiamo così una relazione più comoda da usare

$$Q = 0.58 \cdot m(\text{g})$$

Esempio. Supponendo di aver perso 500 g di sudore durante una certa attività motoria, e che tutto il sudore sia effettivamente evaporato e quindi abbia contribuito al raffreddamento, si ha

$$Q = 0.58 \cdot 500 = 290 \text{ kcal}$$

La perdita di calore attraverso la sudorazione può essere molto elevata.

Valori tipici del rateo di sudorazione con il tempo:

- Riposo: 50-100 g/h
- Attività moderata: 500-1000 g/h
- Attività intensa: 2000-3000 g/h

Questo è uno schema che illustra il processo della sudorazione.



Una formula più accurata che tiene conto dell'effetto dell'umidità dell'aria è la seguente:

$$\frac{dQ}{dt} = h_e A (p_s - p_a)$$

Dove dQ/dt è il flusso termico (potenza dissipata) in watt

h_e è il coefficiente di trasferimento evaporativo (W/m^2Pa)

A è l'area della superficie cutanea

p_s è la pressione di vapore saturo dell'acqua alla temperatura della pelle

p_a è la pressione di vapore parziale dell'aria (dipende dall'umidità relativa)

Si vede che ad esempio quando p_a si avvicina a p_s la differenza si riduce e l'evaporazione sarà minore.

La temperatura della pelle (non del sudore in sé, ma della superficie cutanea sudata) è di solito intorno ai 34–35 °C. Alla temperatura di 35 °C, la pressione di vapore saturo dell'acqua è circa:

$$p_s = 5620 \text{ Pa}$$

Opportune tabelle, dette "tabelle psicrometriche", noto il grado di umidità dell'aria, consentono di ricavare la pressione parziale del vapore d'acqua, come ad esempio la seguente tabella.

Temp (°C)	p_s (Pa)	Umidità rel. ϕ	p_a (Pa)
20	2338	50%	1169
20	2338	80%	1870
25	3169	60%	1901
30	4240	40%	1696
30	4240	60%	2544
35	5620	40%	2248
35	5620	80%	4496

Il valore dell'area della superficie cutanea A , è grosso modo di 2 m² per una persona alta 1.80 m.

Rimane da valutare il parametro h_e , spesso viene usata la seguente relazione empirica

$$h_e = 16.5 \cdot h_c$$

dove h_c è il coefficiente di scambio termico convettivo che dipende dalla velocità dell'aria, una stima del suo valore può essere fatta usando la seguente relazione

$$h_c = 2.38 \cdot v^{0.25} \text{ dove } v \text{ è espresso in m/s.}$$

Esempi tipici:

Velocità aria v [m/s]	h_c [W/m ² ·K]
0,1	1,3
0,3	1,7
0,5	2,0
1,0	2,4
2,0	2,8

In condizioni normali indoor (poca aria in movimento), $v \approx 0,3$ m/s si ha $h_c \approx 1,7$ W/m² Pa

Esempio. Usando i valori di un ambiente indoor $v = 0,3$, $h_c = 1,7$, $h_e = 28$ W/m² Pa si ha

Flusso di calore disperso: $dQ/dt = 154$ W

Nel caso di una corsa a 10 km/h (2.78 m/s) la pelle “sente” un flusso di aria maggiore rispetto al caso sedentario, quindi aumenta h_c e di conseguenza h_e . Correndo con tale velocità il corpo genera una potenza sui 300 W. Ma a causa dell’inefficienza del corpo umano, solo il 20% circa della potenza prodotta dal metabolismo va in lavoro meccanico, il resto è calore da dissipare. E’ una situazione perfettamente analoga al caso del motore a scoppio delle nostre auto le quali hanno una efficienza esse pure intorno al 20%., in effetti possiamo dire che noi per spostarci utilizziamo delle stufe!

Il corpo quindi è costretto a regolare la sua temperatura aumentando il sudore — ma solo la parte che evapora effettivamente contribuisce al raffreddamento in quanto il sudore che gocciola è “sprecato” in termini di perdita di calore.

Abbiamo i seguenti dati:

$v = 3$ m/s (questa è la velocità relativa dell'aria sulla pelle dovuta al moto in assenza di vento)

Temperatura aria 30 °C

Umidità relativa 30%

Superficie corporea 2 m²

Temperatura della pelle 35 °C

P_s (35 °C) = 5620 Pa

$P_a = 0.50 P_s$ (35 °C) = 2120 Pa

$h_c = 2.38 \cdot v^{0.25} = 2.38 \cdot 3^{0.25} = 3.13$ W/m² Pa

$h_e = 16.5 \cdot h_c = 16.5 \cdot 3.13 = 51.6$ W/m² Pa

$$dQ/dt = h_e A (p_s - p_a) = 342 \text{ W} = 294 \text{ kcal/h}$$

Quanti grammi di sudore sono necessari per dissipare 294 kcal/h di calore che si disperde per evaporazione?

Sapendo che 1 grammo di sudore evaporato sottrae 0.58 kcal possiamo calcolare la massa occorrente:

$$\text{massa sudore}(g) = \frac{294}{0.58} = 507 (g / h)$$

Quindi durante una corsa a 10 km/h, in condizioni ambientali calde-umide, occorre far evaporare circa 0,5 L di sudore all'ora per mantenere la temperatura corporea.

Nota: la sudorazione reale è anche maggiore, perché non tutto il sudore evapora in quanto parte scivola via un valore realistico è di circa 1 L/h.

Fattori che influenzano h_e :

Fattore	Effetto su h_e
Velocità dell'aria	↑ velocità → ↑ h_e
Postura / movimento	Se ti muovi o cammini → ↑ h_e , quindi ↑ h_e
Abbigliamento	Copre la pelle → ↓ superficie efficace → ↓ effetto evaporativo
Sudorazione attiva	Aumenta l'effetto evaporativo potenziale, ma solo se il sudore può evaporare
Umidità alta	Non riduce h_e , ma riduce $\Delta p = p_s - p_a$ quindi riduce il flusso effettivo

Da notare che se l'aria ha una pressione parziale di vapore d'acqua uguale o superiore a quella del corpo non può avvenire scambio di tipo diffusivo attraverso la pelle né scambio di tipo evaporativo. In una situazione limite di condizione ambientale "caldo - umida" in cui la temperatura dell'aria sia uguale a 37°C e il grado igrometrico sia pari a 100% (la temperatura coincide di fatto con la temperatura del corpo umano e quindi le due pressioni si eguagliano), lo scambio evaporativo è nullo. Ciò non significa che il corpo umano non sudi. L'organismo infatti percepisce soltanto la sensazione di "caldo" o "freddo" e non può avere una giusta misurazione igrometrica: l'organismo suda, si copre di film liquido, ma esso non evapora e quindi non asporta calore dal corpo; il centro termoregolatore continua a percepire caldo vengono persi inutilmente litri di sudore, senza riuscire a raffreddare il corpo.

Concludiamo questa sezione facendo il confronto fra due situazioni esplicative del fenomeno.

Caso A: Deserto (Umidità 10%). L'aria è secca, quindi p_v è molto basso. La differenza ($p_s - p_a$) è grande. Il nostro sudore evapora istantaneamente, raffreddandoci in modo super efficiente. Ci sentiamo caldi, ma è sopportabile.

Caso B: Giungla (Umidità 95%). L'aria è quasi satura di vapore, quindi p_a è molto alto, quasi uguale a p_s . La differenza ($p_s - p_a$) è minima. Sudiamo a litri, ma il sudore non riesce a evaporare. Rimane sulla pelle, non sottrae calore e ci sentiamo oppressi, appiccicosi e spossati. L'afa è più pericolosa del caldo secco!

Nota 1.

Riprendendo l'esempio fatto al paragrafo "Irraggiamento", quantifichiamo il sudore necessario per smaltire un'attività fisica che sviluppa 151 W di potenza.

L'acqua (sudore) per passare dallo stato liquido a quello gassoso (vapore) assorbe una grande quantità di energia termica (in questo caso lo assorbe dalla pelle), chiamata calore latente di vaporizzazione, è ovvio che questo valore dipende dalla temperatura, infatti basti pensare che più ci si avvicina alla temperatura di ebollizione di una sostanza (a una certa pressione), minore sarà il calore latente richiesto per farla evaporare.

Per l'acqua a temperatura corporea, questo valore è di circa 2430 joule per grammo ($2.43 \cdot 10^6$ J/kg).

Per dissipare 151 W (che sono 151 J/s), di quanto sudore abbiamo bisogno?

$$\begin{aligned} Tassodi\ sudorazione(g / s) &= \frac{Potenza(J / s)}{Calorelatente)(J / g)} = \frac{151}{2430} = 0.062\ g / s = \\ &= 0.062 \frac{3600\ g}{3600\ s} = 0.062 \cdot 3600\ g / h = 223.2\ g / h \end{aligned}$$

Quindi, solo per stare fermo a 40 °C, il corpo deve produrre e far evaporare quasi un quarto di litro (250 g) di sudore ogni ora per mantenere stabile la sua temperatura interna. Se si aggiunge anche una minima attività fisica (che aumenta M), il tasso di sudorazione necessario aumenta drasticamente.

Concludendo questo esempio possiamo dire che con una temperatura esterna di 40 °C:

Irraggiamento e Convezione si invertono: Invece di raffreddare il corpo, lo riscaldano.

L'evaporazione è l'unico strumento di raffreddamento: Il corpo si affida interamente alla sudorazione.

L'umidità diventa critica: Se l'umidità dell'aria è alta, l'evaporazione del sudore è più difficile. Questo è il motivo per cui 40°C in un clima secco (es. deserto) sono più sopportabili di 35°C in un clima umido (es. foresta tropicale). Quando l'evaporazione fallisce, si va incontro al colpo di calore, ed in casi estremi alla morte.

La valvola di sicurezza del nostro corpo: il Termine di Accumulo

Il termine di accumulo è la nostra batteria termica. È la capacità del corpo di "assorbire" un eccesso di calore o di "cedere" energia dalle sue riserve quando fa freddo.

Questa batteria non è infinita. La sua capacità massima è di circa ± 600 kJ.

Scenario "Colpo di Freddo": Immaginate di perdervi in montagna di notte. La temperatura crolla. Il vostro corpo inizia a "spendere" l'energia accumulata per mantenere gli organi vitali caldi. Brucia le sue riserve (-600 kJ). Se questa energia si esaurisce, il corpo va in crisi: sospende la circolazione a mani e piedi (che diventano insensibili) e, nei casi estremi, si arriva all'ipotermia, alla necrosi dei tessuti e alla morte.

Scenario "Congestione": Vi tuffate in acqua gelida dopo aver preso il sole per ore. La nuca, dove si trova il nostro "termostato" (l'ipotalamo), subisce uno shock termico. Il termostato crede che tutto il corpo sia in ipotermia e lancia l'allarme: blocca la digestione, restringe i vasi sanguigni periferici e può causare uno shock. È un "falso allarme" del nostro sistema di sensori, con conseguenze potenzialmente gravi.

Il metabolismo è l'input primario del termine di accumulo. La capacità termica totale che l'organismo può sopportare, ovvero la massima dose di energia che l'organismo può temporaneamente mettere a disposizione in caso di freddo o di caldo è pari circa a ± 600 kJ. Il termine U costituisce la "valvola di sicurezza" del sistema nel momento in cui condizioni ambientali particolarmente severe non consentano all'organismo umano di far fronte alle esigenze energetiche con i mezzi usualmente utilizzati allo scopo. In condizioni transitorie il termine di accumulo diviene particolarmente importante e permette all'organismo umano di resistere a condizioni ambientali gravose. Scompensi dell'ordine di 600 kJ costituiscono i valori limite dell'elasticità energetica dell'organismo umano, al di là dei quali difficilmente la vita è in grado di riprendere il suo ritmo normale. Per una variazione in negativo maggiore di 600 kJ si verifica il cosiddetto "colpo di freddo", cioè si ha un significativo abbassamento della temperatura corporea, un grave deficit di energia, che l'organismo cerca di compensare attraverso la sospensione di alcuni servizi considerati non essenziali. Se un individuo si espone per pochi istanti a condizioni ambientali estremamente rigide, l'organismo non fa in tempo ad erogare la quota di energia che scatena questi meccanismi fisiologici (ad esempio il cosiddetto "blocco di digestione"), ma se la permanenza in queste condizioni sfavorevoli viene prolungata, l'organismo è costretto ad interrompere alcune funzioni come la circolazione sanguigna negli arti estremi, non considerati indispensabili per la sopravvivenza generale del corpo umano. Questi processi di raffreddamento estremo provocano conseguenze gravi (si verifica quel complesso di alterazioni strutturali irreversibili, detto necrosi, che ha per conseguenza la morte di cellule o di tessuti dell'organismo).

A causa della particolare posizione che il centro termoregolatore occupa all'interno del corpo umano, la percezione dell'organismo può essere facilmente ingannata: un improvviso raffreddamento della nuca, zona in cui risiede l'ipotalamo, può produrre l'erronea valutazione di un gravissimo raffreddamento del corpo, anche se l'organismo non è realmente in deficit di energia.

Questo fenomeno si verifica tipicamente quando un individuo si tuffa in una piscina gelata, dopo essere stato lungamente esposto al sole: il centro termoregolatore è improvvisamente raffreddato e immediatamente vengono sospese le attività digestive, la circolazione negli organi periferici (le mani ad esempio perdono sensibilità e la capacità di nuotare o attaccarsi agli appigli); addirittura si può verificare un blocco respiratorio o cardiaco.

Il corpo umano non è una macchina perfetta: come tutti i sistemi dotati di sensoristica è molto sensibile alle azioni dirette sui sensori, che possono facilmente portare a errori di valutazione. (Per impedire i casi di congestione sarebbe opportuno proteggere la nuca con un cappuccio di neoprene, in modo tale da difendere il centro termoregolatore da bruschi sbalzi di temperatura).

Esempi di Utilizzo dell'Accumulo

Situazione di freddo intenso:

Temperatura esterna: -20°C

Dispersione extra: $200 \text{ W/m}^2 \cdot 2 \text{ m}^2 = 400 \text{ W}$

Durata massima sopportabile: $t = \text{Energia}/\text{Potenza} = 600,000 \text{ J} / 400 \text{ W} \approx 25 \text{ minuti}$

Situazione di caldo intenso:

Temperatura esterna: 45°C , umidità 90%

Impossibilità di sudorazione efficace

Accumulo di calore: $150 \text{ W per } 1 \text{ ora} = 540 \text{ kJ}$ (vicino al limite!)

Durata massima sopportabile: $t \approx 1 \text{ ora}$

Conclusioni

● Irraggiamento

Domina a basse temperature: oltre **360 W** a **0 °C**.

Decresce rapidamente con l'aumento della temperatura ambiente.

Si azzerava verso i **37 °C**.

● Convezione naturale

Proporzionale alla differenza $T_{\text{corpo}} - T_{\text{amb}}$.

Si aggira attorno ai **60–100 W** per temperature ambiente comuni.

Molto influenzata dal **movimento d'aria** (vento → convezione forzata).

● Conduzione

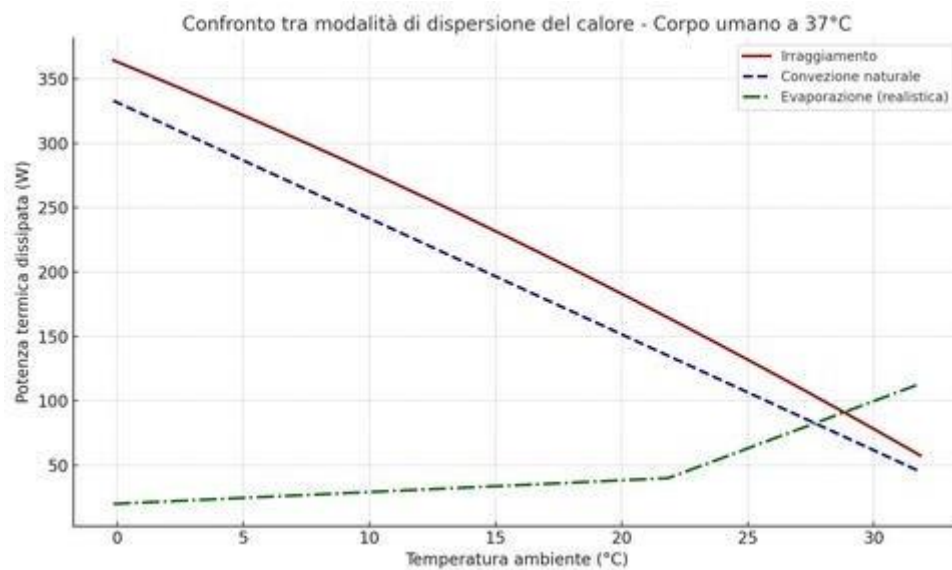
Trasferimento di calore per contatto diretto con superfici solide (es. acqua, terra, metallo, abbigliamento).

In aria, il contributo è in genere trascurabile (<5 W) a meno di contatti prolungati.

Può diventare molto rilevante in acqua fredda o su superfici ad alta conducibilità termica.

● Evaporazione (costante ~25 W)

- Presente anche a riposo, indipendente dalla temperatura ambiente (fino a ~35 °C).
- Diventa il principale meccanismo quando l'ambiente è caldo (oltre i 30 °C) in quanto gli altri meccanismi di dispersione non sono più sufficienti.
- Può arrivare a 60 W durante sudorazione intensa (esercizio fisico, caldo estremo).
- Nel seguente grafico mostrato l'andamento delle varie modalità di dispersione del calore, ad eccezione della conduzione in quanto trascurabile.



Variazione delle riserve energetiche (ΔS)

Riprendiamo la relazione (5)

$$\Delta S = E_{in} - E_{out}$$

Il termine (Δ) indica la variazione delle scorte (S) energetiche del corpo, principalmente sotto forma di:

- grasso corporeo
- glicogeno (*)
- massa muscolare (in certi casi, ad esempio in ipercatabolismo)

In pratica se $E_{in} > E_{out}$ allora ΔS è positivo e si ha un accumulo di riserve energetiche

se $E_{in} < E_{out}$ allora ΔS è negativo e si ha un consumo di riserve energetiche

se $E_{in} = E_{out}$ allora ΔS è nullo e la situazione è stabile.

$$\Delta S > 0$$

L'energia in eccesso viene immagazzinata sotto forma di massa (principalmente grasso, ma in certi casi anche glicogeno e un po' di massa muscolare).

Se il surplus è moderato e costante → aumento di peso nel tempo.

Se il surplus è elevato → accumulo più rapido di tessuto adiposo.

$$\Delta S < 0$$

Se invece l'energia richiesta supera quella fornita dagli alimenti il corpo deve compensare attingendo alle riserve interne:

Grasso corporeo → principale "banca energetica" (trigliceridi).

Glicogeno nei muscoli e nel fegato → usato nelle prime ore di deficit.

Proteine muscolari (in caso di deficit prolungato o molto marcato) → degradate in aminoacidi e convertite in energia via gluconeogenesi.

Effetti fisiologici principali:

Perdita di peso (prevalentemente massa grassa, ma anche massa magra se il deficit è grande o la dieta è sbilanciata).

Se il deficit è lieve e ben gestito → il corpo adatta il metabolismo senza grossi danni.

Se è forte e prolungato → calo del metabolismo basale, perdita muscolare, possibili carenze nutrizionali.

(*) Il glicogeno è un polisaccaride di riserva formato da tante molecole di glucosio collegate tra loro, conservato soprattutto:

- Nel fegato (~120 g in un adulto medio) → serve a mantenere la glicemia costante per tutto il corpo.
- Nei muscoli (~500 g totali) → usato localmente come carburante per la contrazione muscolare.

Cosa succede in deficit energetico

1. Prime ore di digiuno o deficit → il corpo consuma il glicogeno epatico per mantenere la glicemia.
2. Durante attività fisica → i muscoli usano il loro glicogeno per produrre ATP, specialmente in esercizi ad alta intensità.
3. Quando le scorte scendono molto, il corpo inizia a:
 - aumentare la mobilizzazione dei grassi (lipolisi);
 - attivare la gluconeogenesi (produzione di glucosio da aminoacidi, glicerolo, lattato).

Capacità energetica del glicogeno

1 g di glicogeno → ~4 kcal (circa 17 kJ)

Totale scorte corporee: 400–600 g → 1600–2400 kcal totali

Si esauriscono in circa 24 ore di digiuno o in poche ore di esercizio intenso.

Esempi numerici

Esempio 1) Calcolo del Metabolismo Basale (BMR) e totale (TDEE)

Soggetto: Donna, 30 anni, 65 kg, 170 cm, moderatamente attiva

Calcolo del BMR (Mifflin-St Jeor): $BMR = 10 \cdot \text{peso (kg)} + 6.25 \cdot \text{altezza (cm)} - 5 \cdot \text{età (anni)} - 161$

$BMR = (10 \cdot 65) + (6,25 \cdot 170) - (5 \cdot 30) - 161$
 $BMR = 650 + 1062,5 - 150 - 161 = 1401,5$
kcal/giorno

Calcolo del TDEE (metabolismo totale):

$TDEE = BMR \cdot F$ (dove F è il fattore di attività, come visto nel paragrafo sul metabolismo totale)

$TDEE = BMR \cdot 1,55 = 1401,5 \cdot 1,55 = 2172$ kcal/giorno

Distribuzione del dispendio:

BMR: 1400 kcal (64,5%)

TEF: 200 kcal (10%)

Attività: 550 kcal (25,5%)

Esempio 2) Pianificazione di una Dieta

Calcolare di quante kcal si deve ridurre una dieta per dimagrire 0,5 kg/settimana.

Siccome quando si crea un deficit alimentare la prima cosa che il corpo fa è attingere alle riserve energetiche di grasso, partiamo dal considerare che 1 kg di grasso corporeo equivale a circa 7.700 kcal, quindi per perdere 0,5 kg di grasso in una settimana è necessario creare un deficit totale di circa 3.850 kcal, cioè circa 500 kcal al giorno.

Nel caso di una dieta di partenza di 2170 kcal al giorno essa andrà portata a $2170 - 500 = 1670$ kcal, che potrebbe equilibrata nel seguente modo:

Proteine (25%): 100 g

Carboidrati (45%): 182 g

Grassi (30%): 54 g

Abbiamo descritto il caso in cui si volesse dimagrire puntando solo in una diminuzione di input calorico, se invece si volesse agire anche sul fronte di un aumento del dispendio energetico, si potrebbe programmare ad esempio

- una diminuzione di introito calorico di 250 kcal
- un aumento di dispendio di 250 kcal.

Attività fisica per “bruciare” 250 kcal

Camminata veloce (6 km/h) per 45 min

Ciclismo moderato (20 km/h) per 30 min

Nuoto moderato per 30 min

Fitness/Aerobica per 30 min

La restante quota di 250 kcal va scalata dall'apporto della dieta

Questa tabella permette di vedere a colpo d'occhio quante calorie contengono i cibi più comuni, permettendo così di agire sulla propria dieta per diminuirla dei 250 kcal del nostro esempio.

Tabella calorie per 100g di alimenti comuni

<i>Categoria</i>	<i>Alimento</i>	<i>Calorie (kcal)</i>	<i>Note</i>
<i>Carboidrati</i>	Pasta di semola	360	Peso a crudo
	Riso bianco	360	Peso a crudo
	Pane bianco	265	
	Patate	80	Peso a crudo
	Fette biscottate	410	
<i>Proteine</i>	Petto di pollo	110	Crudo, senza pelle
	Carne di manzo magra	140	Cruda
	Salmone fresco	200	Crudo
	Uova	155	Circa 2 uova grandi
	Tonno al naturale	115	Sgocciolato
<i>Latticini</i>	Latte intero	65	
	Yogurt greco 0% grassi	59	
	Parmigiano Reggiano	430	
	Mozzarella di vacca	280	
<i>Frutta</i>	Mela	52	
	Banana	89	
	Arancia	47	
	Fragole	32	
<i>Verdura</i>	Lattuga	15	
	Pomodori	18	
	Carote	41	
	Zucchine	17	
<i>Condimenti</i>	Olio evo	900	
	Burro	720	
<i>Frutta secca</i>	Mandorle	580	
	Noci	650	
	Pistacchi	560	
	Arachidi	600	
<i>Dolci e Snack</i>	Cioccolato fondente	550	
	Cioccolato al latte	535	
	Cornetto (vuoto)	450	
	Gelato alla crema	400	
	Miele	300	
	Zucchero (bianco/canna)	400	
<i>Bevande</i>	Vino rosso	85	
	Bibita zuccherata	40	

E' possibile — in linea teorica — creare un “deficit” di 500 kcal solo aumentando il dispendio energetico tramite attività fisica, senza modificare la dieta.

Camminata veloce (6 km/h) per 1.5 ore

Corsa (10 km/h) 45 min

Ciclismo moderato (20 km/h) per 1 ora

Nuoto moderato per 1 ora

Fitness/Aerobica per 1 ora

Perché “in linea teorica? Perché nella pratica, il corpo non è una calcolatrice perfetta:

Adattamenti metabolici: se si aumenta di tanto l'attività fisica, il metabolismo basale può ridursi leggermente per compensare.

Compensazione comportamentale: a volte, senza accorgersi, ci si muove di meno nel resto della giornata, ad es. dopo un allenamento impegnativo si passa più tempo stando seduti.

Fame eccessiva: l'esercizio intenso può aumentare l'appetito, e se mangi di più annulli il deficit.

Variabilità individuale: età, sesso, massa muscolare e livello di allenamento influenzano quante calorie bruci davvero.

Quindi “in linea teorica” funziona benissimo, ma nella realtà i risultati possono differire e serve un minimo di strategia per evitare che il corpo “recuperi” le energie spese con l'aumento dell'attività fisica.

N.B.

Abbiamo parlato quasi esclusivamente di grasso per un motivo fondamentale: in un percorso di dimagrimento sano e sostenibile, l'obiettivo primario è massimizzare la perdita di massa grassa e ridurre al minimo la perdita di massa magra (principalmente muscoli).

Quando si perde peso, non si perde solamente grasso. Il peso che si vede scendere sulla bilancia è una combinazione di:

Grasso (massa grassa): è il tessuto adiposo, la principale riserva di energia del corpo. Questo è ciò che si vuole ridurre per migliorare la salute e la composizione corporea. È molto denso di energia: 1 kg di tessuto adiposo contiene circa 7.700 kcal.

Acqua: Soprattutto nelle prime settimane di una dieta, una parte significativa del peso perso è costituita da liquidi. Questo accade perché il corpo utilizza le sue riserve di glicogeno (zuccheri immagazzinati nei muscoli e nel fegato). Ogni grammo di glicogeno è legato a circa 3-4 grammi di acqua. Quando il glicogeno viene consumato, l'acqua viene espulsa.

Massa Magra (incluso il muscolo): Questa è la componente che si vuole preservare a tutti i costi. Una perdita significativa di massa muscolare è controproducente perché:

Abbassa il metabolismo: i muscoli bruciano più calorie a riposo rispetto al grasso. Perderli rende più difficile continuare a dimagrire e più facile recuperare peso in futuro (il cosiddetto "effetto yo-yo").

Peggiora la forma fisica: Si perde tono, forza e funzionalità.

Il calcolo standard di "un deficit di 3.500 kcal per perdere 0,5 kg" si basa sull'energia contenuta prevalentemente nel tessuto grasso. Si usa come punto di riferimento perché:

È l'obiettivo desiderabile: la finalità della dieta è perdere grasso.

È un modello pratico: fornisce una stima semplice e funzionale per impostare un piano alimentare.

Promuove un approccio sano: Un deficit moderato di 500 kcal al giorno, abbinato a un'adeguata assunzione di proteine e a un po' di attività fisica, aiuta a indirizzare il corpo a bruciare le riserve di grasso piuttosto che a "cannibalizzare" i muscoli per ottenere energia.

Osservazione

- **Il Glicogeno è il "Portafoglio":** Contiene energia di pronto utilizzo, facilmente accessibile, ma in quantità limitata.
- **Il Grasso è il "Conto di Risparmio":** Contiene un'enorme riserva di energia, ma è più lento e complesso da prelevare.

Ecco cosa succede nel dettaglio quando inizi a ridurre le calorie.

Fase 1: Consumo del Glicogeno (Le prime ore / I primi giorni)

1. **Bisogno Immediato di Energia:** Appena crei un deficit calorico, il tuo corpo ha bisogno di energia per le sue funzioni base e per le tue attività. La prima fonte, la più rapida e comoda, è il glucosio che circola nel sangue.
2. **Accesso al "Portafoglio":** Esaurito il glucosio disponibile, il corpo si rivolge alle sue scorte di glicogeno immagazzinate nel fegato e nei muscoli. Le scompone rapidamente per rilasciare glucosio e produrre energia.
3. **La Perdita di Acqua:** Questo è un punto cruciale. Ogni grammo di glicogeno è legato a circa 3-4 grammi di acqua. Quando bruci glicogeno, liberi e elimini anche quest'acqua. **Questo è il motivo per cui nei primi giorni di dieta si assiste spesso a una perdita di peso molto rapida e significativa:** è in gran parte acqua, non ancora grasso.

Fase 2: Consumo del Grasso (Il dimagrimento reale e sostenibile)

1. **Le Scorte di Glicogeno si Riducono:** Le riserve di glicogeno non sono infinite. Dopo circa 24-48 ore di deficit calorico, pur non esaurendosi mai del tutto, si riducono a un livello tale che il corpo deve necessariamente attingere in modo più massiccio al suo "conto di risparmio".
2. **Attivazione della Lipolisi:** Il corpo inizia a scomporre i trigliceridi immagazzinati nelle cellule adipose (il nostro grasso corporeo) in acidi grassi. Questi acidi grassi vengono rilasciati nel sangue e trasportati ai muscoli e ad altri tessuti per essere usati come fonte di energia.
3. **Perdita di Grasso Reale:** Questo processo è più lento ma molto più potente, data l'enorme quantità di energia immagazzinata nel grasso. La perdita di peso diventa più lenta e graduale (come l'obiettivo di 0,5 kg a settimana), ma **ora stai perdendo prevalentemente massa grassa**, che è l'obiettivo finale.

Esempio 3) Calcolo del Dispendio per Attività

Attività: Corsa a 12 km/h per 45 minuti Soggetto: Uomo, 80 kg

Calcolo del dispendio:

MET per corsa a 12 km/h = 12,8 Dispendio/min = $12,8 \cdot 3,5 \cdot 80 / 200 = 17,92$ kcal/min

Dispendio totale = $17,92 \cdot 45 = 806$ kcal

Comparazione con altri macronutrienti:

- Equivale a 90 g di grassi
- Equivale a 201 g di carboidrati
- Equivale a 201 g di proteine

Esempio 4) Effetto del Clima sulla Termoregolazione

Condizioni: Temperatura 35°C, umidità 70%, attività moderata

Calcolo della perdita di calore per evaporazione:

Produzione di calore = 400 kcal/h = 465 W Efficienza sudorazione = $1 - 0,70 = 0,30$ Sudore necessario = $465 \text{ W} / (0,30 \times 680 \text{ W/L}) = 2,3 \text{ L/h}$

Fabbisogno idrico:

Fabbisogno totale = $2,3 \text{ L/h} + 0,5 \text{ L/h (perdite basali)} = 2,8 \text{ L/h}$

Conclusioni

Il bilancio energetico del corpo umano rappresenta un sistema complesso e dinamico governato da principi termodinamici fondamentali ma influenzato da numerosi fattori biologici, ambientali e comportamentali. La comprensione quantitativa di questi meccanismi è essenziale per applicazioni pratiche in ambito clinico, nutrizionale e sportivo.

L'analisi dei dati presentati evidenzia come il metabolismo basale rappresenti la componente principale del dispendio energetico totale, costituendo circa il 60-70% del fabbisogno calorico giornaliero in individui sedentari. Tuttavia, la variabilità inter-individuale è significativa e può raggiungere il 20-30%, rendendo necessario un approccio personalizzato nel calcolo del fabbisogno energetico.

Le equazioni predittive del metabolismo basale, sebbene utili nella pratica clinica, presentano limiti di accuratezza che possono essere significativi a livello individuale. L'equazione di Mifflin-St Jeor risulta generalmente più accurata rispetto a quella di Harris-Benedict, ma entrambe possono sottostimare o sovrastimare il metabolismo reale fino al 10-20%.

La termoregolazione rappresenta un aspetto cruciale del bilancio energetico, particolarmente in condizioni ambientali estreme o durante l'attività fisica intensa. La capacità di produrre e dissipare calore influenza significativamente il dispendio energetico e può richiedere adattamenti nutrizionali e idrici specifici.

La relazione tra bilancio energetico e peso corporeo, sebbene concettualmente semplice, è complicata dagli adattamenti metabolici che si verificano durante la perdita o l'aumento di peso. La classica regola delle 3500 kcal per kg di peso può essere imprecisa nel lungo termine a causa di questi adattamenti.

Gli esempi numerici presentati dimostrano l'importanza di un approccio quantitativo nella valutazione del bilancio energetico, fornendo strumenti pratici per la pianificazione nutrizionale e la gestione del peso corporeo. Tuttavia, è fondamentale considerare la variabilità individuale e monitorare costantemente la risposta del soggetto agli interventi implementati.

In conclusione, il bilancio energetico del corpo umano rimane un campo di ricerca attivo, con continue evoluzioni nella comprensione dei meccanismi molecolari e fisiologici coinvolti. L'integrazione di approcci quantitativi con tecnologie avanzate di monitoraggio prometterà ulteriori progressi nella personalizzazione degli interventi nutrizionali e nell'ottimizzazione della salute metabolica.

Prospettive Future

Le prospettive future nella ricerca sul bilancio energetico includono:

1. Personalizzazione genetica: Sviluppo di algoritmi che incorporino profili genetici per predire il metabolismo individuale
 2. Tecnologie wearable: Miglioramento dei dispositivi per il monitoraggio continuo del dispendio energetico
 3. Intelligenza artificiale: Applicazione di algoritmi di machine learning per ottimizzare la predizione del bilancio energetico
 4. Microbioma intestinale: Comprensione del ruolo del microbiota nella regolazione del metabolismo energetico.
-

Bibliografia Essenziale

1. Brooks GA, Fahey TD, Baldwin KM. Exercise Physiology: Human Bioenergetics and Its Applications. 4th ed. McGraw-Hill; 2005.
 2. Levine JA. Measurement of energy expenditure. Public Health Nutr. 2005;8(7A):1123-1132.
 3. Mifflin MD, St Jeor ST, Hill LA, et al. A new predictive equation for resting energy expenditure in healthy individuals. Am J Clin Nutr. 1990;51(2):241-247.
 4. Hall KD, Heymsfield SB, Kemnitz JW, et al. Energy balance and its components: implications for body weight regulation. Am J Clin Nutr. 2012;95(4):989-994.
 5. Rosenbaum M, Leibel RL. Adaptive thermogenesis in humans. Int J Obes. 2010;34 Suppl 1:S47-55.
-

Perché in estate fa più caldo che in inverno?

a cura di Giancarlo Buccella

La variazione dell'intensità luminosa che arriva dal Sole sulla Terra è dovuta a due fattori: alla variazione della distanza della Terra dal Sole e dal variare dell'angolo di incidenza dei raggi sulla superficie terrestre.

Premessa: legge del quadrato della distanza.

Supponiamo di avere una certa sorgente luminosa (una candela, una lampadina, il Sole...) è intuitivo pensare che la sua "potenza luminosa", ossia l'energia che emette nell'unità di tempo (che si misura in watt) si distribuisca uniformemente nello spazio e cioè ad una particolare distanza R, sulla superficie di una sfera di raggio R, e questa "distribuzione di energia" viene descritta dalla grandezza "intensità" che quindi si misura in W/m^2 .

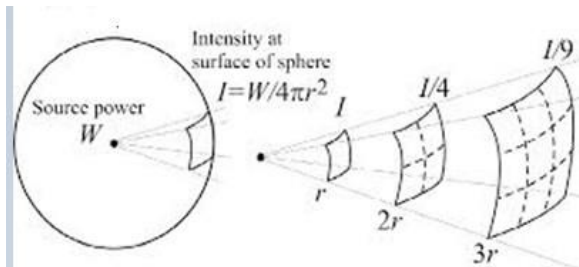
In particolare conoscendo la potenza emissiva del Sole sarà possibile ricavare l'intensità che arriva alla distanza della Terra.

Infatti si ha che l'intensità luminosa di una sorgente diminuisce con la distanza semplicemente con la legge dell'inverso del quadrato della distanza

$$I = \frac{P_0}{4\pi R^2}$$

dove P_0 è una costante (ossia il valore della potenza luminosa emessa dalla sorgente) ed R è la distanza.

Questa formula non ci dice nient'altro che (ricordando che l'area della superficie di una sfera di raggio R è $4\pi R^2$) la potenza emissiva della sorgente luminosa si spande sulla superficie di una sfera che dista R dalla sorgente stessa.



- P_0 è la luminosità intrinseca del Sole (potenza totale emessa, in watt) $P_0 = 3.828 \cdot 10^{26} \text{ W}$
- R è la distanza media tra la Terra e il Sole (circa $1,496 \times 10^{11} \text{ m}$)

$$I_s = \frac{3.828 \cdot 10^{26}}{4\pi (1.496 \cdot 10^{11})^2} = 1360 \text{ W/m}^2$$

(Il valore medio più recente misurato dai satelliti è di 1367 W/m^2)

Questa intensità è chiamata costante solare e rappresenta l'intensità media della radiazione solare (che incida perpendicolarmente sull'unità di superficie) appena fuori dall'atmosfera terrestre.

In Italia al suolo in estate con il sole allo zenit è di circa 1000 W/m^2 .

Variazione dovuta alla distanza Terra-Sole

Nel calcolo precedente avevamo assunto come distanza Terra-Sole il valore medio, ora invece dobbiamo calcolare come varia l'intensità con il variare della distanza, sapendo che tale variazione è di circa 5 milioni di chilometri.



I valori delle distanze Terra-Sole sono:

$$R_{\text{estate}} = 152 \text{ milioni di chilometri} = 1.526 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$R_{\text{inverno}} = 147 \text{ milioni di chilometri} = 1.475 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$I_{\text{ESTATE}} = \frac{3.828 \cdot 10^{26}}{4\pi (1.526 \cdot 10^{11})^2} = 1309 \text{ W / m}^2$$

$$I_{\text{INVERNO}} = \frac{3.828 \cdot 10^{26}}{4\pi (1.475 \cdot 10^{11})^2} = 1400 \text{ W / m}^2$$

La variazione dell'intensità dovuta solamente alla distanza è di circa 100 W/m²

Quindi se questo fosse l'unico fattore per descrivere la situazione dovrebbe far caldo più in inverno che in estate, ma c'è anche un altro fattore che influenza il valore dell'intensità ed è l'inclinazione dei raggi rispetto alla superficie terrestre.

Variazione dovuta al variare dell'angolo di incidenza

Premessa

Quando una radiazione luminosa di intensità I incide su una superficie inclinata, l'intensità della radiazione che colpisce effettivamente la superficie è influenzata dall'angolo di incidenza θ (l'angolo tra la direzione della radiazione e la normale alla superficie).

Il valore dell'intensità effettiva della radiazione che incide perpendicolarmente alla superficie inclinata si calcola come:

$$I = I_0 \cos\theta$$

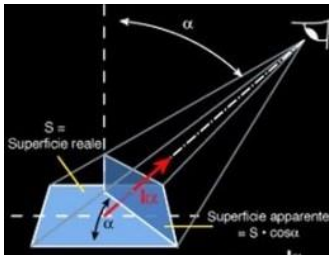
- I_0 è l'intensità della radiazione incidente (lungo la direzione della radiazione),
- θ è l'angolo tra la direzione della radiazione e la normale alla superficie.

Considerando l'intensità della radiazione solare al limite dell'atmosfera terrestre, come abbiamo visto:

$I = 1360 \text{ W/m}^2$ ed è immediata la verifica della formula precedente, infatti essendo l'angolo di incidenza pari a zero si ha

$$I = I_s \cos 0^\circ = I_s = 1360 \text{ W / m}^2 \text{ (essendo } \cos 0^\circ = 1)$$

Nel caso invece la superficie che intercetta la radiazione è inclinata di un certo angolo rispetto alla perpendicolare è intuitivo pensare che l'intensità diffondendosi su una superficie più ampia rispetto alla precedente avrà un valore (per unità di area) inferiore, ed è la funzione coseno che ci rende conto di tale diminuzione.



Incidenza perpendicolare: Angolo 0° $\cos 0^\circ = 1$ $I = I_s \cos 0^\circ = I_s \cdot 1 = 1360 \text{ W / m}^2$

Incidenza parallela: Angolo 90° $\cos 90^\circ = 0$ $I = I_s \cos 90^\circ = I_s \cdot 0 = 0 \text{ W / m}^2$

L'unico parametro ai fini del calcolo dell'intensità è dato dall'angolo di incidenza θ , che ripetiamolo è l'angolo fra la direzione dei raggi solari (che supponiamo arrivino tutti paralleli fra loro a causa della grande distanza dalla sorgente) e la perpendicolare alla superficie di incidenza, ossia al piano tangente alla superficie terrestre in un dato punto.



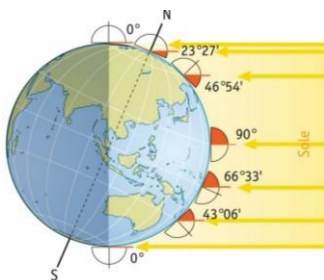
Per trovare l'angolo θ , possiamo usare la seguente formula:

$$\theta = \lambda - \delta$$

dove λ è l'angolo della latitudine del luogo considerato (Roma: $\lambda = 41^\circ 54'$), mentre δ è la **declinazione solare**, un angolo che varia con le stagioni secondo l'inclinazione della Terra.

[La declinazione solare (δ) è l'angolo formato dalla direzione dei raggi solari sul meridiano considerato con il piano equatoriale terrestre. Essa varia durante l'anno a causa dell'inclinazione dell'asse terrestre e non dipende dalla latitudine ma solo del giorno dell'anno considerato ed è la stessa per tutti i punti lungo il meridiano.]

Ad esempio nel solstizio d'estate i raggi solari incidono perpendicolarmente al parallelo del tropico del cancro (vedi figura), mentre al solstizio d'inverno sono perpendicolari al tropico del capricorno; mentre nell'equinozio di primavera ed autunno sono perpendicolari all'equatore.



I valori di δ in gradi sono circa:

- Solstizio d'inverno (21 dicembre): $\delta = -23,5^\circ$
- Equinozio di primavera (21 marzo): $\delta = 0^\circ$
- Solstizio d'estate (21 giugno): $\delta = +23,5^\circ$
- Equinozio d'autunno (23 settembre): $\delta = 0^\circ$

Calcoliamo come varia l'intensità ad Alanno considerando solo l'aspetto dell'inclinazione dei raggi.

$$\text{Latitudine Roma } \lambda = 41^\circ 54' \quad \delta_{\text{INVERNO}} = -23,5^\circ \quad \delta_{\text{ESTATE}} = 23,5^\circ$$

$$I_{\text{INVERNO}} = I_s \cos \theta = I_s \cos(\lambda - \delta) = 1360 \cos(41^\circ 54' - (-23^\circ)) = 1360 \cos 65^\circ = 577 \text{ W / m}^2$$

$$I_{\text{ESTATE}} = I_s \cos \theta = I_s \cos(\lambda - \delta) = 1360 \cos(41^\circ 54' - 23^\circ) = 1360 \cos 65^\circ = 1287 \text{ W / m}^2$$

La variazione dovuta solo alla variazione dell'angolo di incidenza circa 700 W/m²

Quindi la principale variazione dell'irraggiamento solare è dovuta alla variazione dell'angolo di incidenza dei raggi solari sulla superficie terrestre nei vari periodi dell'anno.

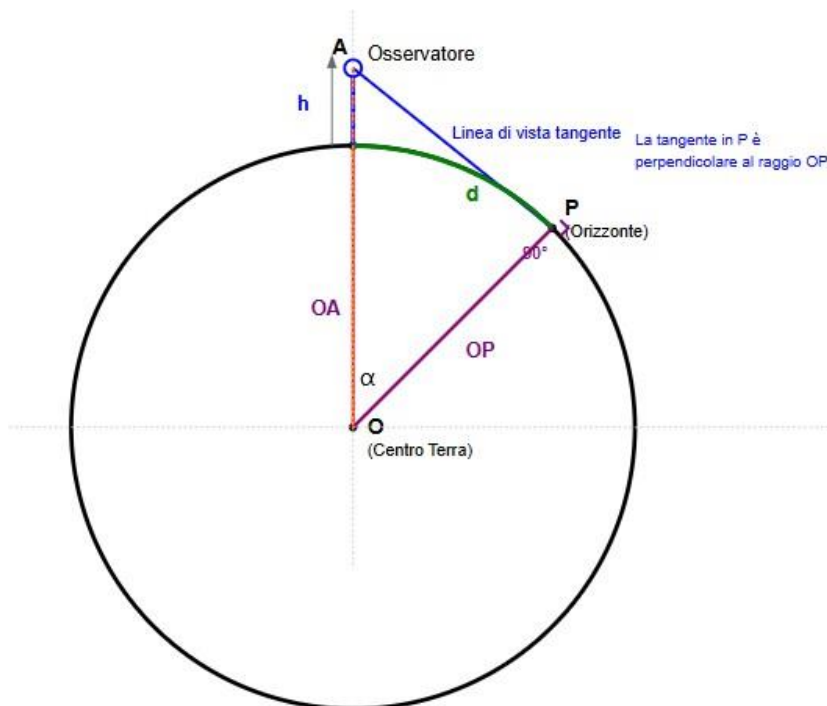
Concludendo facendo riferimento a Roma, fra estate e inverno, si ha una variazione negativa di 100 W/m² dovuta alla distanza, mentre si ha una variazione positiva di 700 W/m², dovuta all'inclinazione, quindi si ha un **saldo positivo di 600 W/m² a favore dell'estate.** Ecco perché in estate fa più caldo che in inverno.

Calcolo dell'abbassamento della linea di visuale

a cura di Giancarlo Buccella

La sensazione comune che la Terra sia piatta è una percezione ingannevole dovuta alle nostre dimensioni molto piccole rispetto al pianeta. In realtà, la sua forma sferica ha un effetto tangibile e calcolabile su ciò che possiamo vedere: l'orizzonte non è infinito, (l'orizzonte geometrico è la linea creata dai punti in cui la tua linea di vista è tangente alla superficie terrestre), ma una linea che si abbassa progressivamente a causa della curvatura terrestre. Questo fenomeno, noto fin dall'antichità, può essere compreso e quantificato attraverso semplici principi geometrici.

Per calcolare di quanto la curvatura terrestre abbassi la nostra visuale, possiamo immaginare la Terra come una sfera perfetta. Il nostro punto di osservazione, la linea dell'orizzonte e il centro della Terra formano un triangolo rettangolo. La distanza dall'osservatore all'orizzonte (la luce viaggia in linea retta) e il raggio terrestre sono i due cateti, mentre l'ipotenusa è data dal raggio terrestre sommato all'altezza dell'osservatore.



Applicando il teorema di Pitagora al triangolo OAP, possiamo derivare una formula per calcolare la distanza dell'orizzonte.

$$(OA)^2 = OP^2 + AP^2$$

Essendo: $OA = R + h$, $OP = R$, $AP = R \operatorname{tg} \alpha$, si ha

$$(R + h)^2 = R^2 + (R \operatorname{tg} \alpha)^2$$

Per piccoli angoli è lecito approssimare (vedi sotto) la tangente con l'angolo $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$

$$(R + h)^2 = R^2 + (R \alpha)^2$$

Indicando con d la lunghezza dell'arco $R \alpha$

$$d^2 = (R + h)^2 - R^2 = R^2 + 2hR + h^2 - R^2 \approx 2hR$$

$$d = \sqrt{2hR + h^2}$$

Questa è la formula esatta della distanza dell'orizzonte dall'osservatore alto h su superficie piana.

Quando $h \ll R$, ossia quando l'altezza è piccola rispetto al raggio terrestre (cioè quello che accade nei casi concreti) il termine h^2 diventa trascurabile. Ad esempio con $h = 100$ m ed $R = 6\,371\,000$ m
 $2hR = 1.2742 \cdot 10^9$

$$h^2 = 10^4$$

Il valore di h^2 è circa un milionesimo del termine $2hR$, quindi completamente trascurabile. Allora tenendo presente questa approssimazione la relazione diventa

$$d = \sqrt{2hR}$$

Questa formula approssimata è la più comunemente usata per il calcolo della distanza dell'orizzonte vista da un'altezza h , ossia la lunghezza della linea che va dall'osservatore al punto di tangenza.

Collegato a questo parametro c'è il concetto di "abbassamento della linea di visuale", che è altezza (o l'angolo) con cui la linea di tangenza si "abbassa" rispetto alla orizzontale geometrica.

- **Abbassamento della linea di visuale (h):** è l'altezza (o l'angolo) con cui la linea tangente alla Terra si "abbassa" rispetto all'orizzontale geometrica. In pratica: quanto alto dista la linea tangente al punto di osservazione, rispetto al suolo, nel punto in cui è posto l'osservatore (è il segmento h mostrato nella figura precedente).
- **Distanza dell'orizzonte (d):** è la distanza lungo la superficie terrestre (o "a vista" in linea retta) tra l'osservatore e il punto più lontano che può vedere prima che la curvatura della Terra gli nasconda tutto. Dipende dall'altezza dell'osservatore rispetto al suolo.

Ovviamente l'abbassamento della linea di visuale h si ricava immediatamente dalla relazione precedente.

$$h = \frac{d^2}{2R}$$

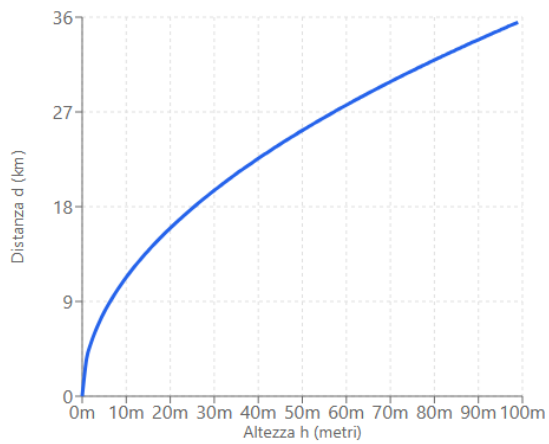
Ai fini dei calcoli possiamo usare più agevolmente le seguenti relazioni in cui il fattore 2R è esplicitato nel suo valore numerico.

$$\text{Distanza dell'orizzonte:} \quad d \text{ (km)} = 112.88 \sqrt{h \text{ (km)}}$$

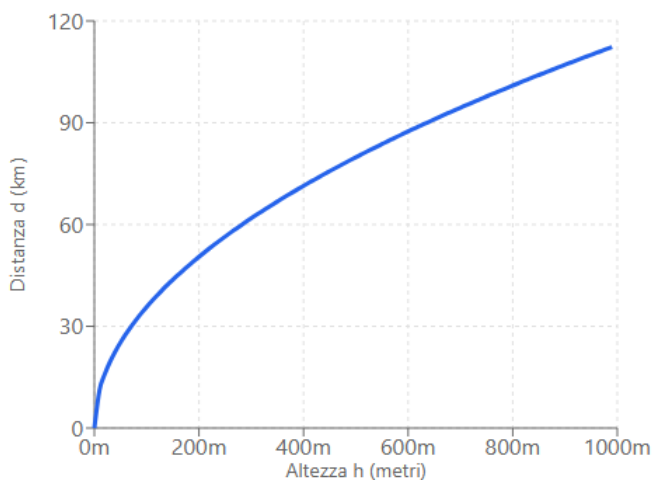
$$\text{Abbassamento della linea di visuale:} \quad h \text{ (km)} = \frac{d^2 \text{ (km)}}{12742}$$

Grafichiamo l'andamento della distanza dell'orizzonte, che per maggiore chiarezza abbiamo diviso in tre grafici.

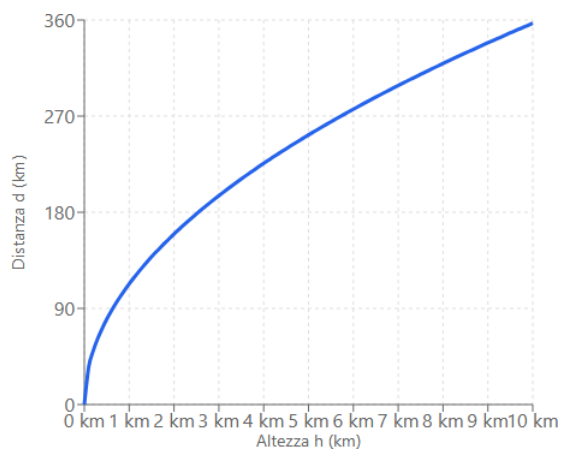
- h fino a 100 m



- h fino a 1 km



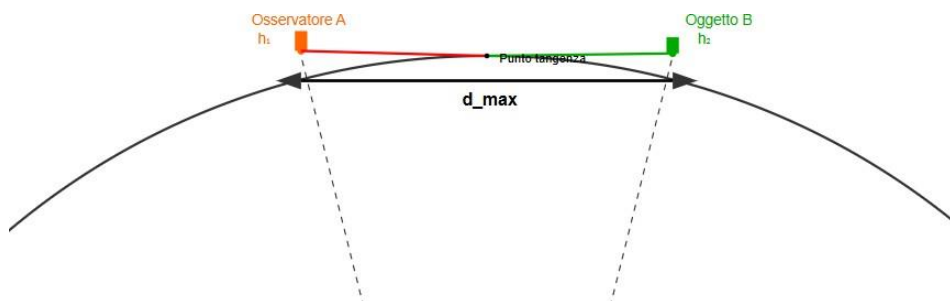
- h fino a 10 km



Ma attenzione, la distanza dell'orizzonte non è coincide con la distanza massima per vedere un oggetto, per quella serve considerare anche l'altezza dell'oggetto stesso. Infatti la distanza massima osservabile tra due oggetti è la somma dei due orizzonti,

$$d_{\max} = \sqrt{2Rh_1} + \sqrt{2Rh_2}$$

come si vede dall'immagine seguente.



Formula della distanza massima:

$$d_{\max} = \sqrt{2Rh_1} + \sqrt{2Rh_2}$$

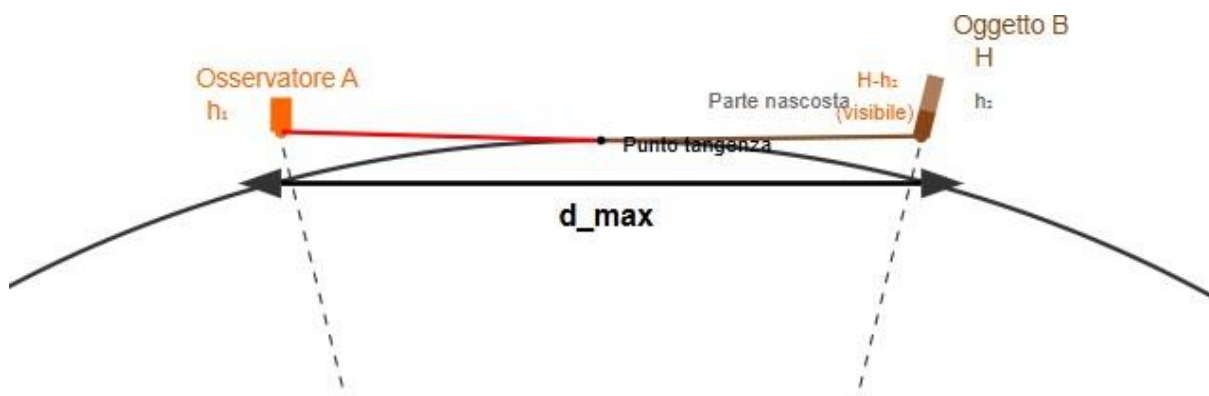
dove:

R = raggio terrestre (≈ 6.371 km)

Principio geometrico:

- La linea di vista è tangente alla Terra
- Ogni osservatore vede fino al suo orizzonte
- La distanza totale è la somma delle distanze ai rispettivi orizzonti
- Formula derivata dal teorema di Pitagora

Se ora supponiamo che l'oggetto B sia più alto $H > h_2$ esso sarà visibile dall'osservatore A solo per la parte eccedente, ossia per $(H - h_2)$



Esempi

(Valore medio del raggio terrestre: $R = 6371$ km)

1. Una persona in riva al mare:

Immaginiamo una persona alta:

- 1,10 metri, quindi avente gli occhi a circa 1.00 m dal suolo (0,0010 km), in piedi sulla spiaggia. La distanza del suo orizzonte sarà

$$d = \sqrt{2 \cdot 6371 \cdot 0.001} = 3.56 \text{ km}$$

- 1,80 metri, quindi avente gli occhi a circa 1.70 m dal suolo (0,0017 km), in piedi sulla spiaggia. La distanza del suo orizzonte sarà

$$d = \sqrt{2 \cdot 6371 \cdot 0.00170} = 4.65 \text{ km}$$

- 2.10 metri, quindi avente gli occhi a circa 2.00 m dal suolo (0,0020 km), in piedi sulla spiaggia. La distanza del suo orizzonte sarà

$$d = \sqrt{2 \cdot 6371 \cdot 0.0020} = 5.01 \text{ km}$$

2. Se si sale su una casa alta 10 o 100 m oppure su una collina alta 1000 m, la distanza dell'orizzonte vale rispettivamente 11, 35 e 110 km.

3. Un aereo di linea vola a una quota di crociera di circa 10.000 metri (10 km). A questa altitudine, la visuale è ancora più ampia:

$$d \approx [(2 \cdot 6371 \cdot 10)]^{1/2} \approx \sqrt{127420} \text{ km} \approx 357 \text{ km}$$

4. Due persone alte 1.80 m (occhi a 1.70 dal suolo) sono in piedi uno di fronte all'altra su una superficie piatta, a quale distanza massima riescono appena a vedersi?

$$d_{\max} = \sqrt{2Rh_1} + \sqrt{2Rh_2} = \sqrt{2 \cdot 6371 \cdot 0.00170} + \sqrt{2 \cdot 6371 \cdot 0.00170} = 4.65 + 4.65 = 9.3 \text{ km}$$

Ciò significa che se la seconda persona fosse alta 2.30 m posta a 9.3 km dalla prima, sarebbe visibile solo la sua parte superiore per 0.5 m.

5. Una persona in riva al mare sta guardando una barca a 10 km di distanza, chiediamoci ora quale sia l'abbassamento della visuale della barca.

Occorre calcolare h_2 dalla formula $d_{\max} = \sqrt{2Rh_1} + \sqrt{2Rh_2}$ (essendo: $d_{\max} = 10$ km, $h_1 = 1.70$ m)

$$d_{\max} = \sqrt{2Rh_1} + \sqrt{2Rh_2}$$

$$h_2 = \frac{(d_{\max} - \sqrt{2Rh_1})^2}{2R} = \frac{(10 - 4.65)^2}{12742} = 2.2 \text{ m}$$

Quindi i primi 2.2 m della barca non saranno visibili a causa della curvatura terrestre (ovviamente neanche usando un binocolo!).

6. Se osserviamo un punto a 20 km di distanza, l'abbassamento sarà:

Usando la relazione precedente e facendo i calcoli si ha: $h_2 = 18.2$ m.

Se ci si sdraia a terra nel limite matematico di $h = 0$ si ha $d = 0$. Questo significa che teoricamente, se gli occhi fossero esattamente a livello della superficie terrestre ($h = 0$), non si potrebbe vedere alcun orizzonte, infatti la linea di tangenza in questo caso incontra la superficie esattamente nel punto in cui è l'osservatore, cioè la distanza fra l'osservatore e l'orizzonte è zero.

Possiamo ora chiederci: uno spostamento angolare di un grado di latitudine a quale lunghezza di arco terrestre corrisponda. Basta considerare che sussiste la seguente relazione

$$\alpha^\circ : 360^\circ = d : 2\pi R \quad \text{cioè} \quad \alpha^\circ = 57.3^\circ d/R$$

Se α vale 1° allora $d = R/57,3^\circ$ ossia $6371/57.4 =$ circa 110 km,

cioè allo spostamento di ogni grado di latitudine corrisponde sulla circonferenza uno spostamento di circa 110 km., a tale distanza, come visto nell'esempio 2, corrisponde un abbassamento della visuale di circa 1 km.

Quindi ogni 110 km che si percorre sulla superficie terrestre "la visuale" si abbassa di circa 1 km

N.B. È importante notare che questi calcoli si basano su un modello idealizzato della Terra come una sfera perfetta e non tengono conto di alcuni fattori:

la forma non perfettamente sferica della Terra: il nostro pianeta è in realtà un ellissoide di rotazione, leggermente schiacciato ai poli. Il raggio equatoriale è di circa 6.378 km e quello polare di circa 6.357 km. Questa differenza, sebbene minima, può influenzare calcoli di precisione.

la rifrazione atmosferica: la luce non viaggia in linea retta attraverso l'atmosfera, ma viene leggermente curvata. Questo fenomeno, chiamato rifrazione atmosferica, tende a "sollevare" gli oggetti all'orizzonte, facendoli apparire più alti di quanto non siano in realtà. Di conseguenza, l'orizzonte visibile è leggermente più lontano di quello geometrico.

Le maree

a cura di Giancarlo Buccella

Premessa

Le maree sono uno dei fenomeni più affascinanti del nostro pianeta e rappresentano un perfetto esempio di come forze gravitazionali distanti possano influenzare direttamente la nostra vita quotidiana. L'effetto mareale è quel fenomeno per cui un corpo celeste, come la Terra, viene "deformato" dall'attrazione gravitazionale di un altro corpo, come la Luna o il Sole. Questo non significa che il pianeta si pieghi visibilmente, ma che la sua massa, in particolare quella fluida come gli oceani, tende a "stirarsi" lungo la direzione del corpo che la attrae ed in versi opposti. Mentre la Terra ruota sul proprio asse, ogni punto della sua superficie passa attraverso questi due rigonfiamenti ogni 24 ore circa, spiegando perché si verificano due alte e due basse maree al giorno.

La causa principale: l'attrazione gravitazionale

Il fenomeno delle maree è causato principalmente dall'attrazione gravitazionale che la Luna esercita sulla Terra. Secondo la legge di gravitazione universale di Newton, ogni corpo celeste attrae ogni altro corpo con una forza direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza che li separa.

La Terra non è un corpo rigido: gli oceani, essendo fluidi, possono deformarsi sotto l'azione di forze esterne. Quando la Luna si trova sopra un oceano, l'acqua viene letteralmente "tirata" verso l'alto, creando un rigonfiamento. Questo genera l'alta marea.

Il meccanismo delle due maree giornaliere

Potreste chiedervi perché abbiamo due alte maree al giorno invece di una sola. La spiegazione è più sottile di quanto sembri. Mentre il lato della Terra rivolto verso la Luna subisce un'attrazione gravitazionale più forte (essendo più vicino), il lato opposto ne subisce una più debole. Questo crea una differenza di forze che causa un secondo rigonfiamento sul lato opposto della Terra.

Inoltre, dobbiamo considerare che il sistema Terra-Luna ruota attorno al loro centro di massa comune (baricentro), che si trova all'interno della Terra ma non al suo centro. Questo movimento rotazionale genera una forza centrifuga che contribuisce al rigonfiamento oceanico sul lato opposto alla Luna.

Il contributo del Sole

Anche il Sole influenza le maree, nonostante sia molto più lontano della Luna. Quando Sole e Luna sono allineati (durante la luna nuova o piena), i loro effetti si sommano creando le "maree sigiziali" - particolarmente intense. Quando invece formano un angolo retto rispetto alla Terra (durante i quarti di luna), i loro effetti si sottraggono parzialmente, generando le "maree di quadratura" - meno pronunciate.

La forza di marea generata dal Sole è pari a circa il 46% della forza di marea generata dalla Luna. In altre parole, l'influenza della Luna è circa 2,2 volte maggiore di quella del Sole

Variazioni locali

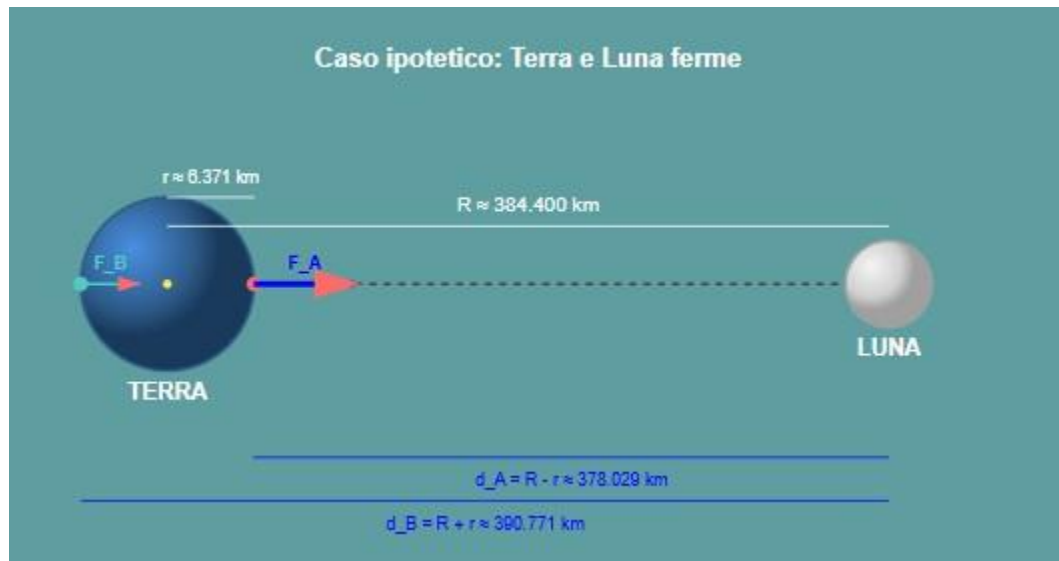
L'intensità delle maree varia enormemente da luogo a luogo. In mari chiusi come il Mediterraneo, le maree sono appena percettibili (pochi centimetri), mentre in alcune baie come quella di Fundy in Canada possono superare i 15 metri di escursione. Questo dipende dalla forma delle coste, dalla profondità dei fondali e dalla risonanza dei bacini oceanici.

Conseguenze ed applicazioni

Le maree hanno profonde implicazioni biologiche ed economiche. Molti ecosistemi costieri si sono evoluti in sincronia con i cicli mareali, e oggi sfruttiamo questo fenomeno per produrre energia pulita attraverso le centrali mareomotrici.

Il fenomeno delle maree rappresenta quindi un esempio straordinario di come la meccanica celeste si manifesti concretamente sulla Terra, dimostrando l'interconnessione tra i diversi corpi del sistema solare e la capacità della fisica di spiegare fenomeni apparentemente complessi attraverso principi fondamentali eleganti.

Partiamo con illustrare il caso ipotetico in cui Terra e Luna siano fermi nelle loro posizioni, in un SR inerziale. Nel seguente disegno viene schematizzata la situazione, non è stata disegnata la forza di gravità dovuta alla Terra per maggiore chiarezza.



$$G = 6.67430 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$M_L = 7.35 \times 10^{22} \text{ kg}$$

$$M_T = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$$

$$r = 384,000 \text{ km} = 3.84 \times 10^8 \text{ m}$$

$$R = 6,378 \text{ km} = 6.378 \times 10^6 \text{ m}$$

$$a_{A-Luna} = G \frac{M_L}{(r-R)^2} = 3.43 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$$

$$a_{B-Luna} = G \frac{M_L}{(r+R)^2} = 3.21 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$$

$$a_{Terra} = G \frac{M_T}{R^2} = 9.82026 \text{ m/s}^2$$

$$a_{A,tot} = a_{A-Luna} - a_{Terra} = -9.82023 \text{ m/s}^2$$

$$a_{B,tot} = a_{B-Luna} + a_{Terra} = 9.82029 \text{ m/s}^2$$

$$\Delta a = 6.0 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$$

Punto A (lato più vicino alla Luna):

- La gravità terrestre “tira” la superficie verso il centro della Terra.
- La gravità lunare “tira” la superficie in direzione opposta.
- La forza netta ha un valore leggermente inferiore al valore dato dalla presenza sola Terra, la superficie (se deformabile, come l'acqua) può "dilatarsi" formando l'alta marea. Si ha quindi un lieve rigonfiamento della superficie.

Punto B (lato più lontano dalla Luna):

- La gravità terrestre “tira” la superficie verso il centro della Terra.
- Anche la gravità lunare, in questa posizione, agisce nella stessa direzione, sebbene con una intensità minore rispetto al caso precedente poiché il punto B è più lontano dalla Luna rispetto al punto A.
- La forza netta ha ora un valore leggermente superiore al valore dato dalla presenza della sola Terra, il risultato è che la superficie liquida della terra essendo deformabile subirebbe un abbassamento formando la bassa marea. Si ha quindi un lieve abbassamento della superficie.

La seguente figura mostra in modo esagerato il rigonfiamento a destra e l'infossamento a sinistra: alta marea a destra e bassa marea a sinistra.



Abbiamo quindi appurato che se la Terra e Luna li considerassimo immobili nello spazio (fissi e non in orbita):

non esisterebbe un'accelerazione comune del sistema verso la Luna (non c'è caduta libera).

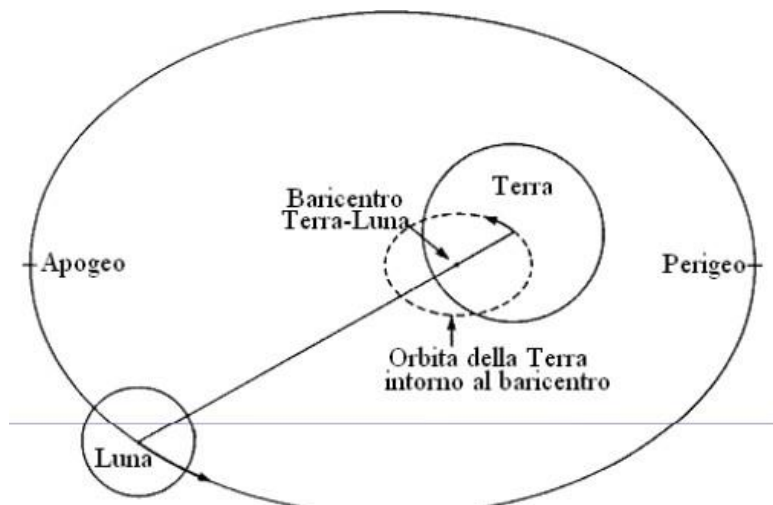
la deformazione sarebbe data solo data dalla somma statica delle forze gravitazionali.

Non si creerebbe il rigonfiamento nel lato della Terra opposto alla Luna, cioè la doppia gobba tipica delle maree, in quanto mancherebbe l'effetto dinamico dovuto alla rotazione del sistema.

Effetto mareale

L'effetto mareale vero e proprio è legato a come la Terra e la Luna si muovono insieme attorno al loro baricentro comune. In pratica:

- Il sistema Terra-Luna è in caduta libera attorno al baricentro.
- Tutto il pianeta subisce un'accelerazione comune verso la Luna.
- Quello che conta per le maree è la differenza fra l'accelerazione locale della Luna su un punto e l'accelerazione del centro della Terra, cioè l'accelerazione relativa.



Contrariamente all'intuizione comune, la Luna non orbita semplicemente attorno al centro della Terra. In realtà, entrambi i corpi celesti orbitano attorno a un punto comune chiamato baricentro, che è il centro di massa del sistema Terra-Luna. Poiché la Terra è molto più massiccia della Luna, questo baricentro si trova all'interno della Terra stessa. Il periodo di questo moto orbitale è ovviamente il mese siderale.

Di conseguenza, anche la Terra compie una piccola orbita mensile attorno a questo punto. Il moto che ne risulta genera un'accelerazione centripeta, che andiamo ora ad analizzare e calcolare.

Descrizione Analitica

L'accelerazione centripeta, a_c , è l'accelerazione che un corpo subisce quando si muove lungo una traiettoria curva, ed è sempre diretta verso il centro di curvatura dell'orbita. La sua formula è:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

Dove:

- v è la velocità orbitale del corpo (in questo caso, della Terra attorno al baricentro).
- r è il raggio dell'orbita (la distanza del centro della Terra dal baricentro).
- ω è la velocità angolare, data da $\omega = \frac{2\pi}{T}$, dove T è il periodo orbitale.

Per calcolare l'accelerazione centripeta della Terra, dobbiamo prima determinare la posizione del baricentro e, di conseguenza, il raggio della piccola orbita terrestre.

Calcolo della posizione del baricentro (r_{Terra})

La posizione del baricentro si calcola con la formula del centro di massa per un sistema a due corpi:

$$M_{\text{Terra}} \cdot r_{\text{Terra}} = M_{\text{Luna}} \cdot r_{\text{Luna}}$$

Dove r_{Terra} e r_{Luna} sono le distanze dei centri di Terra e Luna dal baricentro, e M sono le rispettive masse.

Sapendo che la distanza totale tra i centri dei due corpi, d , è $d = r_{\text{Terra}} + r_{\text{Luna}}$, possiamo esprimere r_{Luna} come $d - r_{\text{Terra}}$ e risolvere per r_{Terra} :

$$M_{\text{Terra}} \cdot r_{\text{Terra}} = M_{\text{Luna}} \cdot (d - r_{\text{Terra}}) \quad r_{\text{Terra}} \cdot (M_{\text{Terra}} + M_{\text{Luna}}) = M_{\text{Luna}} \cdot d$$
$$r_{\text{Terra}} = \frac{M_{\text{Luna}} \cdot d}{M_{\text{Terra}} + M_{\text{Luna}}}$$

Questa formula ci fornisce il raggio dell'orbita della Terra attorno al baricentro.

La velocità angolare è determinata dal periodo di rivoluzione del sistema, che è il mese siderale, T .

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Sostituendo le espressioni di r_{Terra} e ω nella formula dell'accelerazione centripeta, otteniamo l'espressione analitica completa:

$$a_{c,\text{Terra}} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \left(\frac{M_{\text{Luna}} \cdot d}{M_{\text{Terra}} + M_{\text{Luna}}}\right)$$

Utilizziamo ora i valori standard per le costanti fisiche:

Massa della Terra (M_{Terra}): 5.9722×10^{24} kg

Massa della Luna (M_{Luna}): 7.342×10^{22} kg

Distanza media Terra-Luna (d): 384,400 km = 3.844×10^8 m

Periodo orbitale (mese siderale, T): 27.32 giorni $\approx 2.36 \times 10^6$ s

$$r_{\text{Terra}} = \frac{(7.342 \times 10^{22} \text{ kg}) \cdot (3.844 \times 10^8 \text{ m})}{(5.9722 \times 10^{24} \text{ kg}) + (7.342 \times 10^{22} \text{ kg})} \approx 4.67 \times 10^6 \text{ m}$$

Questo risultato, 4670 km, conferma che il baricentro si trova ben all'interno del raggio terrestre (che è di circa 6371 km).

$$\omega = \frac{2\pi}{2.36 \times 10^6 \text{ s}} \approx 2.662 \times 10^{-6} \text{ rad/s}$$

$$a_{c,\text{Terra}} = \omega^2 \cdot r_{\text{Terra}} \quad a_{c,\text{Terra}} = (2.662 \times 10^{-6} \text{ rad/s})^2 \cdot (4.67 \times 10^6 \text{ m})$$

$$a_{c,\text{Terra}} \approx 3.31 \times 10^{-5} \text{ m/s}^2$$

In senso generale questo valore, sebbene piccolo, è fondamentale. È questa accelerazione che, insieme all'attrazione gravitazionale del Sole, determina la complessa traiettoria della Terra nello spazio, che non è una semplice ellisse ma un'ellisse con una piccola "oscillazione" mensile.

Tornando al nostro caso, l'aspetto fondamentale da comprendere è che noi, trovandoci sulla Terra, sperimentiamo accelerazioni *relative* al centro della Terra, che è a sua volta un sistema di riferimento non inerziale (perché accelera). La "marea" non è data dalla gravità lunare in sé, ma dalla *differenza* tra l'attrazione lunare su di noi e l'attrazione lunare sul centro della Terra.

Analisi delle accelerazioni

Consideriamo una massa di prova m sulla superficie terrestre. In un sistema di riferimento inerziale (ad esempio, fisso rispetto al Sole), le accelerazioni agenti sulla massa m sono:

1. Accelerazione gravitazionale terrestre ($a_{g,T}$): L'attrazione esercitata dalla massa della Terra.
2. Accelerazione gravitazionale lunare ($a_{g,L}$): L'attrazione esercitata dalla massa della Luna.

Tuttavia, il centro della Terra stesso è accelerato dalla gravità lunare. Questa è esattamente l'accelerazione centripeta a_c che abbiamo calcolato prima, la quale mantiene la Terra nella sua orbita attorno al baricentro.

$$a_c = \frac{GM_{\text{Luna}}}{d^2}$$

L'accelerazione netta che una massa m sperimenta *rispetto al centro della Terra* (e che quindi causa la deformazione del pianeta) è la somma vettoriale di tutte le accelerazioni agenti su m meno l'accelerazione del sistema di riferimento stesso (il centro della Terra).

$$a_{\text{netta},m} = (a_{g,T} + a_{g,L}) - a_c \quad (*)$$

Raggruppando i termini, otteniamo:

$$a_{\text{netta},m} = a_{g,T} + (a_{g,L} - a_c)$$

Il termine $a_{g,T}$ è semplicemente l'accelerazione di gravità standard che ci tiene ancorati al suolo. Il termine interessante è $(a_{g,L} - a_c)$, che rappresenta l'accelerazione di marea (a_{marea}). È la differenza tra l'attrazione lunare nel punto in cui si trova la massa m e l'attrazione lunare sul centro della Terra.

Analizziamo ora i due casi specifici lungo la congiungente Terra-Luna.

Caso 1: Punto Sublunare (P_{sub})

La massa m si trova nel punto della superficie terrestre più vicino alla Luna.

Distanza di m dalla Luna: $d - R_{\text{Terra}}$

Direzione: Assumiamo un asse che va dalla Terra alla Luna come positivo.

– Accelerazione gravitazionale Terrestre ($a_{g,T}$):

$$a_{g,T} = -\frac{GM_{\text{Terra}}}{R_{\text{Terra}}^2} \quad \text{diretta verso il centro della Terra (direzione negativa).}$$

– Accelerazione gravitazionale Lunare su m ($a_{g,L}$):

$$a_{g,L}(P_{\text{sub}}) = +\frac{GM_{\text{Luna}}}{(d - R_{\text{Terra}})^2} \quad \text{diretta verso la Luna (direzione positiva).}$$

– Accelerazione del centro della Terra (a_c):

$$a_c = +\frac{GM_{\text{Luna}}}{d^2} \quad \text{anch'essa è diretta verso la Luna (direzione positiva).}$$

Calcolo dell'accelerazione di marea a P_{sub} : l'accelerazione di marea è la differenza tra l'attrazione lunare su m e quella sul centro della Terra.

$$a_{\text{marea}}(P_{\text{sub}}) = a_{g,L}(P_{\text{sub}}) - a_c = \frac{GM_{\text{Luna}}}{(d - R_{\text{Terra}})^2} - \frac{GM_{\text{Luna}}}{d^2}$$

Poiché $(d - R_{\text{Terra}}) < d$, il primo termine è più grande del secondo. Il risultato è positivo. Questo significa che nel punto sublunare, la massa m (e l'acqua dell'oceano) è tirata verso la Luna *più fortemente* del centro della Terra. Relativamente alla Terra, questo si manifesta come un'accelerazione verso l'esterno, che solleva l'acqua e crea l'alta marea.

Il valore numerico di tale accelerazione è $a_{\text{marea}}(P_{\text{sub}}) = 1.1 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}^2$

Caso 2: Punto Antipodale (P_{ant})

La massa m si trova nel punto della superficie terrestre più lontano dalla Luna.

Distanza di m dalla Luna: $d + R_{Terra}$

Direzione: Usiamo lo stesso asse di prima.

– Accelerazione Gravitazionale Terrestre ($a_{g,T}$):

$a_{g,T} = + \frac{GM_{Terra}}{R_{Terra}^2}$ diretta verso il centro della Terra (in questo caso, lungo la direzione positiva dell'asse se l'origine è in P_{ant}). Per coerenza, diciamo che è sempre $-g$ se misurata radialmente verso l'esterno.

– Accelerazione Gravitazionale Lunare su m ($a_{g,L}$):

$a_{g,L}(P_{ant}) = + \frac{GM_{Luna}}{(d+R_{Terra})^2}$ diretta verso la Luna (direzione positiva).

– Accelerazione del Centro della Terra (a_c):

$a_c = + \frac{GM_{Luna}}{d^2}$ sempre diretta verso la Luna (direzione positiva).

Calcolo dell'Accelerazione di Marea a P_{ant} :

$$a_{marea}(P_{ant}) = a_{g,L}(P_{ant}) - a_c = \frac{GM_{Luna}}{(d + R_{Terra})^2} - \frac{GM_{Luna}}{d^2}$$

Ora, poiché $(d + R_{Terra}) > d$, il primo termine è più piccolo del secondo. Il risultato è negativo. Questo significa che l'accelerazione di marea è diretta in verso opposto alla Luna.

Il valore numerico di tale accelerazioni è

$$a_{marea}(P_{sub}) = a_{marea}(P_{ant}) = 1.1 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}^2$$

Essendo g circa 10 m/s^2 tali accelerazioni sono circa un decimilionesimo di g .

L'interpretazione fisica è che il centro della Terra è attratto verso la Luna *più fortemente* della massa m al punto antipodale. È come se la Terra venisse "tirata via da sotto" la massa m , lasciandola indietro. Relativamente alla Terra, questo si manifesta di nuovo come un'accelerazione verso l'esterno, creando la seconda alta marea.

Conclusione

L'accelerazione totale a cui è soggetta la massa m sulla superficie terrestre, e che ne determina il "peso" effettivo, è la somma della gravità terrestre e dell'accelerazione di marea:

$$a_{\text{totale},m} = a_{g,T} + a_{\text{marea}}$$

Al punto sublunare, l'accelerazione di marea è diretta verso l'esterno, opponendosi leggermente alla gravità terrestre e causando un rigonfiamento.

Al punto antipodale, l'accelerazione di marea è anch'essa diretta verso l'esterno, opponendosi ugualmente alla gravità e causando il secondo rigonfiamento.

(*) Questa espressione viene dal considerare che in un SR non inerziale vale la seguente relazione

$$\mathbf{a}_{\text{ass}} = \mathbf{a}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{tr}} + \mathbf{a}_{\text{cor}}$$

Accelerazione assoluta ($\mathbf{a}_{\text{assoluta}}$): È l'accelerazione di un punto (la nostra massa m) misurata in un sistema di riferimento fisso o inerziale (S). Nel nostro caso, è la somma di tutte le forze gravitazionali "vere" che agiscono su m , divisa per m . $\mathbf{a}_{\text{assoluta}} = \mathbf{a}_{g,T} + \mathbf{a}_{g,L}$

Accelerazione relativa ($\mathbf{a}_{\text{relativa}}$): è l'accelerazione dello stesso punto misurata in un sistema di riferimento mobile o non inerziale (S'). Nel nostro caso, il sistema di riferimento è solidale con il centro della Terra. Questa è l'accelerazione che un osservatore sulla Terra "vede" o "sente". È esattamente l'accelerazione netta che stavamo cercando, quella che causa la deformazione mareale.

Accelerazione di trascinamento ($\mathbf{a}_{\text{trascinamento}}$): È l'accelerazione che avrebbe un punto fisso nel sistema mobile S' , vista dal sistema fisso S . In parole povere, è l'accelerazione del sistema di riferimento mobile stesso. Nel nostro caso, è l'accelerazione del centro della Terra (a_c) dovuta alla sua orbita attorno al baricentro Terra-Luna. $\mathbf{a}_{\text{trascinamento}} = \mathbf{a}_c$

Accelerazione di Coriolis ($\mathbf{a}_{\text{Coriolis}}$): Questo è un termine aggiuntivo che compare solo se il sistema di riferimento mobile sta ruotando. Poiché la Terra ruota sul proprio asse, questo termine esiste ed è fondamentale per spiegare la rotazione dei cicloni e le correnti oceaniche. La sua formula è $\mathbf{a}_c = 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{relativa}})$, dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del sistema mobile (la rotazione terrestre) e $\vec{v}_{\text{relativa}}$ è la velocità della massa m rispetto alla Terra. Per l'analisi statica dei rigonfiamenti mareali, questo termine può essere inizialmente trascurato per semplicità, come qui è stato fatto, ma è essenziale in una trattazione dinamica completa delle maree.

Collegamento con la spiegazione precedente.

Ora riorganizziamo la formula per trovare ciò che ci interessa, ovvero l'accelerazione relativa (l'effetto che sentiamo sulla Terra):

$$\vec{a}_{\text{relativa}} = \vec{a}_{\text{assoluta}} - \vec{a}_{\text{trascinamento}} - \vec{a}_{\text{Coriolis}}$$

Sostituendo i termini che abbiamo identificato per il problema delle maree si ha

$$\vec{a}_{\text{relativa}} = (\vec{a}_{g,T} + \vec{a}_{g,L}) - \vec{a}_c - \vec{a}_{\text{Coriolis}}$$

Se trascuriamo l'effetto di Coriolis, come è lecito fare in una trattazione non avanzata, otteniamo:

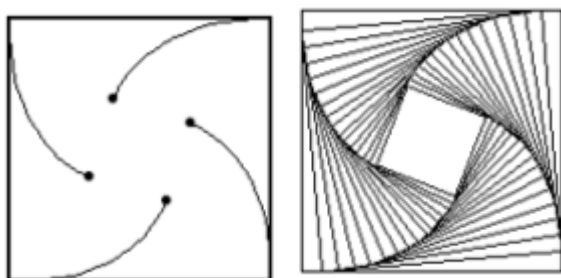
$$\vec{a}_{\text{relativa}} = (\vec{a}_{g,T} + \vec{a}_{g,L}) - \vec{a}_c$$

Problema delle formiche che si inseguono

a cura di Giancarlo Buccella

Quattro operose formiche partono dai quattro angoli di un quadrato di 6 metri di lato. Ogni formica si dirige verso quella alla sua destra muovendosi verso il centro a velocità costante di $v = 1 \text{ cm/s}$.

Quanti minuti impiegheranno le formiche per incontrarsi al centro?



Proviamo a risolvere il problema in modo intuitivo ed elementare.

- Forma: **quadrato** $\Rightarrow N = 4$
- Lunghezza del lato: $L = 6 \text{ m} = 600 \text{ cm}$
- Velocità: $v = 1 \text{ cm/s}$

Simmetria del problema: Il problema ha una simmetria rotazionale di 90 gradi. Le condizioni iniziali e le regole di movimento sono identiche per ogni formica rispetto alla sua "preda".

Punto di convergenza: A causa di questa simmetria, le formiche si muoveranno in modo tale da mantenere sempre la configurazione di un quadrato (che si rimpicciolisce e ruota). Alla fine, si incontreranno tutte contemporaneamente in un unico punto.

Il centro è il punto di incontro: L'unico punto che preserva la simmetria durante tutto il movimento e dove possono incontrarsi simultaneamente è il centro geometrico del quadrato iniziale.

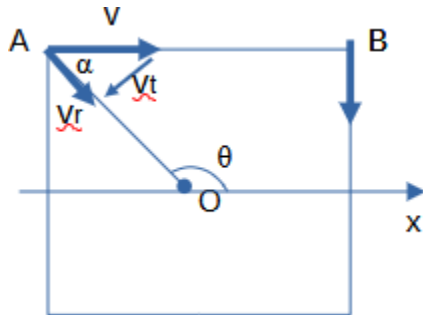
Polo della spirale: La traiettoria di ogni formica è una spirale logaritmica. Una spirale logaritmica $r = a e^{k\theta}$ si avvolge (o si svolge) attorno a un punto fisso chiamato polo, che corrisponde a $r = 0$. Nel caso delle formiche, il punto verso cui spiraleggiano e dove alla fine si incontrano è proprio questo polo.

Soluzione semplice

In ogni istante le quattro formiche stanno sui vertici di un quadrato che si rimpicciolisce e ruota man mano che le formiche si avvicinano fra di loro. Il percorso di ogni inseguitrice A è sempre perpendicolare al percorso dell'inseguita B. Questo significa che nel vettore moto di B non vi è alcuna componente che la fa avvicinare o allontanare da A. Di conseguenza A cattura B nello stesso tempo in cui l'avrebbe catturata se B fosse stata ferma. Perciò A percorre una distanza uguale al lato del quadrato per raggiungere B. Il tempo impiegato è:

$$t = \frac{L}{v} = \frac{600 \text{ cm}}{1 \text{ cm/s}} = 600 \text{ s} = 10 \text{ min}$$

Oppure



La distanza iniziale da coprire affinché la formica in A raggiunga il centro è $r_0 = AO$ che è la metà della diagonale del quadrato che come noto vale $d = \sqrt{2} L$, quindi

$$r_0 = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{2}L}{2}$$

La componente radiale della velocità è

$$v_r = v \cos \alpha = 1 \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cm/s}$$

Il tempo occorrente per arrivare al centro lo ricaviamo direttamente dalla $s = vt$ (moto rettilineo uniforme):

$$t = \frac{r_0}{v_r} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} L}{\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cm/s}} = \frac{\sqrt{2}}{2} 600(\text{cm}) \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\text{cm/s})} = 600 \text{ s} = 10 \text{ min}$$

Vediamo che tipo di curva seguono le formiche. A tal uopo conviene usare le coordinate polari (r, θ) , dove:

$r(t)$ distanza dal centro al tempo t , (rispetto ad un punto fisso detto polo)

$\theta(t)$ angolo formato da $r(t)$ rispetto ad un asse fisso, ad esempio l'asse x (orizzontale) al tempo t

Scomponiamo il vettore velocità, in coordinate polari, nelle due componenti tangenziale e radiale (vedi figura):

$$\text{componente radiale } v_r = \frac{dr}{dt} = -v \cos \alpha$$

$$\text{componente tangenziale } v_t = r \frac{d\theta}{dt} = v \sin \alpha$$

dove il segno meno considera il moto verso il centro (r diminuisce quando t aumenta), ed α è l'angolo costante tra la direzione del moto e la direzione radiale (verso il centro). Nel seguente disegno si capisce la differenza fra i due angoli α e θ .

Data la simmetria del quadrato la direzione del moto (ossia della velocità) di A forma sempre un angolo costante perché il bersaglio (la formica inseguita) si muove in modo simmetrico. Quindi $\alpha = \text{cost.}$ Questa condizione rimane vera anche se si considera un generico poligono di N lati.

$$\frac{dr}{dt} = -v \cos \alpha$$

$$r \frac{d\theta}{dt} = v \sin \alpha$$

L'equazione della curva è data dalla relazione di dipendenza di r con θ , ossia $r(\theta)$, quindi calcoliamo la derivata di $dr/d\theta$, usando la regola della "catena di derivazione"

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{dr/dt}{d\theta/dt} = \frac{-v \cos \alpha}{v \sin \alpha / r} = - \frac{r}{\tan \alpha}$$

Integrando

$$\int \frac{dr}{r} = - \int \frac{d\theta}{\tan \alpha}$$

$$\log r = - \frac{1}{\tan \alpha} \theta + c$$

$$r(\theta) = e^{-(\theta/\tan \alpha) + c} = e^c e^{-\theta/\tan \alpha}$$

Per $\theta = 0$ si calcola e^c

$$r(0) \equiv r_0 = e^c e^{-0} = e^c$$

Quindi l'equazione di spirale logaritmica è (ponendo $a = e^c$ e $b = 1/\tan \alpha$):

$$r(\theta) = a e^{-b\theta}$$

Per $\theta = 0$ si calcola e^c

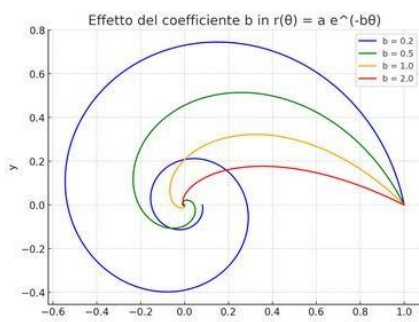
$$r(0) \equiv r_0 = e^c e^{-0} = e^c$$

E d'altronde nel nostro caso $\alpha = 45^\circ$ quindi $\tan \alpha = 1$, quindi

$$r(\theta) = r_0 e^{-\theta}$$

Questa è l'equazione della spirale logaritmica seguita dalle quattro formiche.

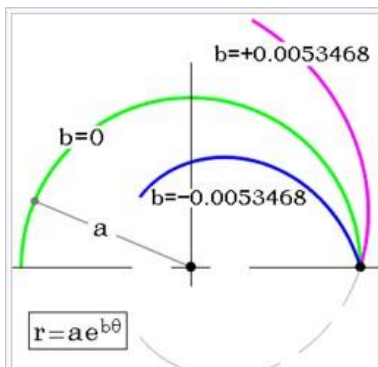
Significato del coefficiente b.



Più grande è b , più rapidamente la spirale si avvolge verso l'origine.

Più piccolo è b , più la spirale è "lenta" e si estende più a lungo prima di stringersi.

In sintesi, b controlla la velocità di decadimento radiale: un valore alto fa restringere la curva più in fretta.



Confronto di tre tratti di spirali logaritmiche che si sviluppano partendo dallo stesso punto di distanza (a) dall'origine. Valore di $b=0$ per quello di colore verde, gli altri due hanno lo stesso valore assoluto di (b) con la differenza che per quello magenta è positivo (la curva si allontana indefinitamente) mentre per quello blu è negativo (la curva si avvolge verso il polo).

Con il ridursi del valore del raggio vettore l'angolo percorso aumenta vieppiù, ed alla fine ponendo $r = 0$, ossia quando la formica raggiunge il centro, vediamo dalla formula $r = r_0 e^{-\theta}$ che si avrebbe $0 = r_0 e^{-\theta}$ e questo implicherebbe $\theta = \text{infinito}$! Quindi dal punto di vista matematico la formica arriva al centro in 10 minuti compiendo infiniti giri intorno al centro del quadrato.

Considerazioni sul significato "infiniti" giri.

Innanzitutto notiamo che mentre la velocità con cui la formica si avvicina al centro (dr/dt) è costante: $dr/dt = -v/\sqrt{2}$, /questo è il motivo per cui impiega un tempo finito per coprire la distanza radiale iniziale fino a zero), la velocità angolare aumenta in modo esponenziale, la velocità angolare $d\theta/dt$ infatti è inversamente proporzionale a r . Man mano che r (la distanza dal centro) si avvicina a zero, $1/r$ tende a infinito. Di conseguenza, $d\theta/dt$ tende a infinito.

Man mano che una formica si avvicina al centro:

I "giri" che compie diventano sempre più piccoli (la circonferenza di ogni giro tende a zero).

Il tempo impiegato per completare ciascuno di questi giri sempre più piccoli diventa anch'esso sempre più breve, tendendo a zero.

La velocità angolare (quanti gradi o radianti copre al secondo) diventa enormemente alta.

[Immagina una moneta che rotola in un imbuto a spirale di quelli che si trovano a volte per raccogliere fondi. La moneta raggiunge il buco centrale in un tempo finito. Ma, poco prima di cadere nel buco, la moneta compie moltissimi giri, sempre più velocemente, attorno al centro. Se l'imbuto fosse "perfetto" e seguisse una spirale logaritmica, il numero di giri sarebbe teoricamente infinito.]

Quando diciamo che la formica compie "infiniti giri", ci stiamo riferendo a ciò che il modello matematico idealizzato prevede.

Ecco come interpretare questa comparsa di questo infinito. In fisica non esistono infiniti.

Il Modello Matematico è un'astrazione:

L'equazione $r(\theta) = a e^{(-\theta)}$ descrive una curva perfetta. In questa astrazione matematica, r diventa esattamente zero solo quando θ diventa esattamente infinito.

Nel modello, trattiamo le formiche come punti adimensionali che possono avvicinarsi indefinitamente.

La Realtà Fisica ha dei Limiti:

Dimensioni Finite: Le formiche non sono punti. Hanno una dimensione fisica. Si incontreranno (o, più realisticamente, si scontreranno o si fermeranno l'una sull'altra) quando la distanza r tra loro e il centro diventa comparabile con la loro stessa dimensione. A quel punto, il concetto di "inseguire un punto" cessa di avere senso nel modo idealizzato.

Natura discreta della materia: a scale estremamente piccole, la natura continua dello spazio e del moto descritta dalla meccanica classica potrebbe non essere più un'approssimazione valida (anche se questo è ben oltre la scala del problema delle formiche).

Cosa Significa l'"Infinito" del Modello per la Fisica del Problema:

Tendenza al Limite: Il modello ci dice che, se le formiche fossero punti ideali e potessero continuare il loro moto indefinitamente secondo le regole date, allora compierebbero un numero illimitato di giri.

Comportamento Qualitativo: L'aspetto "infiniti giri" del modello matematico si traduce, nel mondo fisico, in un numero molto grande e rapidamente crescente di giri man mano che si avvicinano al punto d'incontro. L'ultima frazione di millimetro prima dell'incontro vedrebbe un numero enorme di rapidissime "micro-rotazioni".

Convergenza rapida: significa che la velocità angolare $d\theta/dt$ diventa estremamente alta vicino al centro. La formica gira "follemente" su sé stessa negli istanti finali prima dell'incontro.

Quando il Modello cessa di essere una buona descrizione: Il modello matematico della spirale logaritmica è un'eccellente descrizione del moto delle formiche fino a quando le loro dimensioni fisiche non diventano significative rispetto alle distanze in gioco. Quando sono a pochi millimetri (o meno) dal centro e l'una dall'altra, la premessa che "la formica A insegue il punto matematico della formica B" inizia a vacillare. La formica A inizierà a interagire con il corpo fisico della formica B.

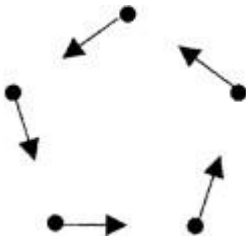
In sintesi:

Il modello matematico usa il concetto di infinito per descrivere il comportamento limite di un sistema idealizzato. Nel mondo fisico, questo "infinito" si traduce in un comportamento estremo (un numero molto elevato di giri, una velocità angolare molto elevata) che avviene in un intervallo di tempo e spazio estremamente piccolo, poco prima che le limitazioni fisiche (come la dimensione delle formiche) prendano il sopravvento e portino all'effettivo incontro "finito".

È un classico esempio di come un modello matematico possa fornire intuizioni profonde sul comportamento di un sistema, anche se le sue previsioni più estreme (come l'infinito) non sono presenti nella realtà fisica, esse indicano solo una tendenza.

Ora estendiamo il problema al caso generale di un poligono di N lati.

Consideriamo N formiche inizialmente poste ai vertici di un poligono regolare avente N lati di lunghezza L. Ad un certo istante esse iniziano a muoversi tutte insieme con velocità di modulo v e puntano istante per istante verso la formica più vicina, in questo modo esse si avvicineranno costantemente rimpicciolendo sempre più il poligono fino a che esso collassi nel suo centro. Calcolare il tempo occorrente affinché questo si verifichi e calcolare anche il numero di giri che ogni formica compie prima di arrivare al centro.



La velocità delle formiche può essere separata in una componente tangenziale, v_t e una radiale, v_r .

Il problema conserva una simmetria rotazionale di $2\pi/N$ radianti, questo è l'angolo sotteso dai due raggi consecutivi, in quanto l'angolo al centro viene diviso in N parti. Il triangolo AOB (supponiamo A e B due vertici consecutivi ed O centro del poligono) è isoscele con angoli alla base uguali indicati con α , mentre l'angolo al vertice è come già detto, $2\pi/N$, dovendo essere la loro somma pari a 180° , si ha:

$$\pi = 2\alpha + \frac{\pi}{N}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{N}$$

La velocità radiale, proiezione del vettore v sul raggio, che sarà negativa perché punta verso il centro,

$$v_r = \frac{dr}{dt} = -v \cos \alpha = -v \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{N} \right)$$

Usando l'identità $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$

$$v_r = \frac{dr}{dt} = -v \cos \alpha = -v \sin(\pi / N)$$

La componente tangenziale è

$$v_t = r \frac{d\theta}{dt} = v \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{N} \right)$$

Usando l'identità $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$ si ha

$$v_t = r \frac{d\theta}{dt} = v \cos(\pi / N)$$

Troviamo l'equazione della curva.

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{dr/dt}{d\theta/dt} = \frac{-v \sin(\pi / N)}{v \cos(\pi / N) / r} = -r \tan(\pi / N)$$

$$\int \frac{dr}{r} = -\tan(\pi / N) \int d\theta$$

$$\log r = -\tan(\pi / N) \theta + c$$

$$r(\theta) = e^{-(\theta \tan(\pi / N) + c)} = e^c e^{-\theta \tan(\pi / N)}$$

Con la posizione dell'istante iniziale $r = r_0$ per $\theta = 0$ si ha $r_0 = e^c$

$$r(\theta) = r_0 e^{-\theta \tan(\pi / N)}$$

Calcoliamo il tempo occorrente alla formica per raggiungere il centro.

$$t = \frac{r_0}{|v_r|} = \frac{r_0}{-v \sin(\pi / N)}$$

Se L è il lato iniziale del poligono regolare di N lati, la distanza r_0 dal centro a un vertice è $r_0 = L / (2 \sin(\pi/N))$.

Sostituendo:

$$t = \frac{r_0}{|v_r|} = \frac{L}{2v \sin(\pi / N)}$$

Si vede che ponendo $N = 4$ si riottiene la soluzione trovata per il quadrato $t = L/v$.

Vediamo infine la distanza totale percorsa: $d = v t$.

$$d = vt = v \frac{L}{2v \sin^2(\pi / N)} = \frac{L}{2 \sin^2(\pi / N)}$$

Per un triangolo $N = 3$

$$d = \frac{L}{2 \sin^2(\pi / 3)^2} = \frac{L}{2(\sqrt{3}/2)^2} = \frac{2}{3} L = 0.67L$$

Per un quadrato $N = 4$

$$d = \frac{L}{2 \sin^2(\pi / 4)^2} = \frac{L}{2(1/\sqrt{2})^2} = L$$

Per un pentagono $N = 5$

$$d = \frac{L}{2\sin^2(\pi/5)} = \frac{L}{2(1/\sqrt{5} - \sqrt{5}/8)^2} = \frac{L}{2 \cdot (0.587)^2} = 1.45L$$

Come si vede la distanza percorsa è in funzione del numero dei lati del poligono.

Rimane inalterato il ragionamento precedente circa il tempo occorrente per arrivare al centro.

Nota

La spirale logaritmica, definita dalla funzione $r = a e^{k\theta}$ con k che può essere sia positiva che negativa, è una curva che appare in diversi fenomeni fisici e naturali grazie alle sue proprietà uniche, come il fatto che **l'angolo tra la tangente e il raggio è costante**. Ecco alcuni esempi fisici in cui la traiettoria segue una spirale logaritmica:

1. Moto di un corpo sotto una forza centrale inversamente proporzionale al cubo della distanza

Descrizione: In meccanica classica, se un corpo si muove sotto l'influenza di una forza centrale che varia come $F \propto 1/r^3$, la traiettoria può essere una spirale logaritmica.

Esempio fisico: Questo tipo di forza può emergere in alcuni sistemi teorici, come un corpo carico in un campo elettrico o magnetico con specifiche condizioni. Ad esempio, un elettrone che si muove in un campo magnetico non uniforme con perdite di energia potrebbe approssimare una spirale logaritmica mentre si avvicina o si allontana dal centro.

Dettaglio: La forza $F = -k/r^3$ porta a un'equazione differenziale il cui risultato, in coordinate polari, dà una traiettoria del tipo $r = a e^{k\theta}$, dove (k) dipende dai parametri della forza e dalle condizioni iniziali.

2. Crescita di strutture biologiche (es. conchiglie dei molluschi)

Descrizione: Molte conchiglie di molluschi, come quelle del nautilus, crescono seguendo una spirale logaritmica. Questo accade perché l'organismo aggiunge materiale in modo proporzionale alla sua crescita, mantenendo un angolo costante rispetto al raggio.

Esempio: La conchiglia del nautilus cresce in modo che ogni nuova camera sia più grande della precedente secondo un fattore costante, formando una spirale logaritmica. Questo garantisce stabilità strutturale e distribuzione ottimale del peso.

Dettaglio: La spirale logaritmica è ideale in natura perché permette una crescita uniforme senza cambiare forma, un fenomeno noto come autosimilarità.

3. Traiettorie di insetti attratti da una sorgente luminosa

Descrizione: Alcuni insetti, come le falene, seguono una spirale logaritmica quando si avvicinano a una luce. Questo accade perché l'insetto cerca di mantenere un angolo costante rispetto alla sorgente luminosa (un comportamento chiamato fototassi), ma la sua traiettoria si curva a causa del movimento.

Esempio: Una falena che vola verso una lampada, cercando di mantenere un angolo fisso con i raggi di luce, finisce per seguire una spirale logaritmica, avvicinandosi sempre di più alla fonte luminosa.

Dettaglio: Se l'insetto volasse in linea retta, non seguirebbe una spirale, ma il suo metodo di navigazione (mantenere un angolo costante con la luce) porta a questa traiettoria.

4. Dinamica dei bracci delle galassie a spirale

Descrizione: I bracci di alcune galassie a spirale, come la Via Lattea, approssimano una spirale logaritmica. Questo è dovuto alla dinamica gravitazionale e alla rotazione differenziale delle stelle e del gas nella galassia.

Esempio fisico: Nella Via Lattea, i bracci spirali seguono una forma approssimativamente logaritmica con un angolo di inclinazione (pitch angle) costante, che è una caratteristica della spirale logaritmica.

Dettaglio: La spirale logaritmica emerge perché le onde di densità nella galassia si propagano in modo che le stelle e il gas si organizzano in una struttura a spirale con un'espansione proporzionale all'angolo.

5. Movimento di particelle in un fluido con resistenza viscosa

Descrizione: Una particella che si muove in un fluido viscoso, soggetta a una forza centrale e a una resistenza proporzionale alla velocità, può seguire una spirale logaritmica.

Esempio fisico: Un vortice in un fluido, come un mulinello in acqua o aria, può trascinare una particella leggera (ad esempio una foglia) lungo una traiettoria a spirale logaritmica mentre la particella perde energia e si avvicina al centro del vortice.

Dettaglio: La resistenza viscosa causa una dissipazione di energia, e la combinazione di questa forza con una forza centrale (come la pressione del fluido) può portare a una traiettoria a spirale logaritmica.

6. Onde elettromagnetiche in mezzi particolari

Descrizione: In alcuni sistemi ottici o elettromagnetici, come le onde che si propagano in mezzi con proprietà specifiche (es. mezzi anisotropi o con gradiente di indice di rifrazione), il percorso delle onde può seguire una spirale logaritmica.

Esempio fisico: In un esperimento con un metamateriale progettato per curvare la luce in modo particolare, il percorso di un raggio può assumere la forma di una spirale logaritmica.

Dettaglio: Questo accade quando il mezzo induce un angolo di rifrazione che cambia in modo esponenziale con la posizione, portando a una traiettoria curva simile a una spirale logaritmica.

Considerazioni finali

La spirale logaritmica è comune in natura e fisica perché rappresenta una soluzione ottimale per problemi che coinvolgono crescita, dissipazione di energia o movimento con vincoli geometrici

Breve storia evolutiva della vita

a cura di Giancarlo Buccella



La storia della scienza naturale può essere riassunta come l'elaborazione di occhi sempre più perfetti entro un cosmo entro il quale c'è sempre qualcosa di più da vedere.

(Pierre Teilhard de Chardin).

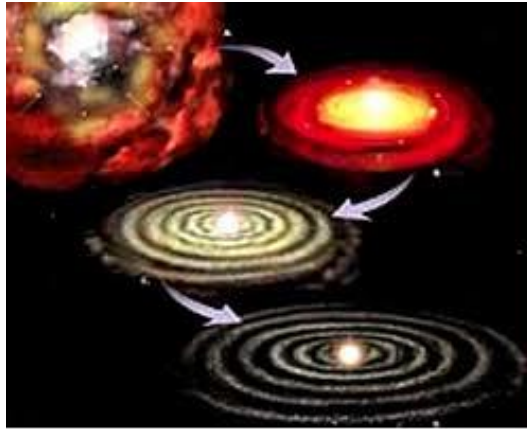
Studiare l'origine e l'evoluzione della vita significa affrontare una delle domande più profonde che l'essere umano si sia mai posto: come può la materia inanimata trasformarsi in materia vivente? Per rispondere, occorre prima chiarire che cosa intendiamo con il termine vita.

Un organismo vivente non si distingue da un corpo inanimato per una sola proprietà, ma per un insieme di caratteristiche che agiscono in modo integrato. Tra le più rilevanti vi sono:

1. la capacità di mantenere una forma definita e relativamente costante una volta raggiunto lo stadio adulto;
2. la presenza di un metabolismo, ovvero l'insieme dei processi chimici che trasformano energia e materia;
3. l'omeostasi, cioè la regolazione dell'ambiente interno nonostante le variazioni esterne;
4. la capacità di movimento e di risposta a stimoli fisici o chimici;
5. l'adattamento evolutivo, che permette agli organismi di sopravvivere in contesti mutevoli;
6. la variabilità genetica, ossia la possibilità di modificarsi nel corso delle generazioni.

Tuttavia, la caratteristica più fondamentale della vita resta la riproduzione: la capacità di generare nuovi individui simili a sé, assicurando la continuità della specie.

Il contesto cosmico e geologico



Secondo la teoria del Big Bang, l'universo ha avuto origine circa 14 miliardi di anni fa. Per diversi miliardi di anni dopo quell'evento si sono formate le prime galassie e stelle. Solo successivamente, circa 4,6 miliardi di anni fa, prese forma il nostro Sistema Solare da una nube di gas e polveri arricchita dai resti di stelle precedenti.

La Terra si formò poco dopo, circa 4,5 miliardi di anni fa, attraverso l'aggregazione di materiale cosmico. Le prime centinaia di milioni di anni furono caratterizzate da condizioni estreme: bombardamenti meteorici, intensa attività vulcanica e un'atmosfera primitiva priva di ossigeno, composta inizialmente da due gas molto leggeri (idrogeno ed elio) che poi sarebbero sfuggiti rapidamente nello spazio a causa della loro leggerezza, sostituita così da una seconda atmosfera contenente gas di origine vulcanica, quali ossido di carbonio, anidride carbonica, acido solfidrico, azoto, metano e acido cianidrico, oltre a vapore acqueo.. Col progressivo raffreddamento della Terra, piogge torrenziali avrebbero disciolto nei mari sali e minerali rocciosi.

Dal mito alla scienza



Aristotele, 2400 anni fa, raccogliendo le idee formulate dai filosofi che lo precedettero, propose che la vita potesse generarsi spontaneamente per l'esistenza di un "principio attivo" insito nella materia non vivente ("principio passivo").

Per secoli, l'origine della vita fu spiegata attraverso miti, intuizioni filosofiche e teorie speculative. I filosofi dell'antica Grecia pensavano che la vita fosse insita nella materia stessa e quando le condizioni erano favorevoli emergeva spontaneamente. Aristotele sintetizzò in una sua teoria tutte le idee relative alla generazione spontanea, dei filosofi che lo avevano preceduto. Secondo il grande filosofo gli esseri viventi nascono da altri organismi simili, ma a volte possono generarsi anche dalla materia inerte.

In ogni cosa, infatti, ci sarebbero un "principio passivo" rappresentato dalla materia e un "principio attivo" rappresentato dalla forma, ovvero una sorte di forza interna che organizza la materia stessa dandole appunto una forma. Ad esempio, il fango è materia inerte che possiede un principio attivo che altro non è che una predisposizione ad organizzare la materia inerte in un essere vivo, come ad esempio un verme o una rana, oppure mosche dalla carne in putrefazione, addirittura oche nate dagli alberi.



Solo con il progresso della scienza sperimentale, tra XVII e XIX secolo, questa ipotesi fu progressivamente confutata grazie ai lavori di Francesco Redi, Lazzaro Spallanzani e soprattutto Louis Pasteur, che dimostrò definitivamente come ogni organismo derivi da altri organismi preesistenti. Da quel momento prevalse il principio di biogenesi: la vita nasce solo dalla vita. Ripercorriamo rapidamente gli eventi cruciali di questo percorso.

La teoria della generazione spontanea fu sostenuta da illustri scienziati come Newton, Cartesio e Bacone e nel 1500 c'era ancora chi credeva che le oche nascessero da alcuni alberi che vivevano in

contatto con l'oceano e che gli agnelli si generassero dentro i meloni. Nel XVII secolo iniziarono i primi esperimenti per provare la teoria della generazione spontanea e un medico Jean Baptiste Van Helmont dichiarò di aver condotto un particolarissimo esperimento: mise, infatti, una camicia sporca a contatto con dei chicchi di frumento e secondo lo scienziato dopo 21 giorni sarebbero nati dei topi. A parere del medico il sudore di cui era impregnata la camicia sarebbe stato il principio attivo grazie al quale la materia inerte si sarebbe trasformata in materia vivente.

La prima vera svolta si ebbe nel XVII secolo con Francesco Redi (1626–1697), medico e naturalista fiorentino. Seguendo il metodo sperimentale promosso da Galileo, Redi decise di verificare in laboratorio la credenza secondo cui le larve di mosca nascessero spontaneamente dalla carne in putrefazione.

Nel 1668 mise pezzi di carne in tre tipi di contenitori: 1) aperti 2) chiusi ermeticamente 3) coperti da una garza sottile che permetteva il passaggio dell'aria ma non delle mosche.

I risultati furono chiari: solo nei vasi aperti si svilupparono larve, originate dalle uova deposte dalle mosche adulte. Nei contenitori chiusi e in quelli coperti da garza non comparve alcuna vita. Redi dimostrò così che anche gli insetti derivavano da genitori della stessa specie, non da processi spontanei.

Nel 1745 il naturalista inglese John Needham inventò nuovi esperimenti per dare prove alla tesi dell'abiogenesi. Egli mise in alcune provette brodo di pollo e infusi di erbe e poi le tappò con della garza. Le provette erano state rese sterili dal calore, ma nonostante questo dopo alcuni giorni si notarono centinaia di organismi viventi all'interno. Questo risultato rafforzò l'ipotesi dell'esistenza della generazione spontanea.

Qualche anno dopo l'abate Lazzaro Spallanzani, non convinto dall'esperimento di Needham, cercò di ripeterlo lasciando scaldare molto più a lungo il liquido nutritivo e a maggiori temperature, fino a farlo bollire per qualche minuto. Chiuse anche ermeticamente le provette e il risultato fu che anche a distanza di molti giorni non si notava alcun microrganismo vivo. Il naturalista Needham, di risposta criticò Spallanzani dicendo che la temperatura a cui era stato sottoposto il liquido nutritivo, era stata troppo elevata e questa aveva ucciso i principi attivi presenti e inoltre la chiusura ermetica delle provette non avrebbe lasciato passare l'aria indispensabile per la vita. Le discussioni continuarono lungo fino a quando intorno alla metà del diciannovesimo secolo, un biologo francese Louis Pasteur, studiò un nuovo esperimento che mise fine alla questione. Pasteur realizzò alcuni contenitori di vetro con un lungo collo ricurvo (chiamati "palloni a collo di cigno"). All'interno di

questi il liquido nutritivo veniva bollito per più di un'ora lasciando che il vapore uscisse attraverso il collo ricurvo del recipiente. Dopo la bollitura, la sostanza all'interno cominciava a raffreddarsi lentamente, mentre l'aria contaminata da microrganismi entrava dall'esterno a causa della depressione conseguente al riscaldamento. Così gli organismi microscopici a contatto con il vapore bollente del liquido all'interno morivano e anche dopo alcuni mesi non si trovava traccia di vita, mentre sul tratto più esterno del collo del recipiente si vedevano polveri e microrganismi entrati dall'esterno. Questo esperimento chiuse definitivamente la questione aperta dai sostenitori dell'abiogenesi, i quali dicevano che la lunga bollitura del liquido nutritivo uccideva il principio attivo. Pasteur invece, dimostrò che una volta rotto il collo ritorto del contenitore, l'aria a contatto con la sostanza avrebbe portato germi e microrganismi all'interno, dopo poco tempo. Inoltre, il recipiente non sigillato consentiva all'aria di entrare, anche se attraverso un collo tortuoso, bloccando le obiezioni di chi sosteneva che il principio attivo aveva bisogno di aria per generare la vita. Queste dunque furono le tre tappe decisive.



Francesco Redi (1668): mostrò che le larve non nascevano “dal nulla” nella carne, ma provenivano dalle uova deposte dalle mosche.



Lazzaro Spallanzani (1765): fece bollire brodi e li sigillò, mostrando che non compariva vita se l'aria non poteva entrare. Però i suoi esperimenti lasciavano il dubbio: l'aria era necessaria alla vita, o c'era davvero una “forza vitale”?



Louis Pasteur (1864): con i famosi flaconi a collo di cigno, dimostrò che i microrganismi non comparivano nei brodi sterilizzati finché la polvere e i germi dell'aria non vi entravano. Questa volta non c'erano più scappatoie: la generazione spontanea era scientificamente smentita.

Quindi solo dalla seconda metà dell'800 la teoria della generazione spontanea che aveva tenuto banco fin da Aristotele, venne considerata definitivamente superata e si aprì la strada alla teoria della biogenesi (la vita nasce solo da altra vita) e alla microbiologia moderna.

[Per inciso ci fu un'altra idea di Aristotele che sopravvisse quasi quanto l'idea della generazione spontanea, quella che la velocità di un corpo dipendesse dalla forza applicata su di esso; ci volle il genio di Galileo Galilei, che dimostrò invece che la velocità di un corpo non dipende dalla forza applicata, ma dall'accelerazione.]

Nota didattica su Aristotele

Per almeno un millennio (soprattutto nel Medioevo), la sua influenza fu enorme. Nel mondo islamico medievale e poi nella scolastica cristiana, Aristotele divenne *“il Filosofo”* per eccellenza. La logica aristotelica era il fondamento del pensiero razionale, la sua fisica e cosmologia erano l'impianto ufficiale fino a Galileo, e la sua metafisica dominava la teologia (Tommaso d'Aquino, per esempio, lo usava come impalcatura per la filosofia cristiana). In questo senso, non è esagerato dire che Aristotele ha influenzato (insieme con Platone) la cultura per oltre un millennio.

La divisione della materia in quattro elementi

- Elementi: terra, acqua, aria, fuoco.
- Concetto chiave: ogni sostanza era una combinazione di questi quattro elementi, ciascuno con proprietà naturali (secco, umido, caldo, freddo).
- Influenza: la chimica medievale e rinascimentale ancora ragionava in questi termini prima della nascita della chimica moderna con Lavoisier.

Il concetto di “luogo naturale” e moto naturale

- Aristotele pensava che gli oggetti si muovessero verso il loro luogo naturale:
 - La terra e l'acqua tendono verso il basso.
 - L'aria e il fuoco tendono verso l'alto.
- Questo spiegava cadute e galleggiamenti senza la legge di gravitazione universale.
- Rimase dominante fino a Galileo, che introdusse il concetto di moto uniformemente accelerato e la fisica matematica.

Il geocentrismo

- Aristotele, insieme a Tolomeo (che lo elaborò), sosteneva che la Terra fosse ferma al centro dell'universo, con il Sole e gli altri corpi celesti che ruotano attorno ad essa in sfere concentriche.
- Questa visione rimase ortodossa fino a Copernico e Galileo.

La distinzione tra mondo sublunare e mondo celeste

- Subito sotto la Luna: mondo cambiabile, corrotto, soggetto a nascita e morte.
- Oltre la Luna: mondo perfetto e immutabile, composto da etere.
- Questa visione influenzò la cosmologia fino al Rinascimento.

Teleologia

- Aristotele vedeva la natura come guidata da uno scopo intrinseco, tutto ha una “ragione d'essere” o fine.
 - Anche questa idea sopravvisse fino al XVII secolo, specialmente in biologia e filosofia naturale.
-

Arriva la “zuppa” e “le sorgenti idrotermali”

L'origine della vita sulla Terra rappresenta un evento unico, non essendo possibile sottoporla a esperimenti replicabili per verificare la validità di una teoria, l'approccio scientifico più rigoroso consiste nell'elaborare teorie fondate sulle evidenze osservabili e sui modelli interpretativi disponibili. Ad oggi non abbiamo certezze neanche sull'ambiente fisico-chimico che ha ospitato la comparsa delle prime cellule. Detto ciò vediamo come si è evoluto il pensiero scientifico.

Una volta abbandonata l'ipotesi della generazione spontanea degli organismi viventi, agli inizi del '900 il russo Alexandr I.O. Oparin e, indipendentemente, l'inglese John B.S. Haldane fecero l'ipotesi che nelle fasi iniziali della formazione del nostro pianeta devono essere comparsi aggregati di molecole a base di carbonio, capaci di sintetizzare copie di se stesse cioè in possesso della proprietà fondamentale di un organismo vivente, cioè quella di riprodursi.



La teoria di Oparin sull'origine della vita, nota anche come “Teoria del brodo primordiale”, tenta di descrivere l'evoluzione chimica della vita sulla Terra primordiale, dove l'assenza di ossigeno libero e la presenza di energia (luce solare, scariche elettriche) avrebbero favorito la formazione di molecole organiche da gas inorganici, che si sarebbero poi accumulate nei mari formando un "brodo primordiale". Da questo brodo sarebbero nati i coacervati, sistemi prebiotici che, aggregandosi e riproducendosi, avrebbero dato origine ai primi organismi viventi, anticipando l'evoluzione biologica vera e propria.

La conversione di piccole molecole in grandi molecole molto grandi deve essere stato un processo molto lungo e complesso per le condizioni ambientali estreme della Terra primordiale (dovute alla intensa radiazione ultravioletta e all'alta temperatura), la cui atmosfera probabilmente era simile, come detto sopra, a quella dei gas che ancora oggi fuoriescono dai vulcani: vapore acqueo, idrocarburi semplici come il metano, idrogeno solforato, anidride solforosa, monossido di carbonio e anidride carbonica. Cruciale per il successo di questa teoria è stato l'esperimento di Miller e Urey che nel 1952 mostrò la possibilità che predisponendo un ambiente gassoso simile all'atmosfera primordiale, da molecole inorganiche si formassero molecole organiche (amminoacidi), utilizzando ammoniac,

acqua e anidride carbonica e metano, investite da scariche elettriche. Negli anni successivi, esperimenti più raffinati hanno prodotto non solo aminoacidi, ma anche nucleotidi, zuccheri e lipidi, elementi fondamentali della vita.

È probabile che la proprietà di autoreplicazione sia comparsa a livello molecolare, cioè di quelle molecole che oggi sono capaci di riprodursi e di trasmettere l'informazione in esse contenuta alle molecole figlie. Tale proprietà è posseduta dalle macromolecole degli acidi nucleici e, secondo recenti esperimenti, anche da certe molecole proteiche. Perché ciò si potesse realizzare, era necessario un complesso meccanismo da poco conosciuto che richiede, nel caso degli acidi nucleici (DNA e RNA), la partecipazione, oltre ai nucleotidi, di una batteria di enzimi (elicasi, topoisomerasi, primasi, polimerasi, ligasi) che innescano una cascata di eventi. Il punto focale, difficile da immaginare, è quello di determinare quali siano state le prime macromolecole comparse per prime, le proteine o gli acidi nucleici. La domanda è legittima in quanto sappiamo che le proteine sono sintetizzate sulla base delle istruzioni fornite dal DNA, il quale a sua volta viene sintetizzato da particolari enzimi che sono proteine. In altri termini, è nato prima l'uovo o la gallina?

Inoltre, ammesso che le prime forme di vita siano rappresentate nel brodo primordiale da molecole capaci di autoriprodursi, oggi la vita non ci appare dispersa nell'ambiente, ma racchiusa all'interno di un involucro: la membrana cellulare, che la separa dal mondo esterno. In altri termini gli organismi viventi hanno una struttura cellulare. Nella cellula avviene un insieme di reazioni chimiche coordinate, mentre quelle che si svolgevano nell'ambiente primitivo erano reazioni casuali e disordinate. Come si è quindi passati dallo stato di dispersione molecolare a quello cellulare?

A queste domande non vi è risposta ma solo tentativi di ragionamento scientifico (teorie).

Successivamente alla teoria del "brodo primordiale", due studiosi: il tedesco Günter Wächtershäuser (1988) ed il britannico Michael Russell (1989) indipendentemente, suggerirono un'idea sostanzialmente identica detta "Teoria delle Sorgenti Idrotermali", diversa da quella precedente per il come e dove.



Entrambe le teorie presuppongono: 1. Un ambiente acquoso 2. La presenza di "mattoni" chimici di base. 3. Una fonte di energia per guidare le reazioni chimiche.

Tabella di Confronto: Brodo Primordiale vs. Sorgenti Idrotermali

Caratteristica Chiave	Teoria del Brodo Primordiale	Teoria delle Sorgenti Idrotermali
Luogo	Pozze d'acqua bassa in superficie, laghi o oceani poco profondi. Un ambiente "orizzontale" e vasto.	Profondità oceaniche, intorno a camini vulcanici sottomarini. Un ambiente "verticale", localizzato e compartimentalizzato.
Fonte di Energia	Esterna: Fulmini, radiazioni ultraviolette (UV) del Sole, calore vulcanico superficiale.	Interna: Energia chimica derivante dai gradienti geochimici. Differenze di pH, temperatura e concentrazione chimica tra l'acqua della sorgente e l'acqua oceanica.
"Ingredienti" Chimici	Provenienti principalmente dall'atmosfera primitiva (metano, ammoniaca, idrogeno) che si sciolgono nell'acqua.	Rilasciati dal mantello terrestre attraverso le sorgenti (idrogeno solforato, idrogeno, metano, ioni metallici).
Problema della Concentrazione	Debolezza principale: Le molecole organiche si formerebbero in un oceano vastissimo, risultando estremamente diluite. È difficile immaginare come possano incontrarsi e reagire. L'ipotesi delle pozze che evaporano tenta di risolvere questo problema.	Punto di forza: Le strutture porose delle rocce intorno alle sorgenti agiscono come minuscoli "laboratori" o "provette" naturali. Le molecole vengono intrappolate e concentrate in questi piccoli spazi, favorendo le reazioni.
Protezione	Molto vulnerabile: La superficie terrestre era bombardata da meteoriti e esposta a intense e distruttive radiazioni UV (non c'era ancora uno strato di ozono).	Ambiente protetto: Le profondità oceaniche offrivano un riparo sicuro sia dagli impatti di meteoriti sia dalle radiazioni UV.
Tipo di Metabolismo Iniziale	Non ben definito, forse basato sulla fermentazione delle molecole organiche disponibili nel "brodo".	Metabolismo chemiosintetico: La vita avrebbe sfruttato fin da subito i gradienti chimici presenti per produrre energia, un processo simile a quello usato ancora oggi da molti microrganismi estremofili.

Differenza concettuale fra le due teorie

Il *Brodo Primordiale* è come una grande piscina esposta al sole e ai temporali. Gli ingredienti piovono dal cielo (atmosfera) e l'energia viene fornita da eventi casuali e potenti (fulmini, UV). Il problema è che la piscina è enorme e gli ingredienti sono così sparpagliati che è difficile che si incontrino.

Le *Sorgenti Idrotermali* sono come un laboratorio chimico geotermico, complesso e protetto. Gli ingredienti e l'energia vengono forniti in modo continuo e localizzato dal "basso" (interno della Terra). La struttura stessa del laboratorio (le rocce porose) fornisce le condizioni ideali per concentrare i reagenti e far avvenire le reazioni in modo ordinato.

Quindi, sebbene entrambe descrivano la nascita della vita dall'inerte, la teoria delle sorgenti idrotermali risolve due dei più grandi problemi della teoria del brodo primordiale: il problema della diluizione e il problema della protezione, rendendola oggi un'ipotesi molto più robusta e accreditata

nella comunità scientifica.

Essa è la teoria di riferimento attuale, nel senso che sulla sua impalcatura si sono sviluppate diverse linee di indagine dette Teorie Ibride che rappresentano la frontiera attuale.

Il modello Ibrido

L'idea di fondo delle Teorie Ibride è che la vita non sia nata da un singolo salto netto (prima RNA, prima proteine, prima membrane...), ma da un intreccio progressivo di più componenti, che si sono co-evoluti fino a diventare inseparabili.

Eccone un quadro sintetico.

1. Jack Szostak (Premio Nobel):

- Il suo modello ibrido: integra l'Ipotesi del Mondo a RNA con la teoria delle protocellule in un ambiente geochimico specifico (pozze superficiali soggette a cicli di evaporazione e reidratazione).
- Come funziona: Szostak non si è limitato a studiare l'RNA da solo. Il suo laboratorio ha dimostrato sperimentalmente che:
 - Semplici acidi grassi (che potevano esistere sulla Terra primordiale) possono formare spontaneamente delle vescicole o membrane (protocellule), creando un ambiente interno protetto.
 - Queste protocellule possono intrappolare molecole di RNA.
 - I cicli di secco-umido (l'acqua in una pozza evapora e poi piove di nuovo) forniscono l'energia per aiutare l'RNA a replicarsi all'interno della protocellula.
 - La crescita della protocellula può portarla a dividersi, distribuendo l'RNA nelle "cellule figlie".
- Questo è un perfetto esempio di teoria ibrida: combina un contenitore (membrana), un sistema genetico (RNA) e un motore ambientale (cicli geochimici).

2. John Sutherland:

- Il suo modello ibrido: è un chimico che ha proposto un modello basato su una "chimica dei sistemi" che unisce l'origine dei tre tipi fondamentali di molecole biologiche (acidi nucleici, amminoacidi e lipidi).
- Come funziona: invece di ipotizzare che i "mattoni" della vita si siano formati separatamente per poi assemblarsi, Sutherland ha dimostrato che partendo da ingredienti molto semplici (come l'acido cianidrico) e sotto l'azione della luce UV (tipica del "brodo primordiale" in

superficie), si può innescare una cascata di reazioni che produce **contemporaneamente** i precursori di RNA, proteine e lipidi.

- Questo ibrida l'idea di una chimica superficiale (come nel brodo) con la necessità di creare tutti i componenti necessari per un Mondo a RNA e per le protocellule in un unico luogo e processo coerente.

3. Michael Russell e Nick Lane:

- Il loro modello ibrido: hanno potenziato enormemente la Teoria delle Sorgenti Idrotermali integrandola con i principi del metabolismo.
- Come funziona: secondo loro, la vita non è iniziata con una molecola genetica fortunata (come l'RNA), ma con il metabolismo. Le sorgenti idrotermali alcaline forniscono naturalmente un gradiente di protoni attraverso le pareti minerali porose, molto simile a come le nostre cellule oggi generano energia.
- Questo flusso di energia naturale avrebbe alimentato la sintesi di molecole organiche all'interno di queste "protocellule" minerali. Solo in un secondo momento, una volta stabilito un metabolismo robusto, sarebbero emerse molecole genetiche come l'RNA per registrare e replicare le "ricette" di successo.
- Questo modello ibrida la geochimica delle sorgenti con un approccio "Metabolism-First", in opposizione al più classico approccio "Genetics-First" del Mondo a RNA.

Oggi, le teorie ibride hanno un ruolo assolutamente centrale per i seguenti motivi:

1. Superamento dei limiti: le teorie classiche (Brodo, Mondo a RNA, ecc.) si sono rivelate insufficienti se prese singolarmente. Ognuna ha dei punti deboli critici (es. la diluizione nel brodo, l'instabilità dell'RNA in acqua). I modelli ibridi sono il tentativo di risolvere questi problemi combinando i punti di forza di ciascuna ipotesi (es. le sorgenti idrotermali risolvono il problema della concentrazione e dell'energia, mentre i cicli secco-umido di Szostak risolvono il problema della replicazione dell'RNA).
2. Creazione di un Percorso Plausibile: l'obiettivo non è più solo spiegare come si sia formato un amminoacido o una molecola di RNA, ma delineare un percorso graduale e plausibile dalla geochimica alla biochimica. Questo richiede necessariamente di integrare:
 - Una fonte di energia (geochimica).
 - Un meccanismo di compartimentalizzazione (membrane o pori minerali).
 - Un sistema metabolico (per gestire l'energia e costruire molecole).
 - Un sistema genetico (per immagazzinare e trasmettere informazioni).
3. Guida per la Ricerca Sperimentale: i modelli ibridi non sono solo idee, ma generano ipotesi concrete che possono essere testate in laboratorio. I team di Szostak, Sutherland e altri stanno attivamente conducendo esperimenti per ricreare questi passaggi chiave, rendendo l'origine della vita un campo di scienza sperimentale e non più solo di speculazione teorica.

In conclusione, il dibattito scientifico oggi non è più "Brodo Primordiale "sì o no?", ma piuttosto: "Qual è il modello ibrido più corretto? La vita è nata in una sorgente idrotermale alimentando un metabolismo primordiale, o in una pozza superficiale che ha permesso la replicazione dell'RNA all'interno di una protocellula?". Oggi, il dibattito scientifico principale può essere riassunto così:

Scenario A (Ibrido delle Sorgenti): La vita è nata nelle profondità oceaniche, partendo dal metabolismo alimentato dai gradienti chimici delle sorgenti idrotermali, all'interno di protocellule minerali. La genetica (RNA) è arrivata dopo.

Scenario B (Ibrido di Superficie): La vita è nata in pozze d'acqua superficiali, partendo dalla genetica (Mondo a RNA) all'interno di protocellule lipidiche (membrane), con l'energia fornita da cicli di secco-umido e luce UV. Il metabolismo complesso è arrivato dopo.

Per completezza occorre menzionare la teoria della panspermia. L'ipotesi ha le sue origini nelle idee di Anassagora, un filosofo dell'antica Grecia, e si è rivitalizzata a partire dall'Ottocento con Lord Kelvin, con il fisico Hermann von Helmholtz e, nei primi decenni del Novecento, con il chimico e premio Nobel svedese Svante Arrhenius, mentre nell'ultimo quarto del XX secolo il testimone è passato agli astronomi Fred Hoyle e Chandra Wickramasinghe.

Secondo questa idea, "semi della vita" (come microrganismi, spore o molecole organiche complesse) viaggerebbero nell'universo a bordo di comete, asteroidi o polvere interstellare. Una volta giunti su un pianeta con condizioni favorevoli, come la Terra primordiale, questi semi avrebbero potuto attecchire e dare inizio all'evoluzione. La panspermia non risolve il problema dell'origine della vita in sé, ma semplicemente lo sposta in un altro luogo dell'universo, essa pur avendo alcuni sostenitori, non è accettata dalla maggioranza della comunità scientifica.

Ecco un quadro riassuntivo delle tappe più importanti.

Teoria	Idea principale	Punti di forza	Debolezze / criticità	Prove / evidenze
Abiogenesi chimica/ Zuppa primordiale (1924)	Molecole organiche complesse si formano da composti semplici nell'atmosfera primordiale	Spiegazione chimica diretta, supportata da esperimenti di laboratorio	Composizione precisa dell'atmosfera primitiva incerta	Esperimento Miller-Urey (1953) ha prodotto aminoacidi
Abiogenesi chimica/ Sorgenti idrotermali (1988)	Molecole organiche complesse si formano da composti semplici nei fondali oceanici/sorgenti idrotermali	Protezione da radiazioni, ambiente stabile, formazione di protocellule	Difficile riprodurre esattamente in laboratorio	Esperimenti su protocellule in gradienti chimici
Teorie ibride (attuali)	Combinazione di più meccanismi, es. molecole dallo spazio + evoluzione in sorgenti idrotermali	Considera più fattori contemporaneamente	Complessità e mancanza di conferme definitive	Alcuni esperimenti combinano molecole extraterrestri con protocellule

A questo punto dobbiamo menzionare il ruolo che ha la teoria detta “Mondo a RNA” in questo scenario. Essa non è una teoria completa sull'origine della vita, ma come a un'ipotesi su una fase cruciale: la nascita della genetica. Non dice *dove* è successo, ma *cosa* è successo. Essa suggerisce che l'RNA, e non il DNA, sia stata la molecola chiave. L'RNA ha la duplice capacità di immagazzinare informazioni (come il DNA) e di catalizzare reazioni chimiche (come le proteine). Questa versatilità lo rende il candidato ideale per la prima molecola in grado di autoreplicarsi e dare il via all'evoluzione darwiniana.

L'ipotesi del Mondo a RNA

Negli anni Sessanta, Francis Crick, Leslie Orgel e successivamente Walter Gilbert ipotizzarono che, prima della comparsa del DNA e delle proteine, la vita si basasse quasi esclusivamente sull'RNA. L'idea si fonda su una proprietà unica di questa molecola: a differenza del DNA, l'RNA non è solo un supporto informativo, ma può assumere strutture tridimensionali capaci di svolgere attività catalitiche, comportandosi cioè come enzimi. Questi RNA catalitici sono detti ribozimi e sono stati scoperti negli anni '80 da parte di Thomas Cech e Sidney Altman.

Secondo la teoria, nelle condizioni della Terra primordiale si sarebbero formati spontaneamente nucleotidi, che poi si sarebbero assemblati in polimeri di RNA. Alcune sequenze avrebbero acquisito la capacità di autocatalisi e di replicazione, dando origine a sistemi evolutivi elementari.

Evidenze a sostegno

Esistono numerosi indizi che rafforzano l'ipotesi del Mondo a RNA:

- Il ribosoma, macchina molecolare essenziale per la sintesi proteica, ha un nucleo catalitico costituito da RNA.
- Diversi cofattori fondamentali (come ATP, NADH, FAD) derivano da nucleotidi, suggerendo un'antica centralità dell'RNA.
- Alcuni virus (come i retrovirus) hanno un genoma a RNA e dimostrano come questa molecola possa sostenere un sistema informativo completo.

Criticità e sviluppi

Nonostante la sua eleganza, la teoria presenta ancora punti critici. L'RNA è instabile e si degrada facilmente: in quali condizioni avrebbe potuto persistere sulla Terra primordiale? Inoltre, la sintesi spontanea dei nucleotidi e il passaggio dall'RNA al sistema DNA-proteine restano problematici.

Per questo motivo, sono state proposte ipotesi complementari, come un mondo "RNA-peptidi", in cui brevi catene proteiche avrebbero cooperato con l'RNA, o un mondo a lipidi, in cui protocellule primitive avrebbero favorito la stabilità delle molecole.

Conclusione

Il "Mondo a RNA" rappresenta un'ipotesi centrale nello studio dell'origine della vita. Pur non essendo priva di limiti, offre un modello affascinante e coerente per spiegare come la chimica prebiotica possa aver dato origine a sistemi biologici capaci di evoluzione. La ricerca su questo tema non riguarda solo il passato della Terra, ma anche la possibilità di vita altrove nell'universo, rendendo questa teoria un punto di riferimento per l'astrobiologia contemporanea.

Il Mondo a RNA può essere visto come "Motore" in due Scenari Competitivi

La teoria del Mondo a RNA non è in competizione con la teoria delle sorgenti idrotermali. Piuttosto, la sua plausibilità dipende dall'ambiente in cui la si colloca. Questo ha creato due grandi "partiti" nel mondo scientifico:

Scenario A: L'Ibrido di Superficie ("Genetica Prima")

In questo modello, la Teoria del Mondo a RNA è il pilastro centrale.

Chi lo sostiene: scienziati come Jack Szostak e John Sutherland.

Come si inserisce: questo scenario è l'habitat naturale per il Mondo a RNA.

1. Luogo: pozze d'acqua calda in superficie, soggette a cicli di evaporazione e pioggia.
2. Ingredienti: I "mattoni" dell'RNA (nucleotidi) si formano grazie all'energia della luce UV e a reazioni chimiche complesse (come dimostrato da Sutherland).
3. Il ruolo chiave dell'ambiente: i cicli secco-umido sono fondamentali. Quando la pozza si prosciuga, le molecole si concentrano e questo aiuta i nucleotidi a legarsi tra loro (polimerizzazione) per formare catene di RNA. Quando la pozza si riempie di nuovo, queste catene di RNA possono muoversi, ripiegarsi e agire come catalizzatori (ribozimi).
4. Ordine degli eventi: in questo modello, la genetica viene prima. Si forma una molecola di RNA capace di replicarsi (magari all'interno di una gocciolina di grasso, una protocellula) e solo dopo questa "protocellula a RNA" sviluppa un metabolismo più complesso.

In sintesi: La teoria ibrida di superficie è essenzialmente una versione moderna e molto più dettagliata del "brodo primordiale", costruita appositamente per essere l'incubatrice perfetta per un Mondo a RNA.

Scenario B: L'Ibrido delle Sorgenti Idrotermali ("Metabolismo Prima")

In questo modello, il Mondo a RNA non è il punto di partenza, ma un risultato successivo.

- Chi lo sostiene: scienziati come Michael Russell e Nick Lane.
- Come si inserisce: Questo scenario è più problematico per un Mondo a RNA *iniziale*.
 1. Luogo: profondità oceaniche, nelle cavità porose delle sorgenti idrotermali alcaline.
 2. Il problema con l'RNA: L'RNA è una molecola notoriamente fragile e instabile in acqua, specialmente se calda. È molto difficile che si formi e si accumuli in un ambiente acquatico costante come una sorgente sottomarina.
 3. La soluzione: invertire l'ordine! Invece della genetica, qui il metabolismo viene prima. I gradienti chimici naturali della sorgente forniscono l'energia per alimentare un ciclo di reazioni chimiche auto-sostenute sulle superfici minerali. Questa è una "protovita" metabolica, senza geni.
 4. Il ruolo successivo dell'RNA: solo dopo che questo sistema metabolico è diventato stabile e robusto, sarebbe emersa la necessità di "registrare" e trasmettere le ricette chimiche di successo. A questo punto, il sistema avrebbe "inventato" molecole come l'RNA per immagazzinare queste informazioni. L'RNA, quindi, non è il motore di partenza, ma un aggiornamento cruciale sviluppato da una vita già esistente e basata sul metabolismo.

Quadro Riassuntivo del Ruolo del Mondo a RNA

	Scenario Ibrido di Superficie (Genetica Prima)	Scenario Ibrido delle Sorgenti Idrotermali (Metabolismo Prima)
Ruolo del Mondo a RNA	È il punto di partenza. È il motore primordiale della vita.	È un prodotto evolutivo successivo. È il "software" inventato da un "hardware" metabolico già funzionante.
Punto di Forza	Ha un forte supporto sperimentale (Szostak, Sutherland) sulla plausibilità della chimica prebiotica e della replicazione dell'RNA in queste condizioni.	Risolve meglio il problema fondamentale dell'energia (sfruttando gradienti geochimici) e della concentrazione (usando pori minerali).
Punto Debole	L'origine dell'energia per sostenere il sistema nel lungo periodo è meno chiara rispetto alle sorgenti. L'ambiente è più instabile.	La transizione da un sistema puramente metabolico a uno con genetica è un "salto" teorico enorme e difficile da dimostrare.



Concludendo possiamo affermare che finora si sono elaborate diverse ipotesi ma, sostanzialmente, alla domanda fondamentale circa l'origine della vita non vi è risposta: non sappiamo (ancora?!) come sia stato possibile che dalle molecole inorganiche sia comparsa la vita. Tutto quello che la scienza è riuscita a fare sinora è mostrare plausibilmente che nelle condizioni ambientali primordiali sia stato possibile il passaggio da molecole inorganiche a quelle organiche. Tra l'altro tutto questo sforzo scientifico è stato reso quasi inutile dall'aver constatato che in molti meteoriti si sono trovate molecole organiche. E' come se la natura ci dicesse: "Siete come chi, cercando affannosamente un oggetto in una stanza, alla fine si accorge che esso era sempre stato lì. Così voi, con i vostri esperimenti, avete intuito la via dall'inorganico all'organico; io ve la mostro compiuta." Volendo essere cinici e spietati, si potrebbe dire: "tanto lavoro per nulla". Ma ovviamente questa affermazione è falsa perché in queste ricerche, il processo conoscitivo si è arricchito di tanti dettagli. Il passo successivo è stato quello di fare esperimenti volti a capire se queste molecole organiche "vaganti" potevano ad un certo punto, in certe condizioni, auto-assemblarsi. L'esito di tali ricerche è stato positivo. Infatti è stato ampiamente dimostrato che le molecole organiche possiedono la capacità intrinseca di auto-organizzarsi in strutture più complesse e ordinate, (vescicole, protocellule, catene di RNA, ecc.), ma nessuna di queste è ancora "vita".



Essenzialmente non sappiamo come dai mattoni si sia potuto costruire la casa. Sebbene la scienza abbia dimostrato in modo convincente come possano essersi formati i 'mattoni' fondamentali della vita (le molecole organiche) il meccanismo esatto che ha portato questi componenti ad assemblarsi in un sistema integrato e auto-replicante, ovvero la prima 'casa' cellulare, rimane una questione aperta. Abbiamo trovato le lettere sparse dell'alfabeto della vita, ma non sappiamo ancora come siano state composte per scrivere la prima straordinaria parola. Il grande mistero non risiede tanto nell'esistenza dei singoli 'mattoni', quanto nella scintilla organizzativa che li ha uniti per erigere la cattedrale della vita.

Inoltre non sappiamo tante cose “al contorno”.

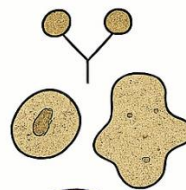
- ❖ Non sappiamo quale sia stata la prima forma di vita: una cellula primitiva? Un sistema autoreplicante di RNA? Qualcosa che non assomiglia a nulla di ciò che oggi consideriamo “vivente”?
- ❖ Non sappiamo se la vita sia comparsa una sola volta o in più occasioni, con una sola linea che è sopravvissuta.
- ❖ Non sappiamo neanche se le prime forme di vita fossero già cellulari o qualcosa di più “sfumato”, al confine tra chimica e biologia.

Sebbene la scienza abbia dimostrato in modo convincente come possano essersi formati i “mattoni” fondamentali della vita—le molecole organiche—il meccanismo esatto che ha portato questi componenti ad assemblarsi in un sistema integrato e auto-replicante, ovvero la prima “casa” cellulare, rimane una questione aperta.

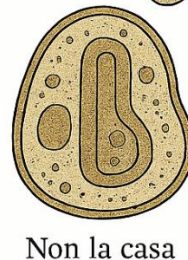
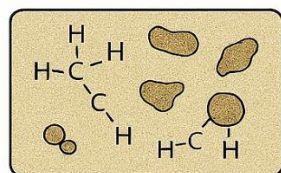
- Non sappiamo quale sia stata la prima forma di vita:



- Non sappiamo se la vita sia comparsa una sola volta o in più occasioni, con una sola linea che è sopravvissuta.



- Non sappiamo neanche se le prime forme di vita fossero già cellulari o qualcosa di più “sfumato”, al confine tra chimica e biologia.



In conclusione: abbiamo la certezza scientifica che nell’ambiente primordiale terrestre era possibile trovare molecole organiche e che queste potevano essere auto-organizzate: null’altro di certo.

Il passaggio dalla materia inanimata a quella animata rappresenta un salto pieno di mistero, un confine insondabile che ancora oggi sfida la nostra comprensione e mette in luce quanto fragile e meravigliosa sia l’origine della vita.

Considerazione metafisica

“Non esiste materia in sé. Tutta la materia ha origine ed esiste solo in virtù di una forza... Dobbiamo supporre l'esistenza di uno spirito cosciente e intelligente dietro questa forza.” (Max Planck)

È innegabile che il passaggio dal regno minerale a quello animale rappresenti una transizione di straordinaria complessità, che sfida la nostra comprensione e rende difficile immaginare che sia avvenuta “solo” attraverso processi naturali. La comparsa di strutture viventi capaci di autoregolazione, replicazione e adattamento, a partire da materia inorganica priva di intenzionalità, solleva interrogativi profondi sulle dinamiche che hanno guidato tale evoluzione. Questo salto qualitativo — da semplice chimica a biologia — sembra quasi richiedere una convergenza improbabile di condizioni, eventi e proprietà emergenti.

La straordinaria finezza con cui le leggi chimiche e fisiche sembrano calibrate per permettere l'esistenza di strutture complesse, la sorprendente capacità dell'RNA di auto-organizzarsi e replicarsi, e la coerenza interna dei processi evolutivi, suggeriscono una regia che va oltre il caso cieco. Non si tratta di negare la validità dei meccanismi naturali, ma di riconoscere che la loro efficacia e direzionalità sembrano rispondere a un principio ordinatore che la sola casualità non riesce a spiegare pienamente.

Di fronte a tale mistero, la mente razionale si trova quasi “obbligata” a contemplare l'ipotesi che un Ente ordinatore — una causa intelligente, una mente primordiale — abbia guidato, o almeno predisposto, le condizioni affinché la vita potesse emergere.

Dal Non-Vivente al Vivente: un processo, non un salto

Le prime tappe dell'evoluzione della vita

Nella visione scientifica attuale la transizione dall'inanimato all'animato non è vista come un interruttore che si accende, bensì come un continuum di complessità crescente, dove ogni passo è piccolo, plausibile e guidato dalla selezione naturale.

- ❖ Inanimato: Una roccia, una molecola di acqua. Non hanno informazione, non si replicano, non evolvono.
- ❖ Zona Grigia (Chimica Prebiotica): Un amminoacido, un nucleotide. Blocchi costruttivi.
- ❖ Inizio del Processo (Ribozima): Una molecola che contiene informazione (la sua sequenza) e agisce in base a essa (la sua funzione catalitica) per perpetuare sé stessa. Questo è il primo, rudimentale anello che unisce informazione e azione, il cuore della definizione di vita.
- ❖ Proto-Vita (Protocellula): Quel ribozima viene incapsulato. Ora esiste un'unità individuale che compete con altre unità. La selezione diventa ancora più potente.
- ❖ Vita: Il sistema diventa sempre più complesso, sviluppa un metabolismo, un codice genetico più stabile (DNA), ecc.

La scienza affronta questo apparente "salto" non negandone la grandezza, ma proponendo che non sia un salto, bensì una scalinata con migliaia di gradini bassissimi, percorsa in un grande intervallo temporale (centinaia di milioni di anni). Quello che a noi oggi appare come un abisso invalicabile è il risultato del fatto che non vediamo più i gradini intermedi, perché sono stati erosi dal tempo e superati da forme di vita più efficienti.

Il gradualismo contro il salto: il modello scientifico non postula che una cellula complessa sia apparsa all'improvviso. Postula che un ribozima capace di una debolissima auto-replicazione fosse solo il primo gradino. Da lì, la selezione naturale ha agito come un meccanismo che, passo dopo passo, ha favorito la comparsa di sistemi leggermente più stabili, leggermente più efficienti: membrane migliori, un metabolismo rudimentale, la transizione al DNA (più stabile), ecc.

Una prospettiva moderna

Charles Darwin ha rivoluzionato la nostra comprensione della vita sulla Terra, ma il suo contributo diretto alla teoria dell'origine della vita è più sfumato di quanto comunemente si pensi e si concentra principalmente su come la vita si è evoluta *dopo* la sua comparsa.

La sua opera fondamentale, "L'origine delle specie", pubblicata nel 1859, non affronta direttamente la questione di come la vita sia nata per la prima volta. Invece, il libro espone la teoria dell'evoluzione per selezione naturale, secondo cui le specie viventi discendono da un antenato comune e si diversificano nel tempo attraverso un processo graduale. I punti cardine della sua teoria sono:

- **Discendenza comune:** Tutti gli organismi, uomo compreso, hanno avuto origine nel tempo da forme di vita più antiche.
- **Selezione naturale:** In una lotta costante per l'esistenza, gli individui con caratteristiche ereditarie più adatte all'ambiente hanno maggiori probabilità di sopravvivere, riprodursi e trasmettere quei tratti vantaggiosi alla prole. Questo processo porta all'adattamento delle specie al loro ambiente.
- **Variabilità dei caratteri:** All'interno di una popolazione esiste una naturale variazione delle caratteristiche individuali, e alcune di queste differenze sono ereditabili.

Le scoperte della biologia evolutiva e della genetica hanno permesso di compiere un ulteriore passo avanti. La teoria darwiniana dell'evoluzione per selezione naturale suggerisce che la vita sia comparsa una sola volta e che tutti gli esseri viventi attuali discendano da un antenato comune universale (LUCA), una forma semplice ma già dotata di un patrimonio genetico ereditabile. Questa ipotesi è stata confermata dallo studio dei genomi, che rivelano una sorprendente unità biologica alla base della diversità del vivente. L'indagine scientifica sull'origine della vita si concentra oggi su due domande fondamentali:

Come si sono formate le prime molecole capaci di autoreplicarsi e di evolvere?

In quali condizioni della Terra primordiale ciò è stato possibile?

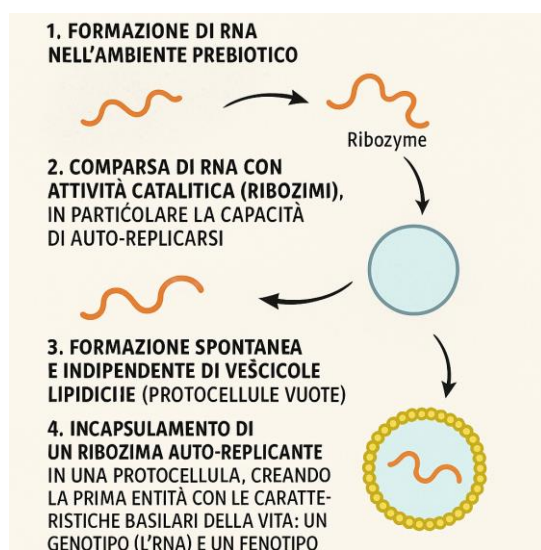
Queste domande segnano il punto di partenza di un viaggio affascinante, che attraversa chimica, biologia, geologia, astronomia e filosofia, e che ci accompagna dalle profondità dell'universo fino alla comparsa della vita sul nostro pianeta.

La natura non agisce "da sola" in senso caotico: la natura agisce secondo leggi. La selezione naturale è una legge, un algoritmo. Non è un evento stocastico, ma un processo deterministico che agisce sulla variazione stocastica. Il "caso" genera le opzioni (le mutazioni), ma la selezione "sceglie" in modo del tutto non-casuale quale opzione sopravviverà e si riprodurrà.

L'ipotesi oggi dominante sulla nascita della vita è la seguente:

1. Formazione di RNA nell'ambiente prebiotico.
2. "Comparsa" di RNA con attività catalitica (ribozimi), in particolare la capacità di auto-replicarsi.
3. Formazione spontanea e indipendente di vescicole lipidiche (protocellule vuote).
4. Incapsulamento di un ribozima auto-replicante in una protocellula, creando la prima entità con le caratteristiche basilari della vita: un genotipo (l'RNA) e un fenotipo (l'intera protocellula che, grazie al suo contenuto, può crescere e dividersi).

E' importante ribadire ancora una volta che i primi tre punti rappresentano traguardi che hanno una solida base di verifica sperimentale, mentre il quarto punto che descrive l'integrazione di questi passaggi non è verificarlo sperimentalmente.



Definizione di ribozimi: molecole di acido ribonucleico (RNA) dotate di attività catalitica, in grado cioè di accelerare reazioni chimiche in modo simile agli enzimi proteici.

L'esistenza dei ribozimi dimostra che l'RNA può effettivamente svolgere entrambe le funzioni, risolvendo il classico paradosso "uovo e gallina" su cosa sia venuto prima, il DNA (che conserva le informazioni per produrre le proteine) o le proteine (che sono necessarie per replicare il DNA).

In un ambiente prebiotico, come il cosiddetto "brodo primordiale" (pozze d'acqua calda, argille, sorgenti idrotermali), le condizioni chimico-fisiche avrebbero favorito la formazione spontanea di monomeri (come i nucleotidi) e la loro successiva polimerizzazione in catene di RNA.



L'RNA come punto di partenza: tra le varie molecole, l'RNA è l'unico candidato in grado di fare due cose fondamentali:

1. Immagazzinare informazione (la sequenza).
2. Svolgere un'azione (l'attività catalitica del ribozima).

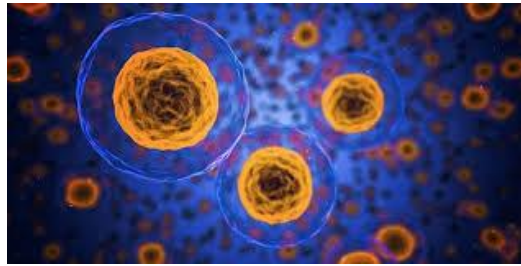
Evoluzione chimica: In questo "mondo a RNA", diverse sequenze di RNA sarebbero nate per caso. Alcune di queste, per puro accidente, avrebbero avuto la capacità di catalizzare la propria replicazione (auto-replicazione). Queste molecole avrebbero iniziato a moltiplicarsi, evolvendo attraverso errori di copia e selezionando le versioni più stabili ed efficienti.

In questa fase, non c'erano ancora cellule. Si trattava di molecole "nude" che competevano nell'ambiente.

Parallelamente, molecole anfifiliche come i lipidi, anch'esse presenti nell'ambiente prebiotico, si sarebbero aggregate spontaneamente in acqua per formare micelle e vescicole, ovvero le prime protocellule. Queste erano semplici "bolle" vuote dette vescicole.



Da vescicola a protocellula



La transizione da vescicola a protocellula si può pensare essere avvenuta nel seguente modo:

- Una molecola replicante (come un ribozima) viene incapsulata all'interno della vescicola
- La vescicola diventa una protocellula: una struttura con genotipo (RNA) e fenotipo (la membrana e il comportamento della vescicola)

Essa sarà in grado di crescere assorbendo lipidi dall'ambiente, di dividersi, trasmettendo il contenuto genetico e di evolversi.

Dalla protocellula a LUCA (Last Universal Common Ancestor)

Consideriamo il ribosoma, esso è una sorta di “fabbrica di proteine” presente in tutte le cellule viventi, ed è composto da RNA e proteine. La sua importanza per l'origine della vita è legata a un concetto chiave: l'RNA non è solo un messaggero, può anche avere attività catalitica. Questo porta all'idea dell'“RNA world”.



Si è scoperto nei primi anni 2000, grazie alla cristallografia a raggi X, che questo organello cellulare si è evoluto aggiungendo sempre nuove sovrastrutture a un nucleo principale che si è mantenuto inalterato nel tempo, dai batteri fino all'uomo.

Lo ha stabilito la più dettagliata analisi mai effettuata sui ribosomi, responsabili della sintesi delle proteine necessarie alla vita.

L'origine e l'evoluzione del ribosoma, uno degli organelli fondamentali delle cellule, è stato ricostruito con un dettaglio senza precedenti grazie a uno studio di Loren Williams e colleghi del Georgia Institute of Technology. Secondo quanto scoperto, nel caso del ribosoma l'evoluzione procede per sovrapposizione, aggiungendo nuove sovrastrutture a un nucleo che è rimasto inalterato, dagli organismi più semplici all'essere umano.

Si ricordi che nelle cellule, l'informazione genetica è conservata in massima parte nel DNA che si trova nel nucleo. Al momento della replicazione cellulare, l'informazione viene trascritta grazie all'RNA messaggero (mRNA), che si lega alla molecola di DNA come a uno stampo. L'mRNA poi esce dal nucleo e trasferisce l'informazione ai ribosomi, dove avviene il processo di traduzione e la sintesi delle proteine essenziali per la vita.

Quello che si è notato è che la struttura fondamentale del ribosoma si è fortemente conservata durante l'evoluzione, al punto che quella del nucleo essenziale è sostanzialmente la stessa in tutti gli esseri viventi, dai lieviti all'uomo. Su questa base comune, il ribosoma è evoluto diventando sempre più complesso via via che gli organismi stessi sono diventati più complessi. E nell'essere umano raggiunge il massimo della complessità. Ma i cambiamenti riguardano le parti più superficiali: la parte più interna è essenzialmente la stessa che in un batterio.

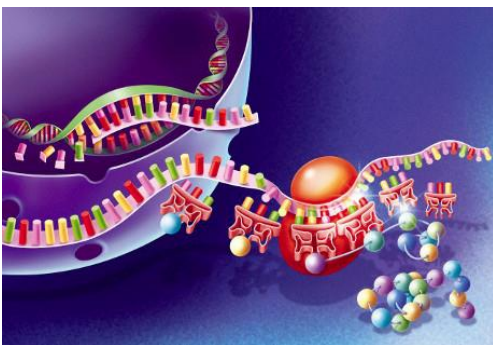


Illustrazione del processo di traduzione dell'informazione genetica contenuta nel DNA (*a sinistra*) in proteine all'interno del ribosoma (*a destra, in arancione*).

Le analisi hanno evidenziato che le strutture evolutivamente più recenti si sono integrate all'interno di quelle più antiche, rimaste sostanzialmente inalterate, analogamente a rami che si dipartono dal tronco di un albero.

L'evoluzione procede cambiando la struttura del ribosoma ma lasciando inalterato ciò che è già presente, e cioè il suo nucleo.

Queste ricerche indicano con forte evidenza che all'inizio della vita ci sia stato un unico organello, detto LUCA

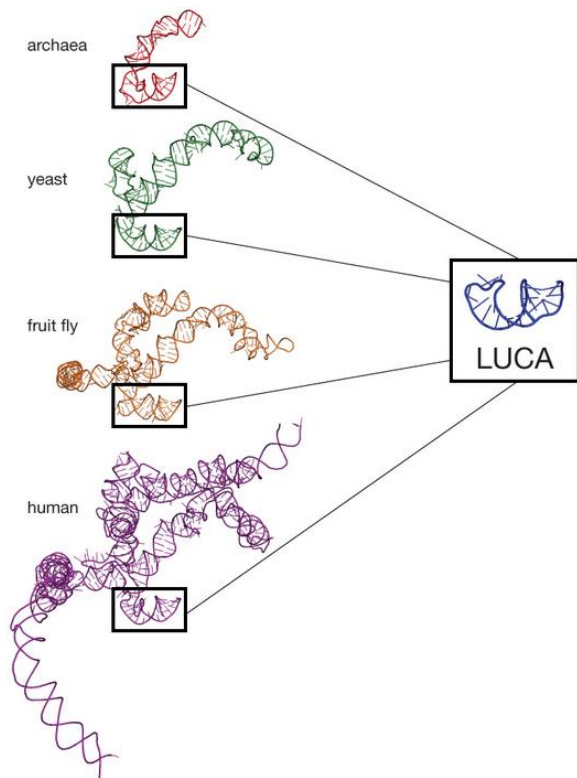


Illustrazione del processo evolutivo dei ribosomi dei diversi organismi viventi, dagli Archea all'essere umano.

Cos'è LUCA

LUCA sta per Last Universal Common Ancestor (“Ultimo antenato comune universale”).

Non è il “primo essere vivente” assoluto, ma l’antenato da cui discendono tutte le forme di vita attuali: batteri, archea e eucarioti.

Batteri, Archaea ed Eucarioti sono i tre principali domini della vita sulla Terra, con differenze fondamentali che li distinguono. I Batteri e gli Archaea sono organismi procarioti (privi di un nucleo definito), mentre gli Eucarioti possiedono un nucleo e organelli interni.

Visse probabilmente tra 3,5 e 4 miliardi di anni fa.

Le prove della sua esistenza sono quindi indirette, ma estremamente convincenti, e provengono principalmente dalla biochimica comparata e dalla genetica. Vediamole.

Il Codice Genetico Universale

Questa è forse la prova più forte. Tutti gli organismi viventi, da un batterio a una balena, usano lo stesso "manuale di istruzioni" genetico. Il DNA è composto da quattro basi (A, T, C, G) che vengono lette a gruppi di tre (i "codoni"). Ogni codone specifica un particolare amminoacido da aggiungere a una proteina. Con pochissime e minori eccezioni, il codone "GCU" codifica per l'amminoacido Alanina in te, in un albero e in un batterio. Questa universalità del codice è una "reliquia" di un antenato comune; se la vita fosse emersa più

volte in modo indipendente, ci aspetteremmo di trovare codici genetici completamente diversi.

1. Biochimica Fondamentale Condivisa

Tutti gli esseri viventi condividono alcuni mattoni e meccanismi biochimici fondamentali:

Stessi Amminoacidi: La vita utilizza un set di circa 20 amminoacidi per costruire le proteine. È significativo che usi solo la loro forma "sinistrorsa" (L-isomeri), e non la loro immagine speculare "destrorsa" (D-isomeri), che pure esiste in natura. Questa specificità (omochiralità) suggerisce una singola origine.

ATP come "Moneta" Energetica: Tutte le cellule utilizzano la molecola di Adenosina Trifosfato (ATP) come principale fonte di energia per le loro reazioni chimiche.

Il Dogma Centrale della Biologia: Il flusso dell'informazione genetica dal DNA all'RNA (trascrizione) e dall'RNA alle proteine (traduzione) è un meccanismo universale.

Ribosomi: Tutti gli organismi usano i ribosomi, macchinari cellulari composti da RNA e proteine, per sintetizzare le proteine. La loro struttura di base è conservata in tutti i regni della vita.

3. La Struttura Cellulare di Base

Tutti gli organismi viventi sono costituiti da cellule delimitate da una membrana lipidica che separa l'interno dall'ambiente esterno, regolando il passaggio di sostanze.

4. Le Prove dalla Filogenetica

Analizzando le sequenze genetiche dei geni che sono essenziali e presenti in tutti gli organismi (come quelli che codificano per l'RNA ribosomiale), i biologi possono costruire "alberi della vita" o alberi filogenetici. Questi alberi mostrano le relazioni evolutive tra le specie. Indipendentemente dai geni utilizzati, tutti questi alberi riconducono a un unico punto di origine, un unico tronco: LUCA.

Caratteristiche ipotizzate

Gli studi genomici e biochimici permettono di fare alcune deduzioni:

Probabilmente era unicellulare.

Aveva RNA e DNA, con sistema genetico e ribosomi per sintetizzare proteine.

Metabolismo anaerobico (non usava ossigeno, che era scarso nell'atmosfera primordiale).

Probabilmente viveva in ambienti ricchi di minerali e calore, come sorgenti idrotermali sottomarine.

Perché LUCA è importante

LUCA ci aiuta a capire quali caratteristiche biologiche siano fondamentali e condivise da tutte le forme di vita.

Funziona come un “punto di riferimento” per studiare l’evoluzione dei geni, dei metabolismi e delle strutture cellulari.

Lo studio di LUCA supporta teorie sull’abiogenesi e sulle condizioni ambientali della Terra primitiva.

Evoluzione dalle Molecole Organiche alle Prime Cellule



L’evoluzione che ha portato dapprima alla comparsa della cellula procariotica, cioè della cellula contenente DNA disperso nel citoplasma, e poi alla cellula eucariotica, il cui DNA è racchiuso nella membrana nucleare, è durata circa due o forse tre miliardi di anni. Molto più rapido è stato il passaggio dagli organismi unicellulari ai pluricellulari vegetali e animali. Infatti i primi fossili di organismi pluricellulari compaiono già abbondanti circa 600 milioni di anni fa con una “staffetta” della massima complessità che va, nel caso degli animali, dagli invertebrati ai vertebrati marini, agli anfibi, ai rettili, ai mammiferi, all’uomo.

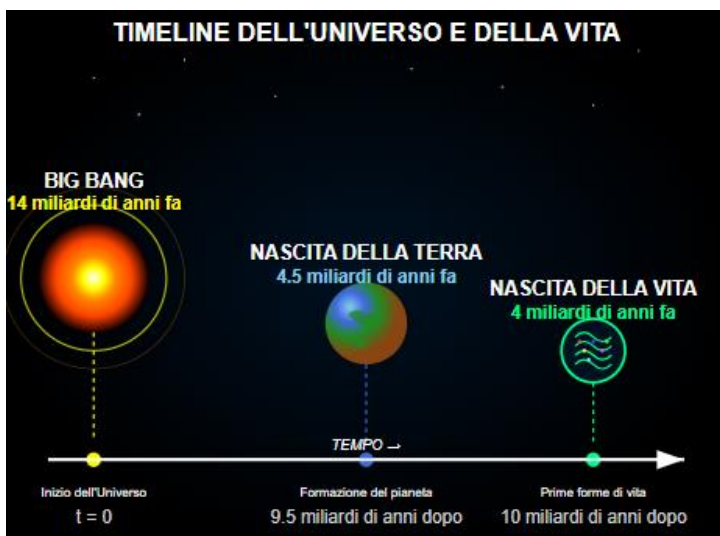
A questo punto LUCA si evolve dando inizio al meraviglioso mondo della vita.

Lo sviluppo della vita



Avventuriamoci ora nella storia di come è avvenuta l'evoluzione della vita sulla Terra? Siamo abituati sempre a pensare al piccolo anfibio che muove i primi passi sulla terra ferma come principale esempio di evoluzione. Prima di arrivare agli eucarioti pluricellulari non sessili, cioè che non sono fissi ad un substrato, l'evoluzione è però passata per innumerevoli stadi biologici, dai primi procarioti unicellulari, fino ad oggi.

Partiamo dalla seguente illustrazione che ci permette di visualizzare tre date importanti.



Partiamo dall'assunto che le prime forme di vita siano comparse sulla Terra tra i 3.5 e 4 miliardi di anni fa. Il nostro pianeta si è formato, come detto, circa 4.5 miliardi di anni fa; tuttavia, le rocce più antiche risalgono a poco meno di 4 miliardi di anni fa. I sedimenti di Isua in Groenlandia hanno 3.8 miliardi di anni, i sedimenti di Akilia sempre in Groenlandia possiedono 3.85 miliardi di anni ed i sedimenti di Pilbara in Australia si stima abbiano tra i 3.5 ed i 3.4 miliardi di anni.



Nella zona del *Greenstone Belt* di Nuvvaggiuq in Canada, che si è ritrovata nel 2008 quella che, al momento, sembra essere la più antica roccia terrestre, formatasi 4,28 miliardi di anni fa.

I primi organismi sono quindi comparsi presumibilmente intorno ai 3.5 e 4 miliardi di anni fa. Le prime tracce indirette della vita sono infatti state ritrovate sulle rocce di Isua e testimoniano la presenza di elementi chimici che sono stati modificati da possibili forme di vita.

Oggi si pensa che i primi organismi vivessero sul fondo di bassi mari caldi nutrendosi di sostanza organica di origine abiotica e direttamente disciolta nel mezzo acquoso. Non sono quindi autotrofi come si potrebbe pensare, ma in un certo modo eterotrofi per sali e composti chimici semplici.

Le più antiche forme di vita descritte sono presumibilmente batteri filamentosi o sferoidali che sono stati ritrovati come fossili nelle formazioni di Pilbara ed in alcune rocce Sud Africane risalenti a circa 3.5 miliardi di anni fa. I primi presunti fossili di monera sono stati ritrovati sempre a Pilbara. Gli esempi migliori di primi organismi risalgono però a 3.5 miliardi di anni fa e si riferiscono alle stromatoliti, ossia delle formazioni fossili costituite da lamine di ossido di silicio impilate create da cianobatteri fotosintetico.



Stromatoliti (Shark Bay, Australia Occidentale)

Secondo alcuni studi di paleomicrobiologia si è scoperta la presenza di alcune catene carboniose derivate probabilmente dalla demolizione ossidativa della clorofilla. Questi organismi presenti in un'epoca così aspra sono stati con una buona probabilità fotosintetizzanti aerobi immettitori di ossigeno e zolfo nell'ambiente.

La comparsa dei primi autotrofi deriva probabilmente dalla crisi dei primi eterotrofi i quali possedevano una richiesta metabolica decisamente superiore rispetto all'offerta di sostanza organica di origine abiotica. Come sono state quindi le prime cellule? Erano procarioti molto semplici in grado di sopravvivere a contatto con un ambiente che oggi probabilmente non permetterebbe la vita di quasi nulla sulla Terra. L'atmosfera era costituita da gas rilasciati dal raffreddamento dei magmi ed era quindi composta da acqua per il 70-95%, anidride carbonica per il 4% e la restante parte divisa in anidride solforosa, zolfo elementare, ammoniaca, acido solfidrico, etc. Ricorda quasi Venere. L'atmosfera primordiale era senza ombra di dubbio riducente. La fotosintesi al contrario di come avviene oggi era condotta a partire da acido solfidrico come donatore di elettroni.



Eoni, Ere, Periodi...

La storia del nostro pianeta è un racconto epico di trasformazioni durato circa 4,6 miliardi di anni, suddiviso dagli scienziati in una scala temporale geologica per organizzarne gli eventi principali. Questa scala è strutturata in unità gerarchiche: eoni, ere, periodi, epoche ed età. Gli studiosi hanno elaborato la seguente suddivisione (non considerando le suddivisioni più “fini”: le epoche e le età). La storia della Terra è divisa in quattro Eoni: l'Adeano, l'Archeano, il Proterozoico e il Fanerozoico. I primi tre sono spesso raggruppati in un'unità informale chiamata Precambriano, che copre quasi il 90% della storia del nostro pianeta.

Adeano
Archeano
Proterozoico } $\Rightarrow$ *Precambriano*
Fanerozoico

Il Fanerozoico (che significa "vita visibile"), è a sua volta suddiviso in tre Ere ben note:

Fanerozoico { *Era paleozoica* (vita antica)
Era Mesozoica (vita di mezzo)
Era Cenozoica (vita recente)

Ogni Era è a sua volta suddivisa in Periodi.

Era Paleozoica (541–252 milioni di anni fa) – 6 periodi:

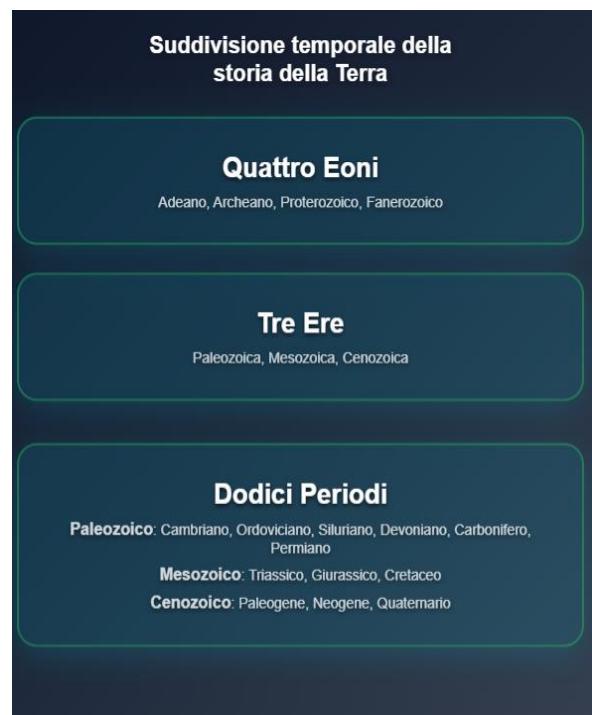
1. Cambriano
2. Ordoviciano
3. Siluriano
4. Devoniano
5. Carbonifero
6. Permiano

Era Mesozoica (252–66 milioni di anni fa) – 3 periodi:

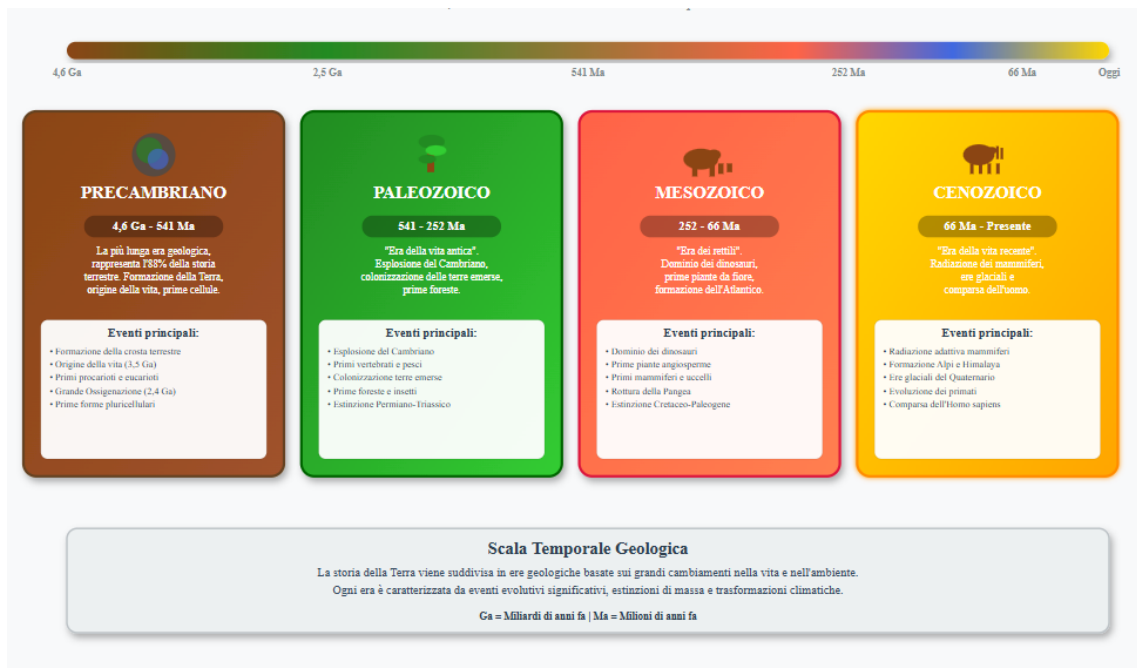
1. Triassico
2. Giurassico
3. Cretaceo

Era Cenozoica (66 milioni di anni fa – oggi) – 3 periodi:

1. Paleogene
2. Neogene
3. Quaternario



Ere Geologiche: un viaggio attraverso la Storia della Terra



L'Eone Adeano: la nascita del Pianeta

Da 4,6 a 4 miliardi di anni fa



L'Adeano, dal greco "Ade" che significa "inferi", fu un'era di violenza cosmica e calore estremo. In questo periodo, la Terra si stava formando per aggregazione di planetesimi e subiva un intenso bombardamento di asteroidi e comete. La superficie era probabilmente un oceano di magma fuso e l'atmosfera primordiale, priva di ossigeno, si formò gradualmente grazie ai gas rilasciati dall'attività vulcanica. Verso la fine di questo eone, il pianeta iniziò a raffreddarsi, permettendo la formazione di una prima crosta solida e la condensazione del vapore acqueo, che diede origine agli oceani. Le rocce di questo periodo sono estremamente rare, ma alcuni cristalli di zirconio ritrovati in Australia Occidentale risalgono a 4,4 miliardi di anni fa.

L'Eone Archeano: l'Alba della Vita

Da 4 a 2,5 miliardi di anni fa



L'Archeano, dal greco "arkhē", che significa "inizio", fu un'epoca cruciale nella storia della Terra. Durante questo intervallo di tempo, la crosta terrestre continuò lentamente a raffreddarsi dopo le violente turbolenze dell'Eone Adeano, dando origine alle prime masse continentali stabili, chiamate cratoni. Questi nuclei rocciosi, piccoli e isolati, sarebbero diventati i semi da cui si sarebbero sviluppati i continenti moderni. Il pianeta appariva molto diverso da come lo conosciamo oggi: i mari primordiali ribollivano di attività chimica e vulcanica, mentre l'atmosfera era ancora priva di ossigeno libero, ricca invece di metano, ammoniaca e anidride carbonica, un miscuglio che creava un cielo probabilmente velato e rossastro.

In questo ambiente apparentemente ostile, circa 3,5 miliardi di anni fa, fecero la loro comparsa i primi organismi viventi: i procarioti, cellule semplici e prive di nucleo, simili ai batteri moderni. Queste forme di vita minuscole ma straordinariamente resilienti impararono presto a sfruttare le risorse disponibili. Alcuni si nutrivano di composti chimici disciolti nell'acqua, mentre altri, i cianobatteri, svilupparono una capacità rivoluzionaria: la fotosintesi. Attraverso questo processo riuscivano a catturare l'energia solare e a produrre ossigeno come sottoprodotto.

All'inizio, quell'ossigeno veniva immediatamente assorbito dai minerali presenti negli oceani e nelle rocce, ma col passare del tempo cominciò ad accumularsi nell'atmosfera. Questo lento ma inesorabile cambiamento aprì la strada a quella che, centinaia di milioni di anni dopo, sarebbe stata la "Grande Ossidazione", un evento che trasformò radicalmente la chimica del pianeta e preparò il terreno per forme di vita più complesse.

Le tracce più antiche di questa attività biologica ci arrivano sotto forma di stromatoliti, strutture sedimentarie a strati prodotte dai tappeti microbici dei cianobatteri. Questi fossili viventi sono una testimonianza diretta delle prime comunità organizzate di microbi e, sorprendentemente, alcune formazioni simili sopravvivono ancora oggi in ambienti estremi, come nelle lagune costiere dell'Australia occidentale. Guardando queste strutture si ha quasi l'impressione di osservare un

“ritratto” del mondo di miliardi di anni fa.

Anche le rocce dell'Archeano ci raccontano molto: le più antiche formazioni esposte sulla superficie terrestre, datate fino a 3,8-4 miliardi di anni, sono per lo più di origine metamorfica e vulcanica, segno che la Terra era ancora un pianeta in continuo fermento. Eruttazioni, catene di isole vulcaniche e mari ricchi di ferro caratterizzavano il paesaggio, un ambiente primordiale che fornì il laboratorio naturale per le prime sperimentazioni della vita.

L'Archeano, quindi, non fu soltanto un eone di rocce e vulcani: fu soprattutto il tempo in cui la vita mosse i suoi primi, timidi passi, gettando le basi per la lunga e affascinante storia evolutiva che avrebbe portato, miliardi di anni dopo, alla comparsa degli animali, delle piante e infine dell'uomo.

L'Eone Proterozoico: un Mondo che cambia

Da 2,5 miliardi a 541 milioni di anni fa



Il Proterozoico, che significa "prima vita animale", fu testimone di due eventi cruciali: l'aumento dell'ossigeno nell'atmosfera e la comparsa di forme di vita più complesse. L'ossigeno prodotto dai cianobatteri iniziò ad accumularsi, trasformando radicalmente l'atmosfera e portando all'estinzione di molti organismi anaerobici, per i quali l'ossigeno era tossico. Questo evento, noto come la "Grande Ossidazione", permise lo sviluppo di organismi aerobi, che utilizzano l'ossigeno per produrre energia. Durante questo eone, si formò e si frammentò un supercontinente chiamato Rodinia. Verso la fine del Proterozoico, comparvero i primi organismi eucarioti, dotati di un nucleo cellulare, e successivamente i primi organismi pluricellulari, come la misteriosa fauna di Ediacara.

Riassumendo le caratteristiche di questi tre Eoni – il Precambriano- possiamo dire che con l'aumento della disponibilità di acqua inizia a prendere piede la fotosintesi ossigenica, ma sfortunatamente grazie alla presenza nell'ambiente di grosse quantità di ferro, viene impedito l'aumento di ossigeno atmosferico. A partire da due miliardi di anni fa iniziano a comparire le prime *red beds* ossia composti

di ossidi di ferro trivalente (limonite) che permettono la diffusione dell'ossigeno in atmosfera. Il ferro prima disciolto nell'acqua di mare in forma bivalente e ferrosa si trasforma progressivamente in ferro trivalente grazie alla lenta diffusione dell'ossigeno. Si formano ossidi di ferro idrati insolubili che precipitano e si accumulano insieme agli ossidi di silice sul fondale oceanico.

In questo ambiente proliferano i batteri fotosintetici ed i procarioti chemiosintetici. Questi ultimi sono i primi a fissare l'azoto ad ammoniaca. Si pensa che i procarioti chemiosintetici siano stati i primi organismi aerobi. La respirazione ossigenica è infatti comparsa solo quando la concentrazione di ossigeno atmosferico ha raggiunto il punto di Pasteur, ossia 1/100 dell'attuale concentrazione. L'aumento progressivo di ossigeno ha prodotto una grande estinzione di massa. La Terra si è quindi trovata di fronte alla cosiddetta “*crisi dell'ossigeno*” responsabile della più grande estinzione avvenuta sul nostro pianeta.

L'atmosfera cambia, il vapor acqueo condensa e si formano le nubi. Iniziano le grandi piogge e compaiono le prime neviccate e glaciazioni. L'anidride carbonica e l'anidride solforosa presenti nell'atmosfera intrappolano l'energia infrarossa proveniente dal Sole, e così facendo aumenta la temperatura della Terra di 33 gradi centigradi, si passa da una media di -18 gradi Celsius a +15 gradi Celsius. L'aumento dell'effetto serra scalda per cui il pianeta rendendolo più ospitale. Durante queste fasi di metamorfosi atmosferica sul nostro pianeta spopolano organismi con forti somiglianze con gli attuali cianobatteri fotosintetici. Si sviluppano nel frattempo i primi organismi eucarioti, planctonici, eterotrofi morfologicamente simili agli attuali dinoflagellati. Compaiono quindi gli acritarchi. Organismi di questo tipo provengono probabilmente da processi di simbiosi mutualistica tra organismi procarioti come proposto dalla teoria endosimbiotica sull'origine del mitocondrio il quale presenta un DNA simile a quello batterico.



Rappresentazione artistica del Precambriano in cui è visibile la densa atmosfera e l'aspetto inospitale dei suoli.

Non è ancora presente la respirazione cellulare, tutti gli organismi sono decompositori o eucarioti fotosintetici. Dopo un miliardo di anni dagli eventi che stiamo descrivendo, quindi intorno ad 1-1.3 miliardi di anni fa compare la respirazione cellulare. Si chiude il ciclo del carbonio. Con l'aumento delle rese energetiche compare anche la pluricellularità. Questo fenomeno permette di possedere una

maggiore stabilità strutturale e maggiore funzionalità. Aumentano le dimensioni, aumentano le capacità rigenerative con conseguente aumento della vita media, gli organismi si specializzano, si dividono i compartimenti, si formano gli organi, i tessuti, etc. I primi fossili interpretati come animali appartengono ai chitinozoi e sono stati rinvenuti in Arabia e Groenlandia.

Il più antico fossile di animale pluricellulare di cui si ha certezza è stato però scoperto in Australia meridionale ed è stato datato tra i 670 ed i 580 milioni di anni fa. Risale al Precambriano e si riferisce ad un organismo dal corpo molle medusoide il quale potrebbe essere l'antenato degli attuali Cnidari, Ctenofori, Anellidi, Artropodi ed Echinodermi.

L'Eone Fanerozoico: L'Esplosione della Vita Visibile

Da 541 milioni di anni fa ad oggi

Il Fanerozoico, che significa "vita visibile", è l'eone in cui viviamo e in cui la vita animale e vegetale si è diversificata in modo esplosivo. È suddiviso in tre ere principali: Paleozoica, Mesozoica e Cenozoica.

Scheda riassuntiva dei quattro Eoni

Eone	Periodo Milioni di anni	Eventi particolari	Specie dominante
ADEANO	4600 – 4000	Formazione della Terra, raffreddamento crosta, comparsa delle prime acque.	Nessuna forma di vita certa
ARCHEANO	4000 – 2500	Prime forme di vita procariote (batteri e archeobatteri), comparsa dei primi stromatoliti.	Procarioti
PROTEROZOICO	2500 – 541	Grande Ossidazione, prime cellule eucariote, primi organismi pluricellulari.	Procarioti Eucarioti
FANEROZOICO	541 – oggi	Esplosione Cambriana, sviluppo piante e animali, conquista delle terre emerse, grandi estinzioni, comparsa dei mammiferi e dell'uomo.	Invertebrati Vertebrati Mammiferi

Le Ere del Fanerozoico

Era Paleozoica: La Vita Conquista il Pianeta

(Da 541 a 252 milioni di anni fa)



L'era Paleozoica, o "vita antica", iniziò con la cosiddetta "esplosione cambriana", un periodo di rapida diversificazione evolutiva in cui comparvero quasi tutti i principali phyla animali oggi conosciuti. I mari brulicavano di vita, con organismi come trilobiti, brachiopodi e pesci primitivi. Durante il Paleozoico, la vita iniziò a colonizzare anche le terre emerse: comparvero le prime piante terrestri, seguite da insetti, anfibi e rettili. I continenti, inizialmente frammentati, si riunirono gradualmente per formare il supercontinente Pangea. Quest'era si concluse con la più grande estinzione di massa della storia della Terra, l'estinzione del Permiano-Triassico, che spazzò via circa il 96% delle specie marine e il 70% di quelle terrestri.

Era Mesozoica: l'Era dei Dinosauri

(Da 252 a 66 milioni di anni fa)



Conosciuta come l'"era di mezzo". L'Era Mesozoica, iniziata circa 252 milioni di anni fa e durata fino a 66 milioni di anni fa, rappresenta uno dei capitoli più affascinanti della storia della Terra. Viene spesso ricordata come "l'età dei dinosauri", ma fu molto più di questo: un lungo arco temporale in cui il pianeta cambiò profondamente aspetto, sia dal punto di vista geologico che biologico.

Durante il Mesozoico, la Terra attraversò un periodo di clima generalmente caldo, con mari più estesi rispetto a oggi e vaste aree ricoperte da foreste rigogliose. La disposizione dei continenti non era

ancora quella attuale: si stavano lentamente separando da un'unica grande massa, e questo movimento influenzava la formazione di catene montuose, bacini oceanici e nuove coste.

Dal punto di vista della vita, fu un'epoca di straordinaria diversificazione. I dinosauri dominarono le terre emerse, occupando nicchie ecologiche molto diverse, dai piccoli predatori agili fino ai giganteschi erbivori. Accanto a loro prosperavano rettili marini di grandi dimensioni, come ittiosauri e plesiosauri, e nei cieli volavano i primi vertebrati alati, i pterosauri. Le piante subirono un'importante trasformazione: alle grandi foreste di conifere e felci si affiancarono le prime piante a fiore, che cambiarono radicalmente gli ecosistemi terrestri.

Ma il Mesozoico non fu solo il tempo dei giganti. In questo periodo comparvero anche forme di vita più piccole e apparentemente marginali, come i primi mammiferi e gli antenati degli uccelli. Questi gruppi, pur restando secondari rispetto ai dinosauri, gettarono le basi per l'evoluzione che avrebbe caratterizzato l'era successiva.

L'Era Mesozoica si concluse con una delle più celebri estinzioni di massa della storia: un evento improvviso e catastrofico che cancellò gran parte della vita allora esistente, inclusi i dinosauri non aviani. Tuttavia, questa fine drammatica aprì la strada a nuove opportunità evolutive e permise ai mammiferi di assumere un ruolo da protagonisti.

In sintesi, il Mesozoico fu un'era di trasformazioni profonde, un lungo equilibrio tra stabilità climatica e dinamismo geologico, tra la potenza dei grandi rettili e la comparsa silenziosa di forme di vita che avrebbero costruito il mondo moderno.

Era Cenozoica: l'Era dei Mammiferi, fino ad oggi (Da 66 milioni di anni fa ad oggi)



L'era Cenozoica, o "vita recente", è l'Era in cui viviamo. L'era Cenozoica è l'ultima delle grandi ere geologiche della storia della Terra, iniziata circa 66 milioni di anni fa, subito dopo l'estinzione di massa che segnò la fine dei dinosauri, e continua ancora oggi. È spesso chiamata anche "l'era dei mammiferi", perché questi animali, fino ad allora rimasti in secondo piano rispetto ai grandi rettili

del Mesozoico, poterono espandersi e diversificarsi enormemente.

Il Cenozoico viene suddiviso in tre grandi periodi: Paleogene, Neogene e Quaternario. Durante il Paleogene i continenti iniziarono ad assumere una disposizione più simile a quella attuale; comparvero molti gruppi di mammiferi moderni e si svilupparono i primi grandi predatori. Nel Neogene si affermarono gli antenati delle specie attuali, tra cui i primati, mentre le praterie si estesero favorendo erbivori come cavalli e bovidi. Il Quaternario, iniziato 2,6 milioni di anni fa, è il periodo delle grandi glaciazioni e dell'evoluzione del genere *Homo*, fino all'*Homo sapiens*.

Dal punto di vista climatico, il Cenozoico è caratterizzato da un progressivo raffreddamento del pianeta: dalle condizioni più calde e umide del Paleogene, si passò a cicli glaciali e interglaciali nel Quaternario, che plasmarono paesaggi e ecosistemi.

In sintesi, il Cenozoico è l'era in cui il mondo naturale ha assunto l'aspetto che conosciamo oggi: i continenti si sono spostati nelle loro posizioni attuali, le catene montuose più giovani (come l'Himalaya e le Alpi) si sono sollevate, e soprattutto si è compiuta la lunga e complessa storia dell'evoluzione umana, è comparso il genere *Homo* e infine la nostra specie, *Homo sapiens*.

I Periodi del Paleozoico

Cambriano

Durante il Cambriano (570 milioni di anni fa) incrementa la diversità delle forme di vita sulla Terra. Compaiono i primi organismi dotati di scheletri esterni ed interni. Questo apparato porta a vantaggi morfo-meccanici consentendo una miglior capacità di movimento e migliori capacità difensive ed offensive. La Pangea si frammenta separandosi principalmente in Laurasia e Gondwana.

I continenti vengono invasi dalle acque, si formano vasti mari tropicali poco profondi. Grazie a queste condizioni ambientali si ha l'esplosione del Cambriano (i trilobiti sono i più famosi rappresentanti di questa era geologica). Si trovano tanti fossili grazie alla presenza di uno scheletro in grado di fossilizzare. Il mondo vegetale è rappresentato esclusivamente da alghe come quelle verdi, quelle rosse e le Glaucofite caratteristiche delle acque dolci. Per avere una maggiore differenziazione vegetale bisogna attendere l'Ordoviciano con la comparsa delle Euglenofite, gli Eteroconti (come le Diatomee) ed i Dinoflagellati. Verso la fine del Cambriano la temperatura diminuisce e le forme di vita variano.



L'esplosione delle forme di vita del Cambriano.

Ordoviciano

Durante l'Ordoviciano sulla Terra si possono osservare quattro grandi aree emerse, il Gondwana, l'Europa, il Nord America e l'Asia. Si formano grandi mari epicontinentali. Compaiono le prime scogliere coralline con coralli tabulati e rugosi. Durante il medio Ordoviciano si ha la contrazione dei mari interni che determina la comparsa di vaste aree asciutte. Compaiono i molluschi come Bivalvi e Cefalopodi, compaiono gli Echinodermi, i Briozoi ed i Brachiopodi. Insieme ai coralli coesistono numerose alghe rosse calcaree ed alghe verdi calcaree. Compaiono anche i primi pesci primitivi agnati, sprovvisti di pinne ma con lunghe code flessibili.

Nel mondo vegetale prima unicellulare compaiono i primi organismi pluricellulari coloniali. Scompaiono progressivamente i cianobatteri e gli organismi vegetali tentano di colonizzare le terre emerse. Il fallimento di questa conquista da parte di vegetali si ha a causa di un'altra estinzione di massa causata probabilmente da una glaciazione che ha provocato l'abbassamento del livello dei mari con conseguente riduzione di tutti gli habitat marini. L'85% delle forme di vita scompare.



Alcuni fossili risalenti all'Ordoviciano

Siluriano

Nel Siluriano si sviluppano tutti quegli organismi legati alle barriere coralline. Continua l'evoluzione dei vertebrati. Dagli agnati compaiono i primi pesci dotati di mascelle mobili. Compaiono i placodermi. La presenza di una bocca mobile causa una forte pressione selettiva che favorisce l'aumento delle dimensioni. Il pianeta si riscalda. Grazie al clima mite del Siluriano compaiono le prime piante terrestri dotate di fusti di sostegno. Il più antico fossile di pianta vascolare, ossia *Cooksonia*, appartiene proprio a questo periodo storico.

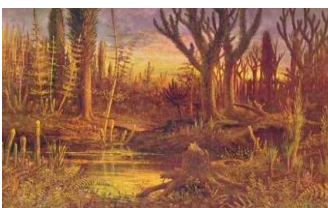


Cooksonia

Devoniano

Le piante, grazie ai climi sempre più permissivi, conquistano sempre di più le terre emerse. Compaiono le prime felci, le quali avranno il loro periodo di massima espansione nel Carbonifero. Le Equisetofite colonizzano i suoli. Per quanto riguarda le forme di vita animali nei mari si differenziano le Ammoniti, i Molluschi, i Cefalopodi predatori ed i primi pesci derivanti dai Placodermi. Si delineano i pesci ossei ed i pesci cartilaginei, in quelli ossei si possono ritrovare il Paleoniscoidi, i Crossopterigi (antenati degli anfibi) ed i Dipnoi (pesci polmonati).

Grazie alla presenza di nuove nicchie ecologiche terrestri si ha una spinta evolutiva sui vertebrati marini che li fa spostare verso le terre emerse. Dai Crossopterigi probabilmente originano i primi tetrapodi terrestri. Il tegumento ricoperto di scaglie si modifica per diventare impermeabile alla perdita dei liquidi interni. Compaiono quindi i primi anfibi. Il Devoniano si conclude con una estinzione di massa a causa di una glaciazione causata forse da una serie di impatti asteroidale sulla crosta terrestre. La vita sulla Terra rimane decimata.



Ricostruzione dell'ambiente Devoniano

Carbonifero e Permiano

Il Carbonifero viene definito in molti modi, “il periodo degli Anfibi”, “l’era degli Insetti”, etc. La vita non è più strettamente legata all’acqua. Laurasia e Gondwana collidono per formare Pangea II e si forma l’oceano della Tetide. Si crea un clima caldo-umido che consente lo sviluppo di estese foreste. L’ossigeno in atmosfera aumenta vertiginosamente. Con l’estinzione del Devoniano si ha la propulsione per il grande sviluppo delle piante vascolari dotate di spore, si hanno grandi equiseti e numerose felci arboree. In tutto questo compare il seme e si hanno piante di grandi dimensioni le quali costituiscono grandi foreste che fanno da rifugio a numerose specie animali. Tra gli artropodi proliferano Araneane (ragni), Chilopodi (centopiedi), Diplopodi (millepiedi), Scorpionidi (scorpioni), etc. Compaiono le prime forme alate appartenenti agli Odonati (libellule). Si ha una forte radiazione evolutiva nell’ambiente aereo probabilmente favorita dalla mancanza di competizione.



Incisione raffigurante la flora del Carbonifero

Durante il Permiano si ha lo sviluppo dei rettili, si consolidano invece le felci a semi per quanto riguarda il mondo vegetale. Compaiono i Medullosales, ossia piccoli alberi con fusto eretto, grandi foglie e granuli pollinici enormi. Compaiono le Glossopteridales, Voltziales e Cordaitales, sempre più simili agli attuali alberi. Il Permiano si conclude con una grande estinzione di massa, la metà delle famiglie di invertebrati marini si estingue, i trilobiti scompaiono, molti molluschi e brachipodi vengono decimati.

La causa di questa catastrofe ecologica è probabilmente dovuta ad un impatto di un grosso asteroide sulla crosta terrestre. L’impatto sollevando probabilmente una grande quantità di polveri ha oscurato il pianeta. Crollano le temperature e si formano piogge acide corrosive. Aumenta l’acidità del suolo, non si ha luce, etc. di conseguenza scompaiono le piante. Spariscono quasi tutte le specie arboree. Gli

erbivori vengono decimati causando forti ritorzioni su tutta la catena trofica. Diradate le nubi la luce solare torna libera di irradiare il suolo e le acque, tuttavia, la grande decomposizione derivante dalla moria di specie animali e vegetali causa un forte incremento dell'anidride carbonica in atmosfera. Si ha un intenso effetto serra con conseguente riscaldamento globale per diversi milioni di anni.

I Periodi del Mesozoico

Triassico

Come già visto l'era Mesozoica segna grandi modifiche nella vita sulla Terra (Flora e Fauna). Si ha l'espansione del mondo dei rettili e dei dinosauri. Si suddivide in Triassico (comparsa dei dinosauri), Giurassico (loro massima espansione) e Cretaceo (estinzione dei dinosauri). Dal punto di vista floristico il Triassico ha visto la presenza di alcuni taxa di felci a seme come le Caytoniales, piccoli alberi con foglie palmato-composte. Tutta l'era Mesozoica è stata caratterizzata dalla presenza delle Cycadofite, ad oggi diffuse prevalentemente nell'emisfero australe. Possiedono fusti molto corti non ramificati con foglie persistenti.

Nascono sempre durante il Triassico le Ginkgofite di cui oggi rimane solo *Ginkgo biloba* e nascono anche le prime conifere. Tra i vegetali ancora diffusi oggi compaiono anche lo *Gnetum*, un genere che comprende circa 30 specie di piante arboree e lianose con foglie grandi e coriacee e *Welwitschia* con un solo rappresentante *W. Mirabilis*. Questa vive sulla costa del deserto della Namibia ed è caratterizzata da un fusto sotterrato nella sabbia. Compaiono anche probabilmente le prime piante a fiore a causa della pressione selettiva per favorire la propria riproduzione. I vegetali iniziano a servirsi degli animali per permettere il susseguirsi delle generazioni.

Giurassico

Tra il Triassico ed il Giurassico si ha un'estinzione di massa la quale colpisce principalmente i rettili tra i quali i grandi Terapsidi e molti anfibi. Circa l'84% dei bivalvi e dei molluschi si estingue. Iniziano ad evolversi i dinosauri che diventano il gruppo dominante sulla Terra. Durante il Giurassico (210-140 milioni di anni fa) si ha una buona stabilità climatica. Nel mondo vegetale compaiono le angiosperme. Con l'aumento delle piante compaiono anche numerose specie di

animali erbivori e compaiono anche numerosi meccanismi chimici per difendersi da questi.

Cretaceo

Si frammentano definitivamente i supercontinenti. La Laurasia va alla deriva verso nord ed il blocco dell'America e del Sud Africa si stacca dal blocco dell'Australia-Antartide. L'India si avvicina all'equatore ed il Madagascar si stacca dall'Africa. Gli oceani si estendono al di sopra dei continenti e formano mari bassi in molte parti del mondo. Si originano anche le grandi catene montuose come, ad esempio, le Ande. La collisione dell'India con l'Asia meridionale dà origine alla catena dell'Himalaya, si formano nel frattempo anche le montagne europee che creano nuove nicchie ecologiche. I poli liberi dai ghiacci permettono la distribuzione dei rettili a sangue freddo anche ad alte latitudini.

Il Cretaceo si chiude con l'estinzione KT, in questo evento scompaiono il 40% dei generi degli organismi marini mentre sulla terra scompare quasi il 99% della totalità degli organismi viventi. Nei mari le specie più colpite sono quelle dei foraminiferi, delle spugne e dei ricci di mare. Scompaiono completamente i grandi rettili dominanti come il Plesiosauro, il Mosasaur e l'Ittiosauro. Sulla terra scompaiono i dinosauri, i rettili e numerosi mammiferi con dimensioni maggiori di qualche decina di chilogrammi. Nel mondo vegetale scompaiono le grandi foreste del mesozoico. Sopravvivono le felci più piccole e le specie pioniere. Secondo Walter Alvarez, premio Nobel per la fisica, questa estinzione è stata dovuta all'impatto di un grande asteroide di 10 Km di diametro. L'impatto ha innescato un incendio planetario sollevando una monolitica nube nell'atmosfera ricca di iridio che oscurando il cielo ha impedito la fotosintesi, facendo crollare piante, erbivori e di conseguenza carnivori.



Rappresentazione dell'impatto meteorico che ha causato l'estinzione KT

I Periodi del Cenozoico

Paleogene



Da 65 milioni di anni fa a circa 1.8 milioni di anni fa si ha l'era Cenozoica. Viene denominata anche periodo dei mammiferi in quanto si assiste ad una grande radiazione di questi animali. Gli uccelli sostituiscono lentamente i rettili. Il clima passa da caldo tropicale a glaciazioni con una tendenza progressiva. Nel Paleocene i mari riprendono vita, ricompaiono le spugne, i briozoi, i coralli, i crinoidi ed i macro-foraminiferi. Nella flora marina compaiono nuove specie di alghe calcaree. Si ha la grande espansione delle angiosperme. le conifere iniziano a competere con le angiosperme arboree. Ancora una volta proliferano i mammiferi nelle foreste tropicali piovose. Si formano le pianure, i deserti, le savane, etc. Nel Miocene si ha una grande variazione della biodiversità. Si formano piccoli bacini salati.

Neogene



Continuo sollevamento delle catene montuose (Himalaya, Alpi, Ande). Formazione dell'istmo di Panama (fine del Pliocene), con forti effetti sul clima. Clima inizialmente caldo-umido, ma progressivamente più secco e freddo. Grande diversificazione dei mammiferi (in particolare erbivori e carnivori moderni). Espansione delle praterie a scapito delle foreste tropicali. Diffusione e diversificazione dei primati, con i primi ominidi (ad es. Australopithecus).

Quaternario

Periodo segnato da cicli glaciali e interglaciali. Modellamento del paesaggio da parte dei ghiacciai (morene, laghi glaciali, fiordi). Nel corso dell'Olocene: clima più stabile e sviluppo delle civiltà umane. Presenza di grandi mammiferi pleistocenici (mammut, rinoceronti lanosi, megafauna), molti dei quali estinti.

Il Quaternario è l'ultima delle ere geologiche e inizia circa 2,58 milioni di anni fa: in pratica è l'epoca più recente della storia della Terra, quella in cui viviamo tutt'oggi. È suddiviso in due periodi principali: il Pleistocene (fino a circa 11.700 anni fa) e l'Olocene, che rappresenta l'intervallo attuale.

Una delle caratteristiche più evidenti del Quaternario sono i forti cambiamenti climatici: cicli glaciali e interglaciali si sono alternati più volte, con grandi masse di ghiaccio che si espandevano e ritiravano dai continenti. Questi eventi hanno modellato profondamente i paesaggi (catene montuose levigate dai ghiacciai, valli a U, depositi morenici) e hanno influenzato la distribuzione delle specie viventi.

Dal punto di vista biologico, il Quaternario è importantissimo perché segna la comparsa e l'evoluzione del genere Homo. È in quest'epoca che i nostri antenati hanno imparato a usare strumenti, dominare il fuoco, sviluppare il linguaggio e infine costruire le prime civiltà. L'Olocene, con il suo clima relativamente stabile, ha reso possibile la nascita dell'agricoltura e delle società complesse.

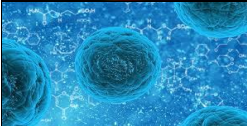
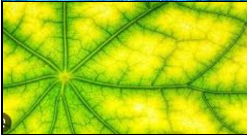
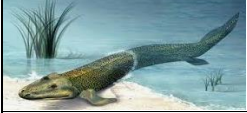
Il Quaternario non è quindi solo una "fase geologica", ma il contesto naturale e ambientale in cui si è svolta l'intera storia dell'umanità. È un periodo dinamico, segnato da oscillazioni climatiche, estinzioni di grandi mammiferi (come i mammut) e dall'impronta sempre più evidente della nostra specie.

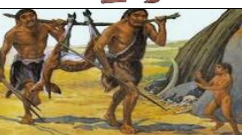


Scheda riassuntiva delle tre Ere del Fanerozoico con i loro Periodi

Era	Periodo (Milioni di anni)	Eventi particolari	Specie dominante
PALEOZOICA (o Primaria)	Cambriano 570–505	“Esplosione Cambriana”: comparsa di tutti i principali gruppi di invertebrati.	Invertebrati
	Ordoviciano 505–438	Sviluppo della vita marina, primi pesci senza mascelle.	Invertebrati e Pesci primitivi
	Siluriano 438–408	Prime piante terrestri e artropodi sulla terraferma.	Pesci
	Devoniano 408–360	“Età dei pesci”, compaiono i primi anfibi.	Pesci e Anfibi
	Carbonifero 360–286	Grandi foreste, primi rettili, deposito di carbone fossile.	Anfibi e Rettili primitivi
	Permiano 286–245	Continenti riuniti in Pangea, grande estinzione di massa.	Rettili
MESOZOICA (o Secondaria)	Triassico 245–208	Comparsa dei dinosauri e dei primi mammiferi.	Rettili (dinosauri)
	Giurassico 208–144	Dominio dei grandi dinosauri, primi uccelli.	Rettili
	Cretaceo 144–65	Diffusione delle piante a fiore, estinzione dei dinosauri alla fine.	Rettili, poi Mammiferi
CENOZOICA (o Terziaria + Quaternaria)	Paleogene 65–23	Grande sviluppo dei mammiferi e delle piante a fiore.	Mammiferi
	Neogene 23–2	Comparsa dei primi ominidi, forti cambiamenti climatici.	Mammiferi
	Quaternario 2– oggi	Evoluzione del genere Homo, glaciazioni, civiltà umana.	Uomo

La seguente illustrazione mostra tutte le principali tappe evolutive

	Evento	Data di riferimento (anni fa)
	Si forma la Terra	4.5 miliardi
	Prima forma di vita (cellule procariote)	3.8 miliardi
	Inizio fotosintesi	2.5 miliardi
	Prime cellule eucariote	2 miliardi
	Primi organismi pluricellulari (alghe rosse...)	1.2 miliardi
	Primi organismi animali (spugne, meduse...)	600 milioni
	Atmosfera respirabile	600 milioni
	Primi vegetali (felci, equiseti...)	450 milioni
	Primi artropodi (trilobiti...)	450 milioni
	Primi anfibi	450 milioni
	Primi rettili	350 milioni

	Prime piante (conifere...)	300 milioni
	Primi dinosauri	230 milioni
	Primi mammiferi	200 milioni
	Scomparsa dei dinosauri	66 milioni
	Compare il genere Homo	2 milioni
	Homo sapiens	250 000
	Nasce la civiltà	10 000
	Nasce la scrittura – Inizia la Storia	5 000

Se comprimessimo i 4.5 miliardi di anni della vita della Terra in un solo anno

Avremo la seguente corrispondenza:

1 giorno ~12,33 milioni di anni

1 mese ~ 375 milioni di anni

E' suggestivo allora riscrivere le tappe principale dell'evoluzione come se tutto fosse accaduto durante un solo anno: il calendario della vita!

Gennaio		Febbraio		Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	
1	Formazione	1		1	1	1	1	1	Inizio della
2	della Terra	2		2	2	2	2	2	fotosintesi
3	4,5 miliardi di anni fa	3		3	3	3	3	3	
4		4		4	4	4	4	4	
5		5		5	5	5	5	5	
6		6		6	6	6	6	6	
7		7		7	7	7	7	7	
8		8		8	8	8	8	8	
9		9		9	9	9	9	9	
10		10		10	10	10	10	10	
11		11		11	11	11	11	11	
12		12		12	12	12	12	12	
13		13		13	13	13	13	13	
14		14		14	14	14	14	14	
15		15		15	15	15	15	15	
16		16		16	16	16	16	16	
17		17		17	17	17	17	17	
18		18		18	18	18	18	18	
19		19		19	19	19	19	19	
20		20		20	20	20	20	20	
21		21		21	21	21	21	21	
22		22		22	22	22	22	22	
23		23		23	23	23	23	23	
24		24		24	24	24	24	24	
25		25	Comparsa della	25	25	25	25	25	
26		26	vita	26	26	26	26	26	
27		27	prime cellule	27	27	27	27	27	
28		28	procariote	28	28	28	28	28	
29		29	3,8 miliardi di anni fa	29	29	29	29	29	
30				30	30	30	30	30	Prime cellule
31				31		31		31	eucariote
									2 miliardi di anni fa

Agosto	Settembre	Ottobre		Novembre		Dicembre	
1	1	1	Primi organismi pluricellulari (alghe rosse, ...)	1		1	
2	2	2		2		2	Primi rettili
3	3	3		3		3	350 milioni di anni fa
4	4	4		4	Atmosfera respirabile (composizione attuale)	4	
5	5	5		5		5	
6	6	6		6		6	Prime piante (conifere,...)
7	7	7		7		7	
8	8	8		8	Primi organismi animali	8	300 milioni di anni fa
9	9	9		9		9	
10	10	10		10	spugne, meduse...	10	
11	11	11		11	600 milioni di anni fa	11	
12	12	12		12		12	
13	13	13		13		13	Primi dinosauri
14	14	14		14		14	250 milioni di anni fa
15	15	15		15		15	
16	16	16		16	Prime forme vegetali	16	Primi mammiferi
17	17	17		17	(felci, equiseti...)	17	200 milioni di anni fa
18	18	18		18		18	
19	19	19		19	primi artropodi	19	
20	20	20		20	(Trilobiti)	20	
21	21	21		21	450 milioni di anni fa	21	
22	22	22		22		22	
23	23	23		23		23	
24	24	24		24		24	
25	25	25		25		25	
26	26	26		26	Primi anfibi	26	
27	27	27		27	400 milioni di anni fa	27	Scomparsa dei dinosauri
28	28	28		28		28	66 milioni di anni fa
29	29	29		29		29	
30	30	30		30		30	
31		31				31	ore 20:00 genere Homo
							ore 23:40 Homo Sapiens
							200 000 anni fa

Questa suggestiva immagine racchiude visivamente tutto il percorso evolutivo della vita sulla Terra.

Eone	Adeano	Archeano	Proterozoico	Fanerozoico																
Era	Precambriano 			Paleozoico						Mesozoico			Cenozoico							
Periodo				Cambriano	Ordoviciano	Siluriano	Devoniano	Carbonifero	Permiano	Triassico	Giurassico	Cretaceo	Neogene		Quaternario					
Epoca														Paleocene	Eocene	Oligocene	Miocene	Pliocene	Pleistocene	Olocene
Milioni di anni fa				4500	543	490	439	409	354	290	245	206	144	65	55,8	33,9	23	5,3	2,6	0,01

Tutto quanto detto fino a questo momento ci fa capire quanto sia stata complessa l'evoluzione degli organismi viventi sulla Terra; si sono susseguite diverse specie con le più disparate morfologie e caratteristiche chimiche-fisiche-meccaniche, etc. Lo studio della vita sul nostro pianeta è quindi argomento complesso che si serve di tutti i campi di studio per poter essere compresa.

Alla fine, la storia dell'evoluzione è la storia di un'unica, grande famiglia. Ogni creatura, dal più piccolo microbo all'essere umano, porta in sé l'eco di un antenato comune, un legame invisibile che unisce tutta la vita sulla Terra in un meraviglioso arazzo biologico."

Guardando all'incredibile diversità del mondo vivente, diventa chiaro che le differenze tra le specie sono solo variazioni su un tema antico, scritto nel linguaggio universale del DNA, a testimonianza della nostra profonda e condivisa eredità.

Siamo tutti foglie dello stesso albero della vita, sospese nel respiro del mondo e nutrite dalle radici che affondano nel tempo. Riconoscere questa verità apre il cuore al mistero che tutto avvolge, facendoci sentire parte di una storia più grande di noi, guidata da un ordine invisibile che carezza ogni creatura e ogni istante della creazione.

Piccolo compendio della storia evolutiva dell'uomo

a cura di Giancarlo Buccella



Il Dio che ha plasmato e fatto la terra e l'ha resa stabile, l'ha creata non come orrida regione ma l'ha plasmata perché fosse abitata. (Is 45, 18)

Premessa

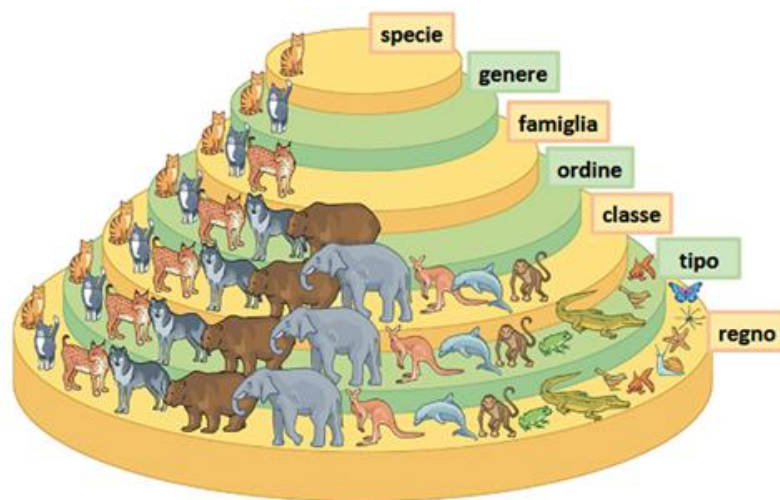
Sulla Terra è presente una grande varietà di organismi viventi. Per poterli distinguere è necessario classificarli cioè ordinarli secondo caratteristiche simili. E'utile perciò introdurre questo articolo con il ricordare il concetto di Tassonomia.

La tassonomia (dal greco: τάξις, tàxis, ordinamento e νόμος, nòmos, norma o regola) è la disciplina che si occupa della classificazione gerarchica di elementi viventi o inanimati. Tale metodo **di** classificazione introdotto a partire dal 1735 da Carl von Linné (italianizzato in Linneo). Prevede che sulla base di alcuni caratteri guida (Linneo scelse per le piante il sistema riproduttivo) si possano raggruppare gli organismi per similitudine, così da creare una gerarchia di insiemi via via più vasti.

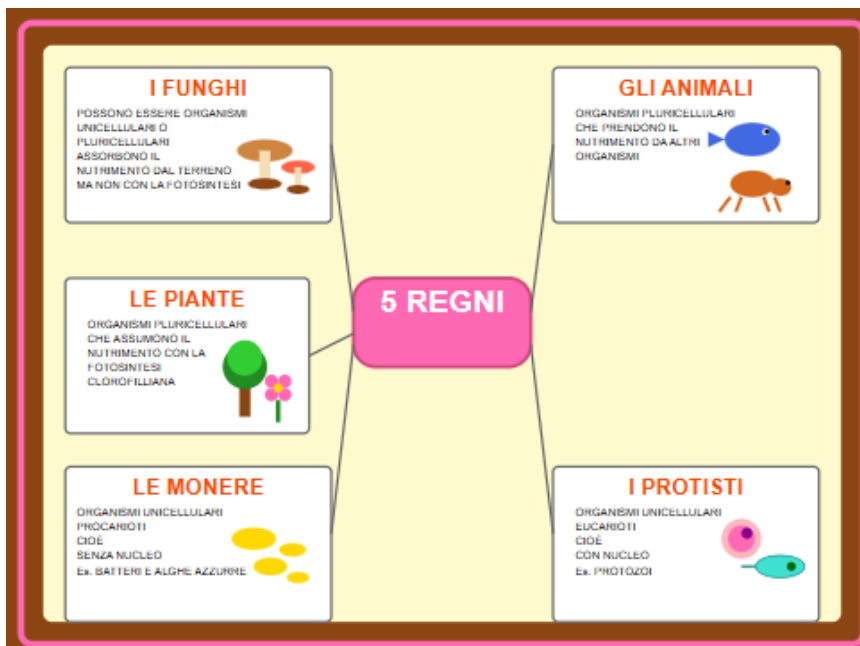
Linneo definisce la specie come base della sistematica: una specie è formata dagli organismi simili nel corpo e nel comportamento che si incrociano liberamente fra loro e hanno figli. Egli introduce la nomenclatura binomia: una specie è definita con due nomi in corsivo: il primo con l'iniziale maiuscola, indica il genere, il secondo con l'iniziale minuscola indica la specie. Ad esempio: *Felis margarita* indica che il genere di appartenenza del gatto è *Felis*, mentre, quel gatto in particolare, appartiene alla specie *margarita*.

La tassonomia di Linneo classifica gli esseri viventi in differenti livelli gerarchici, iniziando originariamente da quello di regno, quindi phylum (tipi), classi, ordini, famiglie, generi e specie.

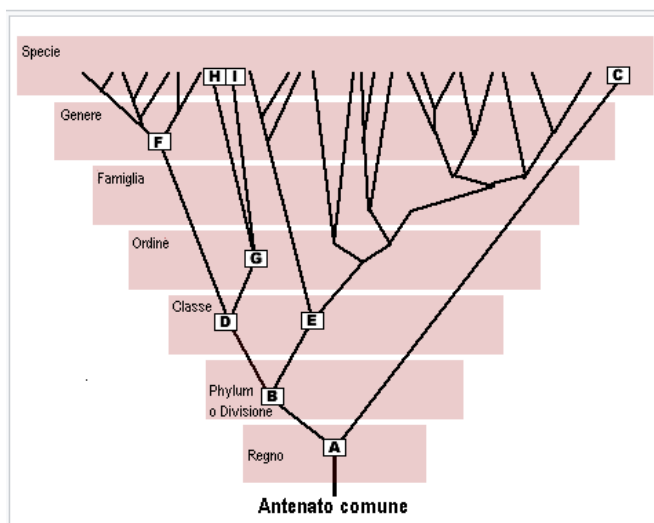
- specie,
- genere,
- famiglia,
- ordine,
- classe,
- tipo (o *phylum*),
- regno.



Fino a qualche tempo fa la prima classificazione era il Regno che veniva diviso in: funghi, protisti, monere, piante e animali, come si vede dalla immagine seguente.



Con la seguente illustrazione invece si evidenzia visivamente come l'evoluzione partendo da un unico antenato comune si diversifichi in tutta la varietà di esseri viventi presenti sulla Terra.



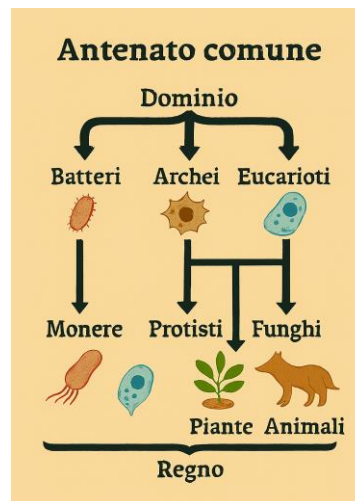
Negli anni '90 Carl Woese e colleghi proposero di aggiungere un livello tassonomico sopra il regno, chiamato dominio. Secondo la classificazione attuale ci sono tre domini principali:

Bacteria → i classici batteri;

Archaea → microrganismi procarioti con caratteristiche uniche, spesso estremofili;

Eukarya → tutti gli organismi con cellule eucariotiche (animali, piante, funghi, protisti).

Il dominio rappresenta dunque la più grande suddivisione della vita conosciuta, basata soprattutto su differenze molecolari e strutturali profonde (per esempio il tipo di membrana cellulare, la struttura dell'RNA, i meccanismi di trascrizione e traduzione del DNA).



La seguente illustrazione mostra la numerosità di ogni gruppo.



Introduzione

L'esistenza umana, nella sua complessità e nella sua profonda capacità di interrogarsi, è il risultato di un viaggio straordinario iniziato milioni di anni fa. Questo lavoro si propone di esplorare l'alba dell'umanità, ripercorrendo le tappe cruciali che hanno trasformato un primate africano nell'Homo sapiens, l'essere pensante e creatore che popola oggi il pianeta.

Ci addentreremo nelle savane africane di milioni di anni fa, dove le prime scimmie antropomorfe intrapresero il difficile, ma decisivo, passo verso il bipedismo. Seguiremo l'evoluzione dei nostri antenati, dagli agili Australopitechi, primi a camminare eretti, fino all'emergere dell'Homo habilis, il "primo fabbricatore" di strumenti, che diede inizio alla nostra inseparabile relazione con la tecnologia. Esploreremo l'avventura dell'Homo erectus, il "viaggiatore" che per primo lasciò l'Africa, imparò a dominare il fuoco e gettò le basi per una struttura sociale più complessa. Infine, giungeremo all'Homo neanderthalensis, nostro cugino estinto, e al trionfo dell'Homo sapiens, la specie che ha ereditato il mondo grazie alla sua unica combinazione di innovazione, adattabilità e una capacità simbolica senza precedenti.

Comprendere questa "preistoria" non è solo uno studio del passato, ma una chiave per riconoscere le radici profonde della nostra identità, della nostra intelligenza e della nostra intrinseca tendenza a creare, a esplorare e a dare significato al mondo.

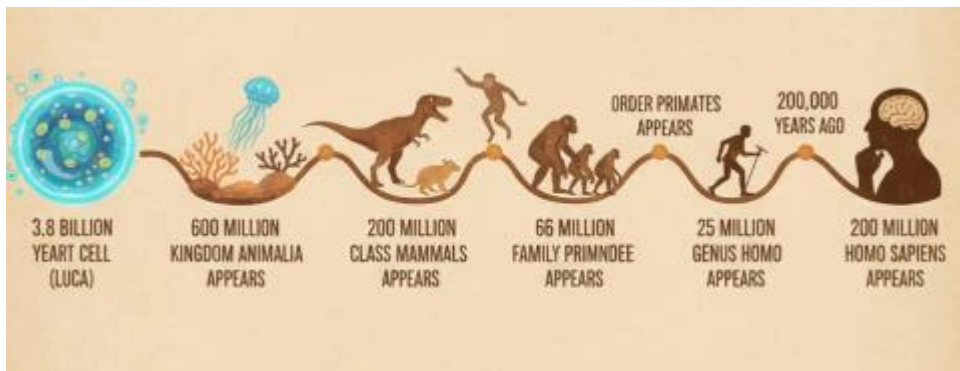
Partiamo dalla classificazione completa di Homo Sapiens.

Dominio: Eukarya **Regno:** Animalia **Phylum:** Chordata **Classe:** Mammalia
Ordine: Primates **Famiglia:** Hominidae **Genere:** Homo **Specie:** *Homo sapiens*

Questa classificazione indica che gli esseri umani sono organismi eucarioti, animali con una spina dorsale, mammiferi con ghiandole mammarie e placentati, appartenenti all'ordine dei primati con occhi frontali e visione stereoscopica, e alla famiglia degli ominidi con cervello sviluppato.

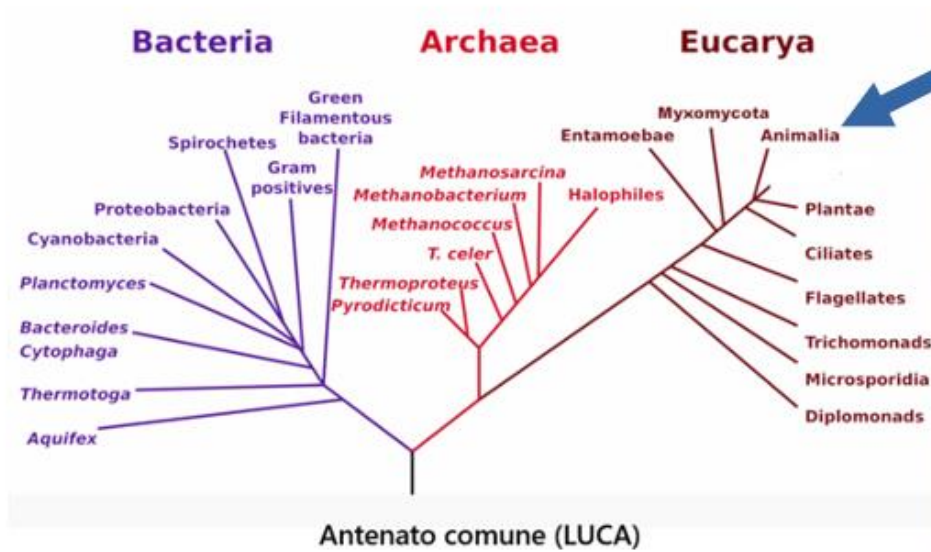
Il percorso temporale di tale processo evolutivo è stato il seguente.

Prima cellula	3.8 miliardi di anni fa
compare il Regno degli Animalia	600 ml di anni
compare la Classe dei Mammiferi	200 ml di anni fa
compare l'Ordine dei Primati	60 ml di anni fa
compare la Famiglia degli Hominidae	25 ml di anni fa
compare il Genere Homo	2 ml di anni fa
compare Homo Sapiens	300 000 - 200 000 anni fa



Dominio Eucarya - 2 miliardi di anni fa

Dall'antenato comune, indicato in gergo LUCA (acronimo di Last Universal Common Ancestor, ossia Ultimo Antenato Comune Universale), il quale non era il primo organismo vivente in assoluto, ma è l'ultimo dal quale discendono tutti gli organismi oggi conosciuti, si sono sviluppati tre domini.



Ma questa suddivisione non è avvenuta contemporaneamente.



Nascita dei Bacteria: gli antenati dei batteri moderni si sono evoluti lungo un percorso separato. Le stime indicano che l'antenato comune di tutti i batteri odierni circa 3.8 miliardi di anni fa.



Successivamente, il ramo che si era già separato dai Bacteria si è diviso a sua volta, dando origine ai domini degli Archaea e degli Eucarya. Gli Archaea, spesso considerati "batteri antichi" per il loro aspetto e per la capacità di vivere in ambienti estremi, gli studi genetici mostrano che gli Archaea sono in realtà più strettamente imparentati con gli Eucarioti che con i Batteri. L'antenato comune di tutti gli archei attuali è vissuto circa 3.5 miliardi di anni fa.



Nascita degli Eucarya: Il dominio a cui apparteniamo (insieme a piante, funghi e protisti) si è distinto come una linea evolutiva separata. Le prime cellule eucariote, caratterizzate da una struttura interna complessa e da un nucleo, sono emerse più tardi, con prove fossili che suggeriscono un'origine tra 2.2 e 1.6 miliardi di anni fa.

Regno Animalia - 600 milioni di anni fa



Il Regno Animalia (o Metazoa) comprende tutti gli animali pluricellulari, organismi eterotrofi che si nutrono di materia organica, in grado di muoversi (almeno in una fase della vita) e con cellule prive di parete cellulare. Questi rappresentano la prima forma di vita pluricellulare complessa di cui abbiamo testimonianza. Le prime forme animali riconoscibili arrivano nel circa 600 milioni di anni fa con la comparsa delle spugne.



Successivamente arrivarono anche le Dickinsonia.

Dal regno *Animalia*, comparso circa 600 milioni di anni fa, si sono diversificati i mammiferi circa 200 milioni di anni fa.

Classe Mammiferi - 200 milioni di anni fa

I mammiferi, non sono comparsi di colpo (Natura non facit saltus), ma si sono evoluti a partire dai terapsidi, un gruppo di rettili simili a mammiferi vissuti oltre 250 milioni di anni fa.



Il primo vero *mammifero* riconosciuto dagli scienziati è spesso identificato con Morganucodon, un piccolo animaletto vissuto circa 205 milioni di anni fa.

Era grande più o meno come un topolino, notturno, insettivoro, e aveva già tutte le caratteristiche tipiche dei mammiferi: peli, ghiandole mammarie (probabilmente), ossicini dell'orecchio medio derivati dalle ossa della mandibola, metabolismo più attivo rispetto ai rettili.

Nonostante ciò, i primi mammiferi erano molto piccoli e per decine di milioni di anni rimasero “nell'ombra” dei dinosauri, vivendo di notte e cacciando insetti. Solo dopo l'estinzione dei dinosauri (65 milioni di anni fa) poterono diversificarsi e diventare i mammiferi moderni che conosciamo.

Ordine Primati - 60 milioni di anni fa

Ad un certo punto in questa linea evolutiva appaiono i *Primati*. I primi fossili di quelli che sono inequivocabilmente veri primati (chiamati anche Euprimati) datano intorno ai 60 milioni di anni fa.

Essi avevano:

Mani e Piedi Prensili: con pollici e alluci opponibili per afferrare i rami.

Unghie Piatte: la sostituzione degli artigli con unghie piatte permetteva una presa più sensibile e precisa.

Visione Stereoscopica: gli occhi si spostano in posizione frontale, garantendo una percezione della profondità molto migliore, fondamentale per la vita arboricola (saltare tra i rami).

Cervello più Grande: un aumento relativo delle dimensioni del cervello rispetto al corpo, associato a un'intelligenza maggiore.

Minore enfasi sull'olfatto: il muso si riduce e l'area del cervello dedicata all'olfatto diminuisce, a favore di quella dedicata alla vista.



Questi primi primati si divisero in due grandi gruppi: gli Adapiformi (simili ai lemuri attuali)



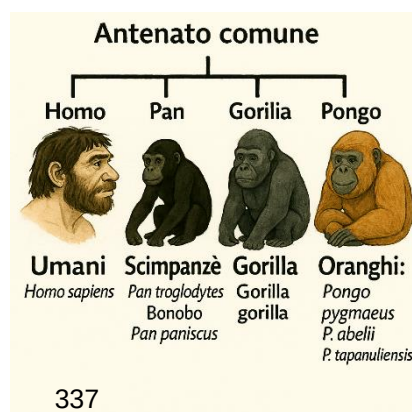
e gli Omomiformi (simili ai tarsi attuali), dai quali poi si sarebbe evoluta la linea che avrebbe portato alle scimmie.

Famiglia Hominidae (Ominidi) - 15 milioni di anni fa

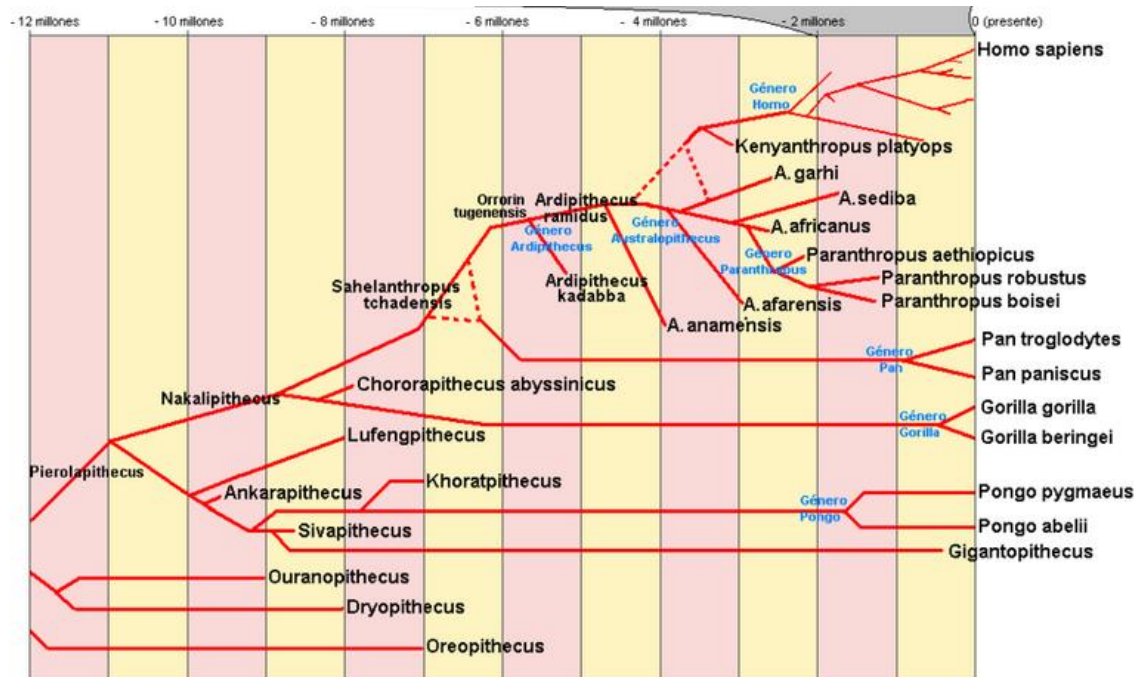
Dagli Omomiformi si sono evoluti gli ominidi, tenendo sempre presente che si tratta di un lungo percorso evolutivo con molte ramificazioni e tappe intermedie, e non un percorso lineare.

Gli ominidi comprendono “oggi” (come si vede dalla figura) quattro generi: ominini, scimpanzé, gorilla e oranghi.

Famiglia	Hominidae (Ominidi)
Genere <i>Homo</i>	Umani
Genere <i>Pan</i>	Scimpanzé e Bonobo
Genere <i>Gorilla</i>	Gorilla
Genere <i>Pongo</i>	Oranghi



La seguente illustrazione mostra che il cammino evolutivo a partire dall'antenato comune dei quattro generi non è stato un processo lineare, ma un percorso complesso, fatto di intrecci, diramazioni e rami che si sono estinti.



Caratteristiche della famiglia Hominidae: Corpo robusto, senza coda. Cervello grande rispetto al corpo. Braccia lunghe e mobilità della spalla (adatte ad arrampicarsi sugli alberi). Comportamenti sociali complessi.

L'antenato comune a questi quattro generi oggi viventi della famiglia degli Ominidi (*Homo*, *Pan*, *Gorilla* e *Pongo*) è stato un primate che viveva in Africa circa 13-14 milioni di anni fa.



Non abbiamo un nome specifico per questo antenato comune, poiché si tratta di una specie estinta che si trova alla base dell'albero filogenetico che ha poi portato alla ramificazione di tutti gli Ominidi attuali. Purtroppo non abbiamo ancora nessun reperto fossile al riguardo. È importante notare che le stime precise sulla datazione possono variare leggermente tra i diversi studi scientifici, ma l'intervallo di 13-14 milioni di anni fa è generalmente accettato come il periodo in cui viveva l'ultimo antenato comune di tutti gli Ominidi (grandi scimmie e umani).

È importante notare che la divaricazione nel ramo evolutivo degli ominidi che porta ai quattro generi attualmente presenti non è avvenuta contemporaneamente, ma ha seguito questo andamento temporale.

Circa 12-16 milioni di anni fa: separazione degli Oranghi.

Il primo gruppo a separarsi dalla linea evolutiva principale che avrebbe poi condotto agli altri ominidi fu quello degli oranghi (genere *Pongo*). Per questo motivo, sono considerati i "cugini" più lontani dell'essere umano tra le grandi scimmie.

Circa 8-10 milioni di anni fa: separazione dei Gorilla

Successivamente, la linea evolutiva, partendo sempre dall'antenato comune, si è nuovamente divisa, portando ai gorilla (genere *Gorilla*). Analisi geochimiche e datazioni radiometriche suggeriscono che questa divergenza sia avvenuta circa 10 milioni di anni fa.

Circa 5-7 milioni di anni fa: separazione degli Scimpanzé e degli Ominini

L'ultima grande separazione dall'antenato comune è avvenuta tra la linea evolutiva che ha portato all'uomo (genere *Homo*) e quella che ha portato agli scimpanzé e ai bonobo (genere *Pan*). Studi genetici indicano che questa divergenza si è verificata in un periodo compreso tra i 5 e i 7 milioni di anni fa. Tuttavia, alcune ricerche suggeriscono che il processo di separazione potrebbe essere stato complesso e più esteso nel tempo, con stime che variano fino a 13 milioni di anni fa.

Successivamente ogni gruppo ha intrapreso un proprio percorso evolutivo, adattandosi ad ambienti e stili di vita differenti.

Riassumendo possiamo dire che, secondo la scansione temporale vista, da un antenato comune, un ramo ha portato agli oranghi, un altro ai gorilla, un altro agli scimpanzé e ai bonobo, ed infine un altro agli ominini, che alla fine è sfociato nell' *Homo sapiens*.

Tra i primi ominini conosciamo *Sahelanthropus tchadensis* e, successivamente, generi come *Ardipithecus* e *Australopithecus* (a cui appartiene la famosa Lucy). Questi nostri antenati erano già bipedi, ma non sono ancora classificati nel genere *Homo*.

- Il Cambiamento decisivo: il bipedismo. La caratteristica fondamentale che definisce questa nuova linea è la capacità di camminare su due gambe. Questo adattamento offriva vantaggi cruciali nella savana (vedere più lontano, trasportare cibo, avere le mani libere).
- I Primi Ominini (o presunti tali): i fossili più antichi che mostrano segni di bipedismo includono:
 - *Sahelanthropus tchadensis* (circa 7 milioni di anni fa)
 - *Orrorin tugenensis* (circa 6 milioni di anni fa)
 - *Ardipithecus* (tra 5.8 e 4.4 milioni di anni fa), che mostrava una forma di bipedismo ma conservava ancora forti adattamenti per arrampicarsi sugli alberi.

Il passo successivo è stato la comparsa del genere degli *Australopithecini* circa 4 milioni di anni fa. Gli Australopithecini ("scimmia del sud") rappresentano il primo gruppo di ominidi di cui abbiamo prove significative. Pur mantenendo ancora caratteristiche primitive simili alle scimmie antropomorfe (come un cervello relativamente piccolo), si distinguono per un'innovazione rivoluzionaria: il bipedismo.

Australopithecus anamensis: vissuto circa 4 milioni di anni fa, è considerato il più antico australopiteco conosciuto. I resti fossili, tra cui una tibia, mostrano chiari segni di bipedismo, sebbene probabilmente si muovesse ancora con agilità anche tra gli alberi.

Australopithecus afarensis: l'*Australopithecus afarensis*, datato tra 4 e 3 milioni di anni fa, è la specie più famosa, grazie soprattutto al ritrovamento dello scheletro quasi completo di "Lucy" in Etiopia. Lucy, con le sue ginocchia valghe, il bacino corto e largo e le impronte di Laetoli, ha fornito prove inconfutabili di un bipedismo abituale ed efficiente. Sebbene il suo cervello fosse poco più grande di quello di uno scimpanzé (circa 400-500 cm³), la capacità di camminare eretta fu un punto di svolta.

Australopithecus africanus e Robustus: ramo laterale o evoluzione? L'Australopithecus africanus (3-2 milioni di anni fa) mostrava caratteristiche leggermente più evolute, con un cranio più arrotondato e denti più piccoli. I Paranthropus (spesso erroneamente inclusi tra gli Australopithecus robusti, come P. robustus e P. boisei), vissuti circa 3 milioni di anni fa, svilupparono un'enorme muscolatura masticatoria e denti massicci, specializzandosi in una dieta di vegetali duri. Sono considerati un ramo collaterale dell'evoluzione umana, destinato all'estinzione senza lasciare discendenti diretti verso il genere Homo.

L'Importanza del Bipedismo: Vantaggi e Conseguenze

Il bipedismo, la capacità di camminare su due piedi, non fu solo un cambiamento fisico, ma una vera e propria rivoluzione evolutiva.

Vantaggi: liberò le mani, permettendo di trasportare cibo, attrezzi o piccoli. Espose una minore superficie corporea ai raggi solari diretti, riducendo il surriscaldamento. Offrì una visione più ampia della savana, utile per individuare predatori o risorse.

Conseguenze: richiese profonde modifiche scheletriche (bacino, femore, piedi, colonna vertebrale), che ebbero anche un costo, rendendo il parto più difficile. Tuttavia, questo adattamento fu la preconditione per lo sviluppo successivo di altre capacità, come la manipolazione e, infine, la fabbricazione di strumenti.

È importante notare che la ricerca paleoantropologica è in continua evoluzione e nuove scoperte fossili e analisi genetiche possono portare a raffinare queste datazioni.

Sia l'uomo che le scimmie antropomorfe, gli oranghi e i gorilla discendono da un antenato comune vissuto nel lontano passato, ribadiamo ancora una volta che essi sono quattro rami distinti attaccati ad un unico ramo più grande, il quale a sua volta è attaccato al ramo ancora più grande dei primati e così via a ritroso fino ad arrivare alla prima cellula ancestrale.

Genere Homo - 2.5 milioni di anni fa

Nella linea evolutiva degli Australopitechi, ad un certo punto divenne imperativo diventare più flessibili e adattabili. Invece di specializzarsi su un tipo di cibo, questi ominini ampliarono la loro dieta, includendo una risorsa nuova e ricca di energia: la carne e il midollo (ottenuti probabilmente tramite lo sciacallaggio di carcasse).

Per fare questo, il processo evolutivo sviluppò due elementi chiave interconnessi:

1. L'uso di strumenti: iniziarono a fabbricare sistematicamente i primi strumenti di pietra (cultura Olduvayana) per tagliare la carne, spezzare le ossa e accedere al midollo.
2. L'espansione cerebrale (Encefalizzazione): la dieta più ricca di proteine e grassi fornì l'energia necessaria per sostenere un cervello più grande e costoso dal punto di vista metabolico. Si innescò un circolo virtuoso: un cervello più grande permetteva di creare strumenti migliori e sviluppare strategie più complesse, che a loro volta davano accesso a cibo migliore, favorendo un cervello ancora più grande.

Il risultato: la nascita del genere Homo (circa 2.8 - 2.4 milioni di anni fa)



Punto di arrivo: da questa linea di Australopitechi "generalisti" emerge la prima specie del nostro genere, l'Homo habilis ("uomo abile").

Caratteristiche distintive di Homo habilis rispetto agli Australopitechi:

Cervello più grande: Circa 650 cm³, un aumento di quasi il 50% rispetto alla media degli Australopitechi.
Denti più piccoli: La dieta più ricca e l'uso di strumenti per processare il cibo ridussero la necessità di un apparato masticatorio potente.
Associazione con strumenti di pietra: È il primo ominino a cui viene associata in modo definitivo la produzione di utensili.

Homo Habilis: Il "Fabbrikatore" di Strumenti

L'Homo habilis, il cui nome significa "uomo abile" o "capace di usare gli strumenti", rappresenta una delle prime specie del genere Homo e un anello fondamentale nell'evoluzione umana. Vissuto circa 2,4-1,6 milioni di anni fa, è stato identificato per la prima volta negli anni '60 nella Gola di Olduvai, in Tanzania, da Louis e Mary Leakey.

Distribuzione Geografica: Africa orientale e meridionale (principalmente Tanzania, Kenya, Etiopia, Sudafrica).

Caratteristiche Fisiche:

Altezza e Peso: Mediamente più piccolo rispetto all'Homo erectus, con un'altezza stimata di circa 1,3 metri e un peso di 30-40 kg. La sua capacità cranica era maggiore rispetto agli Australopitechi, variando tra 500 e 800 cm³, suggerendo un aumento delle capacità cognitive. Il volto era meno prognato (meno sporgente) rispetto ai suoi predecessori, con arcate sopracciliari meno marcate.

La fronte era più sviluppata, indicando una maggiore espansione dei lobi frontali del cervello.

- Dentatura: Denti più piccoli rispetto agli Australopitechi, specialmente molari e premolari, indicando una dieta più varia e meno basata su cibi duri e fibrosi.

- **Postura e Locomozione:** Era bipede, anche se la sua andatura poteva essere meno efficiente di quella delle specie successive. Le proporzioni degli arti mostrano ancora caratteristiche adatte all'arrampicata, suggerendo che trascorresse del tempo sugli alberi.
- **Mano:** Le mani presentano una maggiore destrezza e una presa di precisione più sviluppata, essenziale per la fabbricazione degli strumenti.

Tecnologia Litica: La caratteristica più distintiva dell'*Homo habilis* è la sua associazione con la cultura Olduvaiana (o Modo 1). Questo include la produzione dei primi strumenti in pietra intenzionalmente scheggiati, come i *chopper* (ciottoli scheggiati su uno o due lati per creare un bordo tagliente). Scopo degli Strumenti: utilizzati per tagliare carne, rompere ossa per estrarre il midollo, lavorare il legno o raschiare pelli.

La Cultura Olduvaiana. La caratteristica distintiva dell'*Homo habilis* è l'associazione con la tecnologia Olduvaiana. Questi erano semplici strumenti in pietra, come i *chopper* (ciottoli scheggiati per creare un bordo tagliente). Nonostante la loro apparente semplicità, la produzione di questi strumenti richiedeva una pianificazione e una destrezza manuale superiori a quelle dei primati precedenti.

Dieta e stile di vita: l'*Homo habilis* era un onnivoro opportunist. Usava i suoi strumenti per tagliare la carne dalle carcasse animali (probabilmente come scavenger piuttosto che cacciatore), rompere le ossa per il midollo, e lavorare vegetali. Questa capacità di accedere a nuove fonti di cibo fu cruciale per il suo sviluppo.

Dieta: Era onnivoro. Sebbene non fosse un cacciatore efficiente, era un opportunist e un "scavenger" (spazzino), che si nutriva di carcasse animali, frutta, radici e altri vegetali. L'uso degli strumenti gli permise di accedere a risorse alimentari non disponibili per altri primati.

Organizzazione Sociale: Si ritiene visse in gruppi sociali, probabilmente per difesa dai predatori e per la cooperazione nella ricerca di cibo. Non ci sono prove dirette di strutture abitative complesse.

Linguaggio: Sebbene non avesse un linguaggio articolato come il nostro, l'aumento della capacità cranica e la complessità degli strumenti suggeriscono lo sviluppo di forme rudimentali di comunicazione e pianificazione.

Significato nell'Evoluzione Umana: l'*Homo habilis* è cruciale perché:

1. È il primo membro riconosciuto del genere *Homo*, segnando un punto di svolta rispetto agli Australopithecini.
2. È il primo ominide a produrre e usare sistematicamente strumenti in pietra, dando il via all'Età della Pietra (Paleolitico). Questa innovazione fu fondamentale per la sua sopravvivenza e per l'evoluzione futura.
3. La sua capacità cranica aumentata e lo sviluppo di abilità manuali indicano un avanzamento cognitivo significativo.

Estinzione: L'*Homo habilis* fu gradualmente sostituito e probabilmente soppiantato da specie più avanzate del genere *Homo*, come l'*Homo erectus/ergaster*, che emerse circa 1,9 milioni di anni fa con capacità cognitive e tecnologiche superiori.

Homo Erectus (e Homo Ergaster): Il Conquistatore del Mondo

L'*Homo erectus* ("uomo eretto"), apparso circa 1,9 milioni di anni fa e sopravvissuto fino a circa 110.000 anni fa (o anche più tardi in alcune regioni), è una delle specie più longeve e di successo del genere *Homo* (come si vede nella tabella alla fine di questo paragrafo). Molti studiosi distinguono una forma africana più antica, *Homo ergaster*, da quella asiatica, *Homo erectus sensu stricto*. Esso rappresenta un importante passaggio tra i primi ominidi come l'*Homo habilis* e l'*Homo sapiens*. Il suo nome, "uomo eretto", deriva dalla sua postura completamente verticale, che segnava una differenza significativa rispetto ai suoi antenati più primitivi.

L'*Homo erectus* aveva capacità cranica di circa 1000 cm³ e possedeva denti di forma simile a quelli dell'uomo moderno. Era capace di fabbricarsi attrezzi, di costruirsi ripari sotto la roccia e di controllare il fuoco. È probabile che l'*Homo erectus* abbia fatto del focolare un centro di vita sociale, riunendosi attorno al fuoco con i compagni per scambiare esperienze o per organizzare la vita del gruppo. Ciò ha favorito la nascita di nuove e complesse facoltà psichiche. La scoperta del fuoco (circa 1.5 milioni di anni fa) e probabilmente i ponti di terra formatisi per il ritiro delle acque del mare durante la prima glaciazione avrebbero inoltre favorito la migrazione dell'*Homo erectus* verso l'Oriente e verso l'Europa, dove sarebbe giunto circa 800.000 anni fa.

L'*Homo erectus* aveva un corpo robusto e ben proporzionato, simile al nostro, con arti lunghi e adattati alla deambulazione e alla corsa su lunghe distanze. Il cranio era più grande rispetto agli ominidi precedenti, con una capacità cranica tra i 900 e i 1200 cm³, indice di un cervello più sviluppato e di abilità cognitive superiori. La fronte era bassa, con arcate sopraccigliari marcate e volto allungato. Nonostante queste caratteristiche primitive, la sua anatomia gli permetteva di sopravvivere in diversi ambienti e di cacciare efficacemente.

Uno degli aspetti più interessanti dell'*Homo erectus* riguarda l'uso di strumenti. Questa specie perfezionò il modello acheuleano, una tecnica litica più avanzata rispetto agli strumenti di pietra scheggiata dei predecessori. I bifacciali, strumenti a forma di lama o di cuore, indicano una capacità di pianificazione e di progettazione che ci avvicina alle abilità degli esseri umani moderni.

Altri comportamenti significativi includono la possibilità di uso del fuoco, come suggeriscono alcune evidenze archeologiche in Africa e in Asia, e la vita in gruppi sociali complessi, probabilmente organizzati in clan. Questo suggerisce che l'*Homo erectus* non fosse solo un cacciatore e raccoglitore, ma anche un essere capace di cooperazione e trasmissione di conoscenze.

L'*Homo erectus* fu la prima specie umana a lasciare l'Africa e a colonizzare gran parte dell'Eurasia. I resti fossili sono stati rinvenuti in Africa, Europa, Medio Oriente e Asia orientale, evidenziando una notevole adattabilità climatica e ambientale. Questa espansione rappresenta un passo fondamentale nella storia evolutiva, poiché mostra come i nostri antenati abbiano iniziato a confrontarsi con nuovi ambienti e sfide.

In sintesi, l'*Homo erectus* rappresenta un vero e proprio "pioniere" dell'evoluzione umana. La sua capacità di camminare eretto, l'uso avanzato di strumenti e del fuoco, insieme alla diffusione geografica, lo rendono una figura chiave per comprendere il percorso che ha portato all'*Homo sapiens*. Studiare questa specie significa osservare da vicino i primi passi verso la complessità e la cultura che caratterizzano la nostra specie oggi.

Homo Heidelbergensis: un Ponte tra Erectus e Neanderthal/Sapiens

L'*Homo heidelbergensis*, vissuto tra 700.000 e 200.000 anni fa in Africa ed Europa, è considerato il diretto antenato sia dell'uomo di Neanderthal che dell'*Homo sapiens*. Presentava una capacità cranica ancora maggiore (1100-1400 cm³) e una struttura corporea robusta. È associato a tecniche di caccia più avanzate (come l'uso di lance in legno) e all'inizio della fabbricazione di strumenti più complessi.

Specie Homo Sapiens - 250 000 anni fa

Gli ultimi 250.000 anni della preistoria sono dominati dalla presenza di due grandi specie umane, l'*Homo neanderthalensis* e l'*Homo sapiens*, che per un certo periodo hanno condiviso gli stessi territori e interagito.

Homo Neanderthalensis: il nostro cugino Europeo



L'uomo di Neanderthal, apparso circa 300.000 anni fa e scomparso circa 40.000 anni fa, è una specie enigmatica e affascinante, a lungo ingiustamente denigrata. Si sviluppò principalmente in Europa e Asia occidentale, adattandosi ai climi freddi delle ere glaciali.

I Neanderthal erano caratterizzati da una corporatura robusta e muscolosa, arti corti e un cranio allungato con fronte sfuggente, grandi arcate sopracciliari e una protuberanza occipitale ("chignon"). Avevano un cervello grande, in media anche leggermente superiore a quello del *Sapiens* (1200-1750 cm³). Questi tratti erano adattamenti a climi rigidi.

La tecnologia associata ai Neanderthal è la cultura Musteriana, che utilizzava la tecnica di scheggiatura Levallois per produrre lame e punte da un nucleo pre-preparato, dimostrando una notevole perizia e pianificazione. Questi strumenti erano più specializzati di quelli acheuleani.

Le evidenze suggeriscono che i Neanderthal vivevano in piccoli gruppi, si prendevano cura dei malati e degli anziani, ed esistono prove di pratiche funerarie intenzionali (seppellivano i loro morti), indicando una forma di pensiero simbolico o di preoccupazione per l'aldilà. Cacciavano grandi animali con lance, dimostrando cooperazione e strategie.

L'Enigma dell'Estinzione La scomparsa dei Neanderthal è ancora oggetto di dibattito. Tra le ipotesi: cambiamenti climatici, competizione con l'*Homo sapiens*, assorbimento genetico o una combinazione di questi fattori.

Homo di Denisova: una scoperta recente “il terzo incomodo”



Mentre i Neanderthal dominavano l'Europa e l'Asia occidentale e i nostri antenati *Homo sapiens* muovevano i primi passi in Africa, un'altra specie umana, misteriosa e sfuggente, popolava le vaste distese dell'Asia. Conosciuti come Denisovani, la loro scoperta ha rivoluzionato la nostra comprensione del passato umano, rivelando una storia molto più complessa e interconnessa di quanto si pensasse.

Una Scoperta Rivoluzionaria

La storia dei Denisovani non inizia con la scoperta di uno scheletro, ma di un frammento osseo grande quanto un'unghia.

- **Il Luogo:** la Grotta di Denisova, sui monti Altaj in Siberia, un sito archeologico che per millenni ha ospitato sia Neanderthal che *Homo sapiens*.
- **Il Reperto:** nel 2010, un team di scienziati guidato da Svante Pääbo (futuro premio Nobel) analizzò il DNA estratto da un osso di falange di mignolo appartenuto a una giovane donna vissuta circa 41.000 anni fa.
- **La Sorpresa:** i risultati furono sbalorditivi. Il DNA non corrispondeva né a quello di un Neanderthal né a quello di un *Homo sapiens*. Apparteneva a un lignaggio umano fino ad allora sconosciuto.

Da quel momento, solo pochi altri resti sono stati attribuiti con certezza ai Denisovani (principalmente denti e un frammento di mandibola trovato in Tibet), rendendoli una delle specie umane più enigmatiche.

Poiché i fossili sono estremamente rari, quasi tutto ciò che sappiamo su di loro deriva dalla genetica.

- **Parentela:** I Denisovani sono un gruppo fratello dei Neanderthal. Ciò significa che condivisero un antenato comune più recente con i Neanderthal rispetto a quello che condivisero con l'*Homo sapiens*. La loro linea evolutiva si separò da quella dei Neanderthal circa 400.000 anni fa.
- **Aspetto Fisico:** I pochi indizi (denti molari molto grandi e una mandibola robusta) suggeriscono che avessero una corporatura forte e massiccia, probabilmente adattata a climi rigidi.
- **Diffusione Geografica:** Sebbene scoperti in Siberia, la loro eredità genetica suggerisce che fossero diffusi in tutta l'Asia, dalla fredda Siberia alle foreste tropicali del Sud-est asiatico.

La scoperta più affascinante riguarda le interazioni dei Denisovani con le altre specie umane. L'analisi del DNA antico ha dimostrato che il mondo del tardo Pleistocene era un luogo dove diversi gruppi umani non solo coesistevano, ma si incrociavano regolarmente.

- Incroci con i Neanderthal: nella stessa grotta di Denisova è stato trovato il fossile di una ragazza ("Denny") vissuta 90.000 anni fa che aveva una madre Neanderthal e un padre Denisovano, prova diretta di un incrocio tra le due specie.
- Incroci con *Homo sapiens*: i Denisovani si sono incrociati più volte anche con i nostri antenati Sapiens. Questo evento non fu marginale, ma ha lasciato un'eredità duratura nel nostro DNA.

Tracce di DNA denisovano sono presenti ancora oggi in molte popolazioni non africane, con picchi significativi in:

- Melanesiani, Papuani e Aborigeni Australiani: che possono avere tra il 4% e il 6% del loro genoma di origine denisovana.
- Popolazioni dell'Asia Orientale e del Sud-est Asiatico: che ne conservano percentuali minori (circa 0,2%).

Questa eredità genetica non è solo una curiosità storica. Ha fornito vantaggi concreti (un processo chiamato introgressione adattativa):

Il Superpotere degli Sherpa: il caso più celebre è quello del gene EPAS1, che nelle popolazioni tibetane e Sherpa regola la produzione di emoglobina e permette loro di vivere e prosperare ad altitudini estreme con poco ossigeno. Questo gene è un "regalo" diretto ereditato dai loro antenati Denisovani, a loro volta già adattati a quegli ambienti.

Altre varianti genetiche ereditate dai Denisovani sembrano aver influenzato il sistema immunitario e la risposta ai virus.

I Denisovani hanno trasformato la nostra conoscenza precedente rendendo ancora più intrecciato il percorso evolutivo umano: un intreccio complesso, un "cespuglio" di rami che si sono separati e poi ricongiunti. La loro scoperta dimostra che i nostri antenati hanno interagito e si sono scambiati geni con altri esseri umani intelligenti, arricchendo il nostro patrimonio genetico. Molte domande, tuttavia, rimangono aperte: che aspetto avevano? Quali strumenti usavano? E perché, come i loro cugini Neanderthal, sono scomparsi?

Homo Sapiens



L'*Homo sapiens* ("uomo saggio"), la nostra specie, emerge in Africa circa 300.000-200.000 anni fa, e da lì si diffuse in tutto il mondo.

La teoria dominante, "Out of Africa" (o "origine africana recente"), suggerisce che l'*Homo sapiens* si sia evoluto in Africa e da lì abbia migrato colonizzando il resto del mondo, sostituendo o assimilandosi ad altre specie umane preesistenti.

Ribadiamo che il percorso evolutivo umano somiglia più a un cespuglio che ad una pianta. Schematicamente possiamo dire che *Homo erectus*, comparso circa 1,8 milioni di anni fa, si diffonde dall'Africa in Eurasia, ed è considerato una delle specie più longeve e adattabili. Accanto a lui,

però, si sviluppano altre forme, come *Homo ergaster* in Africa o *Homo antecessor* in Europa. Non tutte queste specie sono “nostri antenati diretti”: molte rappresentano rami evolutivi paralleli, adattati a nicchie ecologiche particolari.

Negli ultimi 500.000 anni la situazione si fa ancora più intricata: in Eurasia si affermano i Neanderthal (*Homo neanderthalensis*), con una cultura sofisticata, strumenti avanzati e capacità simboliche. In Africa si sviluppano le prime popolazioni di *Homo sapiens*, circa 300.000 anni fa. In Asia, invece, compaiono forme particolari come l'*Homo floresiensis* (“l’hobbit” di Flores) e l'*Homo luzonensis* nelle Filippine. A ciò si aggiungono i Denisoviani, conosciuti solo da pochi resti fossili e da tracce genetiche, che si incrociarono sia con i Neanderthal che con i Sapiens.

Una delle scoperte più sorprendenti della genetica moderna è che i rami del cespuglio umano non sono stati del tutto isolati. Al contrario, ci sono stati vari episodi di ibridazione:

- I sapiens che uscirono dall’Africa si incrociarono con i Neanderthal in Europa e con i Denisoviani in Asia.
- Ancora oggi, il nostro DNA conserva piccole percentuali di queste antiche mescolanze (fino al 4% di DNA neandertaliano negli europei e fino al 6% di DNA denisoviano in alcune popolazioni asiatiche e oceaniane). Questo dimostra che la nostra storia non è quella di una specie “pura” che sostituisce le altre, ma piuttosto di una rete di scambi, competizioni e convivenze.

Homo sapiens: l’unico ramo rimasto

Circa 30.000 anni fa, tutte le altre specie del genere *Homo* si erano estinte, lasciando solo *Homo sapiens*. Le cause non sono del tutto chiare: il clima instabile del tardo Pleistocene, la competizione per le risorse, e forse anche l’interazione con gli stessi sapiens. Quel che è certo è che oggi siamo l’unico ramo sopravvissuto di un cespuglio molto più folto.

L’*Homo sapiens* si distingue per un cranio più globoso, una fronte alta, un volto piatto, la presenza del mento e un’arcata sopracciliare meno pronunciata. La sua capacità cranica è di circa 1300-1500 cm³. Il vero vantaggio evolutivo non fu tanto la dimensione assoluta del cervello, quanto la sua organizzazione e le capacità cognitive superiori, in particolare quelle legate al linguaggio e al pensiero simbolico.

A partire da circa 50.000-40.000 anni fa, l’*Homo sapiens* conobbe una “rivoluzione culturale” senza precedenti, nota come Paleolitico Superiore.

Le Grotte Dipinte: espressione artistica e pensiero simbolico. Le pitture rupestri di Lascaux, Altamira e Chauvet sono testimonianze straordinarie di un pensiero astratto e simbolico profondo. Raffiguravano animali, scene di caccia e simboli, probabilmente legati a rituali, credenze religiose o scopi didattici.

Nuovi Strumenti e Innovazioni: il Paleolitico Superiore vide una proliferazione di strumenti più specializzati e diversificati, realizzati non solo in pietra (lame, microliti), ma anche in osso, corno e avorio (aghi, arpioni, propulsori). Ciò permise una maggiore efficienza nella caccia, nella pesca e nella lavorazione di pelli e fibre. Quando l’*Homo sapiens* si diffuse dall’Africa in Europa e Asia, incontrò i Neanderthal. Recenti studi genetici hanno rivelato che vi fu un incrocio tra le due specie, e che le popolazioni non africane di Sapiens portano ancora oggi tracce del DNA neandertaliano. Sebbene entrambe le specie fossero intelligenti e adattabili, alcune differenze chiave possono aver

giocato un ruolo nella sopravvivenza del Sapiens: i Sapiens svilupparono una tecnologia più versatile e innovativa, con una maggiore diversificazione degli strumenti e l'uso di materiali diversi.

Si ipotizza che il Sapiens avesse strutture sociali più complesse e reti di scambio più ampie, favorendo l'innovazione e la resilienza.

Sebbene i Neanderthal avessero una forma di pensiero simbolico, la capacità del Sapiens di produrre arte complessa, simboli astratti e forse un linguaggio più articolato diede un vantaggio decisivo nella trasmissione della conoscenza e nell'organizzazione sociale.

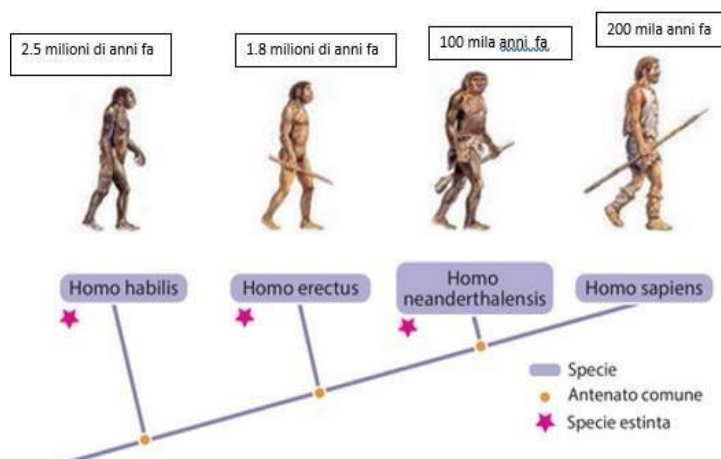
Al di là delle differenze fisiche e delle innovazioni tecnologiche, lo sviluppo del linguaggio e della cultura simbolica rappresenta il vero motore che ha spinto l'Homo sapiens verso il successo evolutivo. La capacità di comunicare attraverso un linguaggio articolato è una peculiarità quasi esclusiva dell'uomo moderno. Sebbene le specie precedenti potessero avere forme rudimentali di comunicazione, la complessità del linguaggio sapiens permise:

- una trasmissione efficiente di informazioni complesse, dalle tecniche di caccia alle conoscenze sulle piante.
- lo sviluppo del pensiero astratto, la capacità di concettualizzare idee non direttamente presenti.
- una maggiore cooperazione e organizzazione sociale all'interno dei gruppi e tra gruppi diversi.

La cultura simbolica, che si manifesta attraverso l'arte, i riti, la religione e i miti, è una pietra miliare dell'essere umano. Permise la creazione di un senso di identità comune, rafforzando i legami sociali. Offrì modi per elaborare eventi come la morte (riti funerari) e per dare significato al mondo (mitologia, arte).

La capacità di creare simboli astratti fu fondamentale per lo sviluppo di sistemi di scrittura, e in seguito, per la scienza e la tecnologia.

La combinazione di un cervello grande e ricettivo, uno sviluppo avanzato del linguaggio e la capacità di creare culture simboliche, permise all'Homo sapiens di adattarsi a una varietà di ambienti senza precedenti. Non fu solo la forza fisica o la destrezza manuale a garantirne la sopravvivenza, ma soprattutto la flessibilità cognitiva, la capacità di innovare, di imparare dall'esperienza e di trasmettere le conoscenze attraverso le generazioni. Questa "intelligenza culturale" permise all'Homo sapiens di superare le sfide ambientali e di competere con successo con le altre specie umane.



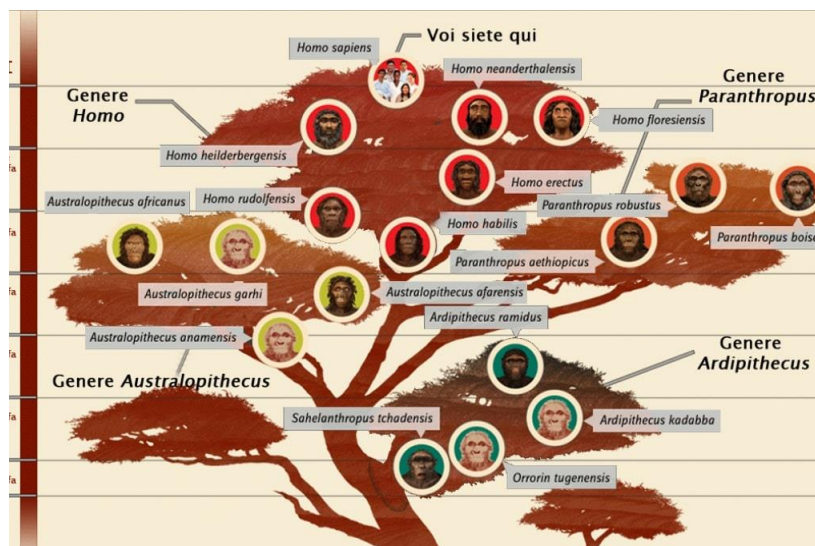
In questa figura è riassunta molto schematicamente il processo evolutivo dei Sapiens.

Conclusione: l'eredità del nostro passato profondo

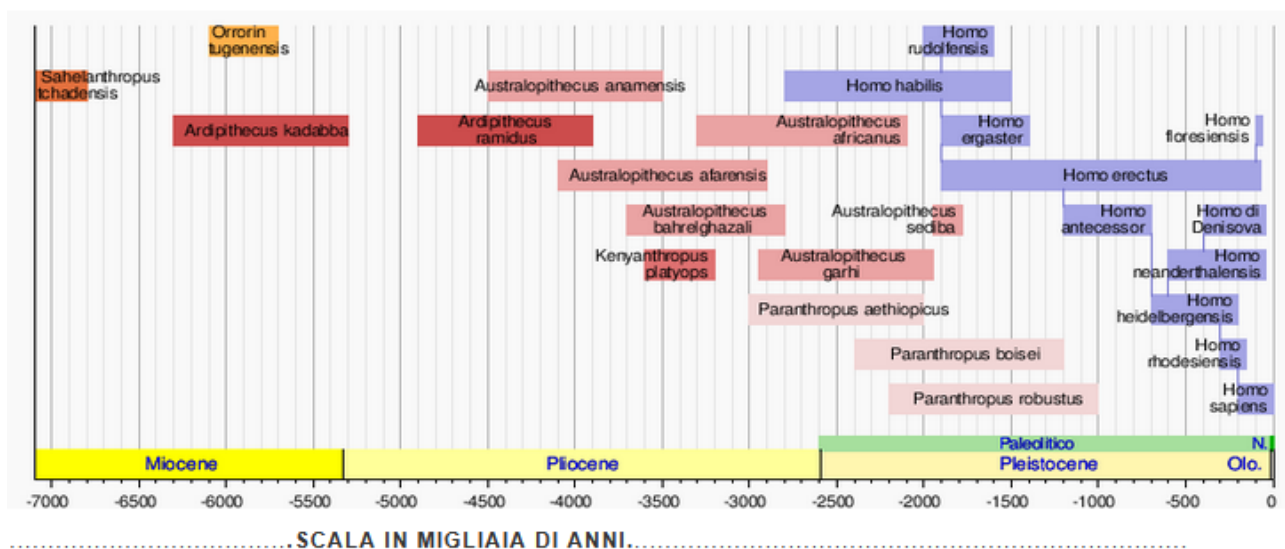
Questo viaggio “a volo d’uccello” di milioni di anni, costellato di specie diverse e di sfide ambientali, non è solo un capitolo di un libro di storia naturale, ma la profonda radice della nostra identità.

Ogni singolo passo evolutivo – la liberazione delle mani, la scheggiatura della pietra, il controllo del fuoco, l'articolazione del linguaggio e l'espressione artistica – ha contribuito a plasmare la nostra specie, dotandola degli strumenti fisici e cognitivi per affrontare il mondo. La nostra unicità come *Homo sapiens* non risiede in un singolo tratto, ma nella sinergia di queste capacità: un corpo adatto al movimento su lunga distanza, un cervello capace di astrazione e di risoluzione dei problemi, e la straordinaria abilità di creare e condividere cultura.

Ribadiamo ancora una volta che la linea evolutiva dell’uomo non è stato un percorso lineare, semplice e diretto, ma piuttosto somiglia a un cespuglio fitto di rami intrecciati: alcuni prosperano, altri si spezzano e restano secchi, testimoni silenziosi di possibilità perdute. Ogni ramo rappresenta una diversa traiettoria, un esperimento della natura che ha contribuito a scolpire ciò che siamo oggi. La nostra specie è emersa da un intricato intreccio di tentativi, errori e scelte, in cui la sopravvivenza di alcune linee ha permesso la comparsa di *Sapiens*, come possiamo vedere nella seguente schematica immagine.



In questa tabella, dove la lunghezza della barra colorata indica il lasso di tempo in cui è vissuta la specie indicata, è più immediatamente percepibile l’andamento temporale dell’evoluzione verso i *Sapiens*.



Comprendere il nostro passato profondo non significa solo studiare l'uomo che è stato, ma illuminare l'uomo che siamo e il vasto potenziale che portiamo dentro di noi. Siamo l'esito di un'incredibile catena di eventi, testimoni di un'evoluzione che ci ha donato non solo la capacità di modellare il mondo intorno a noi, ma anche di interrogarci sul senso dell'esistenza e sul mistero del nostro spirito. La storia delle nostre origini sembra velata da un enigma: qualcosa di straordinario deve essere accaduto per trasformare l'animale in uomo, per far emergere in noi la coscienza, il pensiero riflessivo e quella scintilla che chiamiamo anima. Come sosteneva Platone, l'anima è immortale e preesiste al corpo; mentre Aristotele la descrive come la forma del corpo vivente, principio che dà vita alla materia ma la trascende, rivelando in noi qualcosa che va oltre il semplice mondo fisico. In questo senso, l'uomo è il punto in cui la natura diventa consapevole di sé, contemplando non solo il mondo, ma anche l'infinito dentro di sé.

Meraviglia e stupore sono forse i termini più adeguati per descrivere ciò che si prova quando si contempla, con mente attenta e cuore aperto, il fatto straordinario che all'interno delle nostre cellule, e in particolare nei mitocondri sopravvive ancora un frammento del DNA del mitocondrio ancestrale, risalente agli albori della vita stessa.. Ancora più sorprendente è constatare che nel nostro DNA — esito di miliardi di anni di evoluzione — permane, seppur in minima parte, il patrimonio genetico di specie umane ormai estinte da migliaia di anni. E infine, se ci soffermiamo a riflettere sulla materia di cui siamo fatti, scopriamo qualcosa di straordinario: ogni singolo atomo che compone il nostro corpo è il risultato di un lunghissimo processo cosmico, che ha avuto inizio miliardi di anni fa nelle viscere delle stelle. Gli elementi più leggeri, come l'idrogeno e l'elio, si sono formati subito dopo il Big Bang, ma tutti gli altri — il carbonio che struttura le nostre cellule, l'ossigeno che respiriamo, il ferro del nostro sangue, fino al calcio delle nostre ossa — sono nati nei cuori incandescenti delle stelle attraverso reazioni di fusione nucleare. Quando quelle stelle hanno concluso il loro ciclo vitale, spesso in spettacolari esplosioni di supernova, hanno sparso nello spazio questi elementi, arricchendo il cosmo di quella "polvere di stelle" che sarebbe poi andata a formare nuove stelle, pianeti e, infine, la vita stessa.

In questo senso, dal punto di vista materiale, possiamo dire che siamo davvero figli delle stelle: ciò che siamo è letteralmente intrecciato con la storia dell'universo, un prodotto diretto dell'evoluzione cosmica che ha trasformato l'energia primordiale in materia, e la materia in vita.

Questo pensiero, radicato in una riflessione scientifica rigorosa, trova un'eco sorprendente nelle parole del teologo ortodosso Olivier Clément: «L'universo sensibile, tutto intero, prolunga il nostro corpo; non vi è discontinuità tra la carne del mondo e quella dell'uomo. L'universo è inglobato nella natura umana e nel corpo dell'umanità. L'uomo è un microcosmo che riassume, condensa e ricapitola in sé i gradi dell'essere creato, e può così conoscere l'universo dall'interno».

In queste parole si manifesta con straordinaria evidenza l'unità profonda tra l'uomo e il cosmo, un filo invisibile che lega la nostra esistenza alle stelle, ai tempi remoti della vita, e alle dimensioni più vaste della creazione.

Ed infine...una scoperta recente...

Uno studio di paleoantropologi italiani e biostatistici cinesi del 2023, che ha visto la partecipazione dei paleoantropologi italiani Fabio Di Vincenzo dell'Università di Firenze e Giorgio Manzi dell'Università Sapienza di Roma, ha mostrato che l'umanità ha rischiato seriamente di estinguersi, con un crollo demografico drammatico pari al 99% della popolazione allora esistente.

Questo evento, avvenuto tra 930.000 e 813.000 anni fa, ha ridotto la popolazione a un numero esiguo di individui, portandola di fatto a un passo dall'estinzione.

Secondo i ricercatori, questo collo di bottiglia demografico potrebbe aver giocato un ruolo cruciale nell'evoluzione umana, portando all'emergere di una nuova specie, *Homo heidelbergensis*, considerato l'ultimo antenato comune di *Homo sapiens*, dei Neanderthal e dei Denisovani.

Attraverso un nuovo approccio statistico-genomico chiamato FitCoal ("fast infinitesimal time coalescent process"), i ricercatori hanno analizzato i genomi di 3.154 individui moderni per ricostruire la storia demografica dei nostri antenati. Hanno scoperto che tra circa 930.000 e 813.000 anni fa, i nostri progenitori affrontarono un drammatico collo di bottiglia demografico, riducendo la popolazione riproduttiva a solo circa 1.280 individui, per una durata di circa 117.000 anni, avvicinandosi così a un'estinzione quasi totale.

Questo crollo demografico potrebbe spiegare l'assenza di fossili umani tra Africa ed Eurasia in quel periodo, dove si riscontra un "gap" quasi perfettamente coincidente nella documentazione paleontologica. La perdita stimata della diversità genetica fino al giorno d'oggi è di circa il 66%. Il fenomeno potrebbe aver contribuito all'emergere di una nuova specie ancestrale, probabilmente *Homo heidelbergensis*, che successivamente diede origine a *Homo sapiens*, Neandertal e Denisovani.

Una volta fatto questo viaggio potremo chiederci in quale epoca si sia sviluppata la coscienza, la consapevolezza di sé, che potremo anche far coincidere con il senso del sacro.

Infatti:

- la nascita della coscienza di sé fornisce la base cognitiva per concepire il sacro, perché implica la capacità di pensare oltre l'utile immediato e di dare significato alla vita, alla morte, alla natura o a forze invisibili.
- le prime manifestazioni del sacro (rituali, sepolture, arte simbolica) sono quindi anche prove indirette della coscienza umana, perché solo un essere capace di riflessione simbolica può creare rituali con significato spirituale.

La nascita del sacro, intesa come l'emergere di comportamenti simbolici e rituali con valenza spirituale o religiosa, è un argomento complesso perché lascia poche tracce dirette nel registro fossile. Tuttavia, gli studiosi di antropologia e archeologia collocano questo fenomeno **nell'**ultimo Paleolitico, soprattutto a partire da circa 100.000–40.000 anni fa, con l'Homo sapiens moderno.

Alcuni indicatori chiave includono:

- Sepulture rituali: scheletri deposti con oggetti, pigmenti o ornamenti (ad esempio in Africa e Medio Oriente).
- Arte rupestre e incisioni simboliche: pitture e graffiti nelle grotte, come quelli in Europa (Chauvet, Lascaux) o in Africa (Blombos, circa 75.000 anni fa).
- Oggetti simbolici e amuleti: conchiglie perforate, statuette e figurine come la Venere di Willendorf (circa 30.000 anni fa).

Questi elementi suggeriscono che già l'Homo sapiens del tardo Paleolitico possedeva una dimensione simbolica e sacra, preludio delle religioni organizzate. Alcuni studiosi ipotizzano che forme rudimentali di sacro possano risalire anche a Homo neanderthalensis, visto che sono stati trovati segni di sepolture con pigmenti o ossa curate.

130.000–100.000 anni fa – *Sepulture rituali di Neanderthal*: scheletri con ossa curate e uso di pigmenti rossi.

100.000–75.000 anni fa – *Africa*: oggetti simbolici come conchiglie perforate e incisioni su ossa e pietre (Blombos Cave, Sudafrica).

40.000–30.000 anni fa – *Europa*: arte rupestre (Lascaux, Chauvet) e statuette femminili come la Venere di Willendorf; sepolture con oggetti e ornamenti.

12.000 anni fa – *Neolitico*: sviluppo di culti più organizzati legati all'agricoltura, costruzione di monumenti megalitici (es. Göbekli Tepe, circa 11.500 anni fa).

Tabella schematica di alcune date significative.

Scoperta del fuoco: circa 1.5 milioni di anni fa

Comparsa di Homo Sapiens: circa 250 000 anni fa

Comparsa della coscienza: intorno a 100 000 anni fa

Ci sono prove di sepolture intenzionali già intorno a 100.000 anni fa fatte sia dai Neanderthal sia dai primi Homo Sapiens.

Molto probabilmente durante questo periodo, l'uomo raggiunge un punto cruciale:

la nascita della coscienza di sé.

Linguaggio e pensiero simbolico: 50 000 anni fa (10 000 anni fa i primi Templi)

Arte pittorica (pittogrammi e ideogrammi): 40 000 anni fa

Invenzione della ruota: circa 6 000 anni fa

Invenzione della Scrittura: 5 000 anni fa (inizio della Storia)

Riflessione metafisica

L'uomo: essere ragionevole

L'uomo, diversamente da ogni altro essere naturale, non solo vive, ma sa di vivere; non solo conosce, ma sa di conoscere. In questo suo ritorno riflessivo su se stesso egli scopre di essere portatore di una ragione che non si accontenta dei fenomeni immediati, ma domanda: *da dove provengo? verso dove vado? quale è il fine ultimo della mia esistenza?*

La filosofia, fedele alla sua vocazione, si impegna a rispondere a tali interrogativi. Tuttavia, proprio mentre la ragione dispiega la sua capacità più alta, essa giunge a riconoscere il proprio limite: la natura, considerata in se stessa, non appare sufficiente a dar ragione del passaggio dall'inanimato all'animato, né da questo allo spirituale.

L'insufficienza della natura a spiegare se stesso

È principio perenne che «nessuno dà ciò che non ha» (*nemo dat quod non habet*). Ora, se la materia inanimata non possiede in sé la vita, come potrebbe produrla? E se il vivente privo di coscienza non racchiude in sé la spiritualità, come potrebbe generare la libertà e l'autocoscienza?

È dunque manifesto che la natura, se considerata come unica causa di se stessa, cade in contraddizione. Infatti, ammettere che l'inerte generi da sé il vivente equivarrebbe a dire che il nulla possa produrre l'essere: proposizione contraria al principio di non contraddizione, che Aristotele stesso poneva come fondamento di ogni scienza (*Metaphysica*, IV).

Il principio di causalità e la necessità di un Ente primo

La ragione, nel suo esercizio ordinato, riconosce il principio di causalità: «ogni cosa che si muove, è mossa da altro» (*Physica*, VIII). Ma se ogni mutamento esige una causa, non si può risalire all'infinito in una catena senza principio. Tommaso d'Aquino, raccogliendo la lezione aristotelica, dimostra che «non è possibile procedere all'infinito nelle cause efficienti» (*Summa Theologiae*, I, q.2, a.3), poiché in tal caso non vi sarebbe mai una causa attuale che desse l'essere.

È necessario dunque affermare un Ente primo, che sia causa di sé e fondamento di tutto ciò che esiste. Questo Ente, che la ragione può indicare come Atto puro, non riceve l'essere da altro, ma lo dona, ed è perciò principio e radice di ogni realtà.

La testimonianza dell'esperienza e l'analogia del fuoco

L'esperienza stessa conferma tale necessità. Infatti, se vediamo del fumo, concludiamo che vi deve essere un fuoco che ne è causa; se ascoltiamo un'armonia, sappiamo che vi deve essere una mano che suona lo strumento. Allo stesso modo, la vita e la coscienza non possono essere effetti privi di causa, ma rimandano a un principio superiore.

Agostino, nelle *Confessiones*, esprime questa medesima intuizione con parole che hanno attraversato i secoli: «Se vedi la creatura, cerca il Creatore; se vedi il mutamento, cerca Colui che non muta» (VII, 11).

Il limite della ragione e l'apertura al Mistero

Ora, giunta a questo punto la ragione è indotta ad aprirsi al Mistero. Non si tratta di un fallimento, bensì del suo compimento: così come l'occhio non è fatto per contemplare direttamente il sole, ma può godere della sua luce, così la mente, pur incapace di penetrare l'essenza divina, può tuttavia riconoscerne la necessità e coglierne i riflessi nelle cose create.

Tommaso afferma con lucidità che «ciò che l'uomo può conoscere di Dio è che Egli è» (*Summa contra Gentiles*, I, 13), non già che cosa Egli sia nella sua essenza. E tuttavia questo “sapere negativo” diventa principio di apertura, una confessione che rinvia a Colui che è «ipsum Esse subsistens».

Dio come principio e fine di tutte le cose

È dunque ragionevole e necessario riconoscere che vi sia un Ente supremo, causa prima e fine ultimo, senza del quale il passaggio dalla materia inanimata al vivente, e dal vivente allo spirituale, rimarrebbe inspiegabile.

Questo Ente, che tutti chiamano Dio, è l'Atto puro di Aristotele, la Causa prima di Tommaso, il Bene che attrae e ordina tutto a sé. Come scrive Tommaso nella *Summa Theologiae* (I, q.44, a.1): «Tutte le cose che esistono, in qualunque modo, derivano necessariamente da un unico principio primo, che è Dio».

Bibliografia:

- S. J. Gould, *Ontogeny and Phylogeny*, Harvard University Press, 1977.
- I. Tattersall, *Becoming Human: Evolution and Human Uniqueness*, Harcourt Brace & Company, 1998.
- Y. N. Harari, *Sapiens: Da animali a dèi. Breve storia dell'umanità*, Bompiani, 2014.
- L. L. Cavalli-Sforza, *Genetics, Evolution, and Human Diversity*, Princeton University Press, 1997.
- F. Facchini, *Origini dell'uomo ed evoluzione culturale*, Jaca Book, 2006.
- M. Piperno, *La Preistoria*, Il Mulino, 2012.

L'uomo non discende dalla scimmia

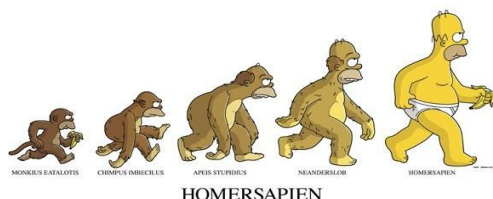
Considerazioni sull'evoluzionismo

a cura di Giancarlo Buccella

Nelle nostre società cosiddette “evolute” persistono popolarissime **bufale** a proposito di come funziona l'**evoluzione**, senza nemmeno bisogno di andare a scomodare il creazionismo, sia esso quello caricaturale della Terra Giovane o il più raffinato criptocreazionismo dell'Intelligent Design. Ecco alcune delle più diffuse: quante volte le avete lette? E a quante avete **creduto**?

La marcia del progresso.

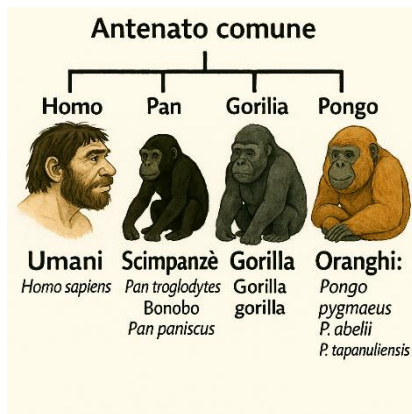
Cercate *evoluzione* su “Google immagini” e osservate i risultati. L'immagine, o meglio, l'icona che domina è una serie di ominidi in fila indiana messi di profilo. Da sinistra verso destra, più ci avviciniamo alla nostra specie, più la postura diventa eretta e i tratti meno *primitivi*. Questa immagine, nota come *La marcia del progresso*, è talmente famosa da essere diventata un'**icona pop**, che come la Marilyn di Warhol è stata declinata in centinaia di opere. La vediamo in ogni sorta di siti, persino di istituzioni scientifiche, ed è approdata anche sul francobollo delle poste italiane dedicato al bicentenario darwiniano del 2009.



L'evoluzione non potrebbe essere più diversa di così. Lasciando da parte lo spinoso problema di quale sia il modo migliore di rappresentare una versione generalizzata del processo evolutivo, la marcia del progresso evolutivo mostrato dalla figura, suggerisce un processo continuo di antenato in antenato fino ad arrivare a *Homo sapiens*, completamente eretto e pronto a prendere possesso del mondo. Si presenta quindi l'evoluzione come lineare, quando invece la storia della famiglia umana non potrebbe essere più intricata ed è solo un effetto della contingenza che ai giorni nostri sia presente solo una specie del genere *Homo*, la nostra. *La marcia del progresso* è apparsa per la prima volta in un libro di testo del 1965, scritto dall'antropologo Francis Clark Howell e illustrato dal disegnatore Rudolph Zallinger. L'immagine non era stata pensata con quel significato, e il testo allegato era chiaro: alcuni degli ominidi nella serie già allora non erano considerati antenati dell'uomo, ma i *memi* molto spesso non seguono il destino programmato dai creatori e questa immagine, col suo bagaglio diseducativo e fuorviante, è diventata virale.

L'uomo non discende dalla scimmia.

Scimmie e uomo hanno invece un antenato in comune. Nel caso degli scimpanzè (Pan troglodytes) e bonobo (Pan paniscus), con i quali condividiamo buona parte delle sequenze genomiche, l'antenato più recente in comune con noi è vissuto, secondo le attuali stime, tra i 13 e 14 milioni di anni fa.



Questo antenato comune era senz'altro diverso sia dagli scimpanzè sia dall'uomo, e lo potremmo pure chiamare "scimmia" se non fosse che nel linguaggio comune con questa parola ci si riferisce implicitamente a una specie attuale.

La realtà quindi è che l'uomo non discende dalla scimmia,

ma ambedue si sono evoluti a partire da un progenitore comune

Darwin ha scritto nell'*Origine dell'uomo*: "... non dobbiamo cadere nell'errore di credere che il primitivo progenitore di tutto lo stipite delle scimmie, compreso l'uomo, fosse identico, o anche rassomigliasse molto, a qualunque scimmia che esista oggi."

Diciamo di più, secondo le attuali teorie si pensa che TUTTI gli esseri viventi (animali e vegetali) discendano da un primo essere vivente, insomma un antenato comune universale, in lingua inglese last universal common ancestor (acronimo: LUCA). Si stima sia comparso circa 4 miliardi di anni fa, ossia appena dopo 500 milioni di anni dalla nascita del nostro pianeta! Quindi la frase corretta è

"L'uomo, così come tutti gli altri organismi viventi, discende da LUCA".

Anelli mancanti

La favola degli *anelli mancanti* di cui gli scienziati sarebbero alla continua ricerca è da sempre una manna per gli spin doctor creazionisti, che possono così esibirsi pretendendo a gran voce il loro ritrovamento. Dire "*anello mancante*" avrebbe senso solo se esistesse una **catena nell'evoluzione**, ma questa concezione come detto è una *eredità* che precede la formulazione della teoria. La teoria dell'evoluzione implica che il frammentario record fossile ci possa offrire (e lo ha fatto ripetutamente) forme di transizione, cioè organismi con caratteristiche intermedie tra un gruppo più antico (per esempio i pesci) e uno più recente (per esempio gli anfibi), ma non è affatto detto che gli esemplari trovati appartengano sempre alle specie progenitrici che sappiamo essere esistite (anche se possiamo immaginare si somigliassero molto). I fossili di transizione aiutano i paleontologi a comprendere sempre meglio l'evoluzione di un certo gruppo, perché permettono di conoscere l'aspetto e il comportamento di alcuni progenitori *cruciali*, ma nessuno si preoccupa di doverne provare l'esistenza stessa.

L'evoluzione non è la sopravvivenza del più forte

L'idea che nell'evoluzione a prevalere sia "il più forte" è un'interpretazione errata e semplicistica di un processo biologico ben più articolato. La celebre espressione "sopravvivenza del più adatto" (survival of the fittest), introdotta dal filosofo Herbert Spencer e successivamente adottata da Charles Darwin, intendeva sintetizzare il concetto di selezione naturale.[1][2] Tuttavia, il suo significato è stato spesso travisato. Il termine inglese "fittest" non si traduce come "il più forte" in senso di pura potenza fisica, bensì come "il più adatto" a un determinato contesto ambientale. Darwin stesso, a partire dalla quinta edizione de "L'origine delle specie" (1869), utilizzò questa espressione con l'intento di significare "meglio progettato per un ambiente immediato e locale".

Il vero significato della "Fitness" in Biologia

Limitare l'evoluzione alla sola sopravvivenza del più forte è fuorviante anche perché la mera sopravvivenza individuale è influente se non è accompagnata dalla riproduzione. Il fulcro del successo evolutivo risiede nella capacità di un organismo di trasmettere i propri geni alle generazioni future. I biologi definiscono questo concetto con il termine "fitness", che rappresenta il successo riproduttivo di un individuo o di un genotipo. La fitness è una misura relativa e non assoluta, che dipende dalla probabilità di un organismo di sopravvivere e dal numero medio di discendenti che riesce a generare. Un individuo robusto ma sterile, ad esempio, ha una fitness nulla perché non contribuisce al pool genico della generazione successiva.

Oltre la selezione Naturale: le altre forze dell'Evoluzione

La teoria evolutiva moderna, nota come sintesi moderna o neodarwinismo, riconosce che la selezione naturale è solo uno dei motori dell'evoluzione. Esistono altri meccanismi fondamentali che, interagendo tra loro, plasmano la biodiversità:

Deriva Genetica: si tratta di una variazione casuale delle frequenze alleliche in una popolazione, particolarmente influente nelle popolazioni di piccole dimensioni.

Flusso Genico (o Migrazione): è il trasferimento di geni da una popolazione all'altra, che può introdurre nuove varianti genetiche.

Mutazioni Casuali: sono cambiamenti nel materiale genetico che rappresentano la fonte primaria di nuova variabilità su cui possono agire le altre forze evolutive.

Vincoli storici e ambientali: lo sviluppo di una specie è influenzato dalla sua storia evolutiva e dalle condizioni ambientali in cui si trova, che possono limitare le possibili direzioni del cambiamento.

Evoluzione: un processo complesso e non lineare

L'evoluzione non è una marcia lineare verso la perfezione o la massima forza, ma un processo ramificato e complesso. È un percorso fatto di adattamenti locali, compromessi e anche di eventi casuali. L'idea di un'evoluzione come "scala naturae", una gerarchia con l'uomo al vertice, è superata. La diversità della vita sulla Terra è il risultato di una storia complessa e imprevedibile, in cui la capacità di adattarsi a un ambiente in continuo mutamento e di riprodursi con successo sono gli elementi chiave, ben più della semplice idea che il più forte sopravvive a spese del più debole.

L'Evoluzione nel Pensiero di Joseph Ratzinger *Tra Fede e Ragione, un Logos Creatore*



Introduzione

Il rapporto tra la fede cristiana e la teoria dell'evoluzione è stato uno dei dibattiti più complessi e spesso polarizzati della modernità. All'interno di questo dialogo, il pensiero di Joseph Ratzinger, prima come teologo e poi come Papa Benedetto XVI, emerge come una delle voci più articolate e influenti. Lontano dalle posizioni del creazionismo letteralista, che ha sempre criticato, e allo stesso tempo diffidente verso un evoluzionismo puramente materialista, Ratzinger ha elaborato una sintesi che cerca di armonizzare le scoperte scientifiche con la dottrina della Creazione, ponendo al centro la nozione di un "Logos" creatore, una Ragione divina che sottende e guida il processo evolutivo.

1. Il Rifiuto del Creazionismo e la distinzione dei piani

Fin dai suoi primi scritti teologici, Ratzinger ha chiarito che l'approccio creazionista, inteso come il rifiuto della scienza evolutiva sulla base di una lettura letterale della Genesi, è insostenibile. Già in un saggio del 1969, affermava che l'idea pre-darwiniana del "fissismo della specie", secondo cui Dio avrebbe creato ogni singola specie in modo separato e immutabile, "contraddice l'idea dell'evoluzione e oggi è diventata insostenibile".

Il fondamento del suo pensiero risiede in una cruciale distinzione di piani: quello della scienza e quello della teologia. Questi due ambiti non sono in conflitto perché pongono domande fondamentalmente diverse:

La scienza (e la teoria dell'evoluzione) si interroga sul "come": cerca di spiegare i meccanismi e i processi attraverso cui la vita si è sviluppata e diversificata. Si muove sul piano fenomenologico, occupandosi delle realtà concrete e del loro divenire.

La fede nella Creazione si interroga sul "perché": pone la domanda ontologica fondamentale, "perché esiste qualcosa anziché il nulla?". Cerca il significato ultimo dell'essere e l'origine prima di ogni cosa. Secondo Ratzinger, confondere questi due livelli è l'errore che genera il conflitto. La Bibbia non è un manuale di scienze naturali. I racconti della Creazione non intendono descrivere il "come" bio-fisico dell'origine del mondo, ma trasmettere verità teologiche fondamentali: che l'universo proviene da un atto d'amore di un Dio buono, che la realtà non è frutto del caos e che l'essere umano ha una dignità speciale. La fede, quindi, non si identifica con una specifica "immagine del mondo" scientifica, passata o presente, ma la trascende.

2. La critica all'Evoluzionismo materialista: il primato del Logos sul Caos

Se da un lato Ratzinger accetta l'evoluzione come modello scientifico valido, dall'altro muove una profonda critica all'evoluzionismo intesa come filosofia totalizzante, ovvero quella visione che riduce l'intera realtà a un prodotto del "caso e della necessità". Nell'omelia inaugurale del suo pontificato, affermò con chiarezza: "Non siamo il prodotto casuale e senza senso dell'evoluzione. Ciascuno di noi è il frutto di un pensiero di Dio. Ciascuno di noi è voluto, ciascuno è amato, ciascuno è necessario".

Il suo principale avversario intellettuale non è Darwin, ma l'interpretazione materialista del darwinismo che esclude a priori qualsiasi forma di finalità o razionalità intrinseca nell'universo. A questa visione, Ratzinger contrappone il concetto cristiano e filosofico del Logos: la Ragione, la Parola, l'Intelligenza creatrice di Dio. Per lui, all'inizio non c'è il caos irrazionale, ma la Ragione creatrice. L'evoluzione non è un processo cieco, ma un dispiegarsi di un progetto intelligente che la scienza, con i suoi strumenti, può descrivere nei suoi meccanismi senza però poter cogliere la Ragione ultima che lo sostiene.

Come ha affermato durante un convegno a Castel Gandolfo nel 2006, la teoria dell'evoluzione solleva domande che vanno oltre il suo campo scientifico, toccando le grandi questioni della filosofia sull'origine

e il destino dell'uomo e del mondo. La sua proposta è quella di un "allargamento del nostro concetto di ragione", che non si limiti a ciò che è empiricamente verificabile, ma sia aperta a riconoscere la razionalità intrinseca del reale, che a sua volta rimanda a una Ragione più grande.

3. L'Emergere dell'Uomo: un salto Ontologico

Il punto più delicato nel dialogo tra evoluzione e fede è l'origine dell'essere umano. Ratzinger accoglie pienamente l'idea che il corpo umano possa essere il risultato di un lungo processo evolutivo. Tuttavia, egli afferma che l'uomo non è soltanto il risultato di questi processi. L'emergere dello spirito, della coscienza di sé, della libertà e della capacità di entrare in relazione con Dio rappresenta un "salto ontologico", una novità qualitativa che non può essere spiegata unicamente dalla biologia.

Qui si inserisce l'atto creatore di Dio in modo diretto e specifico. Non come un "artigiano" che plasma un corpo, ma come Colui che infonde lo spirito in una creatura che l'evoluzione ha preparato. "Ogni uomo è più che un prodotto di disposizioni ereditarie e ambiente, nessuno è solo risultato dei fattori calcolabili del mondo, il mistero della creazione sta sopra ognuno di noi". In questo senso, la fede nell'anima creata direttamente da Dio non contraddice l'evoluzione, ma la completa, fornendo una spiegazione per quella dimensione dell'umano che la scienza da sola non può sondare.

Conclusione: un'Evoluzione guidata dalla Ragione e dall'Amore

Il pensiero di Joseph Ratzinger sull'evoluzione rappresenta un tentativo di superare la sterile contrapposizione tra scientismo e fideismo. Egli propone una visione in cui la fede non teme la scienza, ma la vede come uno strumento per comprendere i meravigliosi meccanismi attraverso cui il progetto di Dio si realizza nella storia.

Per Ratzinger, l'universo non è una fredda macchina governata dal caso, ma un processo dinamico e razionale, animato da un Logos che è anche Amore. L'evoluzione, quindi, può essere vista come la modalità con cui Dio crea nel tempo, un lungo e paziente dispiegarsi di una promessa che trova il suo culmine nell'essere umano, creato a immagine e somiglianza di Dio e capace di rispondere liberamente al suo Creatore. La sua riflessione invita credenti e non credenti a non fermarsi alla superficie dei fenomeni, ma a interrogarsi sul significato profondo di un universo che, attraverso un cammino di miliardi di anni, ha generato la vita, il pensiero e la coscienza.

Come dunque interpretare l'inizio dell'umanità in Adamo ed Eva, secondo il racconto biblico?

«Adamo significa ognuno di noi», rispose Ratzinger. «Ogni uomo è in rapporto diretto con Dio. La fede afferma sul primo uomo nulla di più che su ciascuno di noi e viceversa su di noi nulla di meno che sul primo uomo. Ogni uomo è più che un prodotto di disposizioni ereditarie e ambiente, nessuno è solo risultato dei fattori calcolabili del mondo, il mistero della creazione sta sopra ognuno di noi». Così, a proposito del "primo uomo": «L'argilla divenne uomo nell'istante in cui un essere per la prima volta, anche se ancora in modo confuso, riuscì a sviluppare l'idea di Dio. Il primo "tu" che fu pronunciato – balbettando come sempre – nei confronti di Dio dalle labbra dell'uomo, indica l'istante in cui lo spirito era nato nel mondo. Qui fu attraversato il Rubicone dell'umanazione». E, tuttavia, «l'istante dell'umanazione non può essere fissato dalla paleontologia: l'umanazione è l'insorgenza dello spirito, che non si può dissotterrare con la vanga. La teoria dell'evoluzione non annulla la fede, e nemmeno la conferma. Ma la sfida a comprendere meglio se stessa e ad aiutare in questo modo l'uomo a capire sé e a diventare sempre più quello che deve essere: l'essere che può dire tu a Dio per l'eternità».

Cosa dicono alcuni scienziati sul rapporto scienza-fede.

Non ha dubbi l'astrofisico italiano Paolo De Bernardis: «La Fede ha bisogno della Scienza così come la Scienza della Fede». Vincitore del Premio Balzan per l'astronomia e l'astrofisica, grazie alla missione che ha permesso per la prima volta di determinare la curvatura spaziale dell'universo, De Bernardis è docente presso l'Università Tor Vergata di Roma.

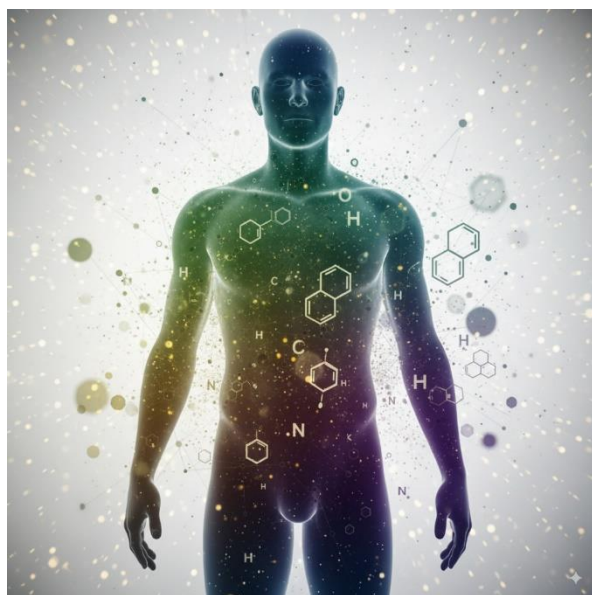
In una intervista, De Bernardis ha ragionato sulla fine dell'Universo, presentando l'ipotesi di un Big Crunch (un enorme scontro di tutta la materia rimasta) o di un Big Rip (lo strappo del tessuto cosmico, preludio alla sua morte termica). Concludendo con un accenno al dibattito etico tra scienza e fede: «Ci sono moltissimi scienziati credenti e non per questo meno attivi di altri». Su questo sito web, per chi fosse interessato, abbiamo realizzato un lungo elenco di scienziati credenti contemporanei.

Esaurita sempre più la spinta neo-scientista che ha caratterizzato la seconda decade degli anni 2000, non sono pochi gli uomini di scienza che riaffermano la loro vicinanza alla metafisica. «Noi scienziati, che andiamo ai limiti dell'universo e della vita, ricorriamo sempre più spesso a nozioni di teologia e filosofia per spiegarci il cosmo», ha infatti affermato il cosmonauta russo Sergej Vasil'evic Avdeev, ex ateo. Oggi però racconta: «Credo ci sia qualcosa d'inspiegabile che governa tutte le cose. In sostanza penso che esista Dio! Questa mia attenzione alla spiritualità si è sviluppata e accresciuta mentre ero nello spazio».

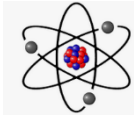
Fabiola Gianotti, direttore generale del CERN di Ginevra: «la scienza e la religione devono restare su due strade separate, (come da tanto tempo va dicendo Zichichi)», ha dichiarato. «La scienza si basa sulla dimostrazione sperimentale e la religione si basa su principi "cose" non dimostrabili con i metodi della scienza, cioè sulla fede. E la scienza non potrà mai dimostrare l'esistenza o la non esistenza di Dio. Sì, io credo, la scienza è compatibile con la fede, non ci sono contraddizioni. L'importante è lasciare i due piani separati: essere credenti o non credenti, non è la fisica che ci darà una risposta».

Rinnovamento cellulare e composizione del corpo umano

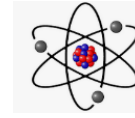
a cura di Giancarlo Buccella



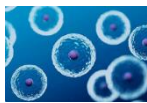
Composizione del corpo umano



Numero di Atomi: $7 \cdot 10^{27}$



Questa stima è considerata ragionevole, sebbene sia quasi impossibile fornire un numero esatto. Diverse fonti scientifiche collocano il numero di atomi in un essere umano adulto di circa 70 kg in un ordine di grandezza compreso tra $7 \cdot 10^{27}$ e 10^{28} atomi. La stragrande maggioranza di questi atomi è costituita da idrogeno, ossigeno e carbonio, che insieme compongono oltre il 95% della massa corporea.



Numero di Cellule: $4 \cdot 10^{13}$



Le stime sul numero di cellule sono state riviste nel tempo. Studi più recenti e dettagliati, come quello pubblicato sulla rivista PLOS Biology, convergono su una stima di circa $4 \cdot 10^{13}$ per un individuo di riferimento.

Per molto tempo si è creduto che i batteri nel nostro corpo superassero le cellule umane con un rapporto di 10 a 1. Ricerche più recenti hanno drasticamente ridimensionato questa stima, suggerendo che il rapporto sia molto più vicino a 1 a 1. Si stima quindi che il numero sia dello stesso ordine di grandezza delle nostre cellule. Insieme a virus, funghi e altri microrganismi, formano il microbiota, una componente essenziale per la nostra salute.

Il numero di cellule del nostro cervello è intorno ai 90 miliardi, è suggestivo pensare che (fino a poco tempo fa) il numero di stelle della nostra Galassia era stimato intorno ai 100 miliardi, quindi dello stesso ordine di grandezza delle cellule del nostro cervello (attualmente le stime per le stelle sono al rialzo del doppio o del triplo).



Lunghezza del DNA: $8 \cdot 10^{13} \text{ m}$



All'interno del nucleo di quasi ogni singola cellula del nostro corpo si trova un'incredibile impresa di compattazione. Il genoma umano, se srotolato, formerebbe un filamento di DNA lungo circa 2 metri. Se ora moltiplichiamo questa lunghezza per il numero totale di cellule nel corpo (circa 40 trilioni), otteniamo una lunghezza complessiva sbalorditiva: $8 \cdot 10^{13}$ metri, ovvero 80 miliardi di chilometri.

Per mettere questo dato in prospettiva considerando che la distanza media tra la Terra e il Sole è di circa 150 milioni di km, la lunghezza totale del nostro DNA sarà sufficiente per coprire questa distanza più di 500 volte.

In pratica, il DNA contenuto in un singolo corpo umano potrebbe estendersi ben oltre i confini del nostro sistema solare, un'illustrazione potente della straordinaria densità di informazione e complessità biologica che ci costituisce."



Composizione chimica



Composizione rispetto alla massa

Il corpo umano è composto da oltre 60 elementi chimici, ma quattro elementi costituiscono circa il 96% della massa corporea totale:

1. Ossigeno (O) – circa 65%
 - È l'elemento più abbondante, presente principalmente nell'acqua (H_2O) e nelle molecole organiche come proteine, carboidrati, lipidi e acidi nucleici.
 - È essenziale per la respirazione cellulare.
2. Carbonio (C) – circa 20%

- Forma la "spina dorsale" di tutte le molecole organiche.
 - È presente in proteine, grassi, carboidrati, DNA, RNA e altre biomolecole.
3. Idrogeno (H) – circa 10%
- Presente in acqua e in quasi tutte le molecole organiche.
 - Gioca un ruolo chiave nel mantenimento del pH e nei legami idrogeno.
4. Azoto (N) – circa 3%
- Fondamentale per la sintesi di proteine e acidi nucleici (DNA e RNA).
 - Presente negli amminoacidi e nelle basi azotate.

Altri elementi importanti (circa 4% del totale)

Questi elementi sono presenti in quantità minori ma sono essenziali per il funzionamento del corpo:

Calcio ~1,5% Importante per ossa e denti, contrazione muscolare, trasmissione nervosa e coagulazione del sangue.

Fosforo ~1% Componente del DNA, RNA, ATP (molecola energetica) e fosfolipidi delle membrane cellulari.

Potassio ~0,25% Elettrolita chiave per il potenziale di membrana e la funzione nervosa e muscolare.

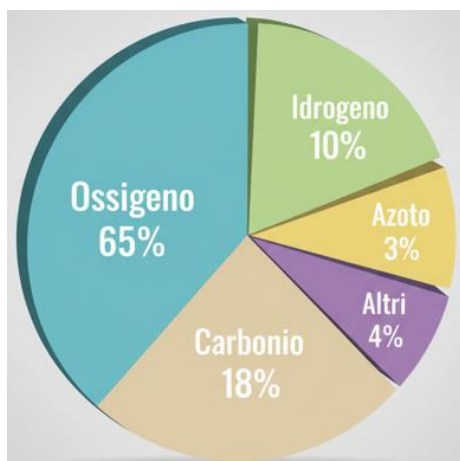
Zolfo ~0,25% Presente in alcuni amminoacidi (come la cisteina e la metionina) e nelle proteine.

Sodio ~0,15% Importante per il bilancio idrico, la trasmissione nervosa e la pressione osmotica.

Cloro ~0,15% Elettrolita presente nei fluidi extracellulari, importante per il pH e l'equilibrio ionico.

Magnesio ~0,05% Cofattore enzimatico, coinvolto nella produzione di ATP e nella sintesi del DNA.

Grafico a torta della composizione del corpo umano in peso.



Quando parliamo della composizione del corpo umano rispetto alle sostanze, ci riferiamo non tanto agli elementi chimici (come ossigeno, carbonio, ecc.), ma alle molecole e categorie di sostanze che compongono i tessuti e i fluidi del corpo. Queste sostanze possono essere suddivise in composti organici e composti inorganici, ciascuno con ruoli fondamentali nel mantenimento della vita.

Ecco una panoramica dettagliata della composizione del corpo umano in termini di sostanze principali:

Acqua ~50-75% del peso corporeo

- Tipo: Composto inorganico.
- Ruolo:
 - Solvente universale per reazioni biochimiche, trasporto di nutrienti e scorie. regolazione della temperatura corporea (sudorazione). Lubrificazione (es. articolazioni, membrane mucose).
- Distribuzione:
 - 2/3 nell'acqua intracellulare.
 - 1/3 nell'acqua extracellulare (plasma, linfa, liquido interstiziale).

Nei neonati può arrivare al 75%, negli anziani scende al 45-50%.

Sostanze organiche ~35-40% del peso corporeo

Sono molecole basate sul carbonio, sintetizzate dagli organismi viventi. Si dividono in quattro grandi categorie:

Proteine – ~15-20% del peso corporeo

- Dove si trovano:
 - Muscoli, enzimi, ormoni (es. insulina), anticorpi, emoglobina, collagene, cheratina.
- Funzioni:
 - Strutturali (tessuti), catalitiche (enzimi), difensive (anticorpi), di trasporto, segnali cellulari.
- Composizione:
 - Polimeri di amminoacidi (20 tipi diversi).

Lipidi (grassi) ~10-20% (variabile)

- Dove si trovano:
 - Tessuto adiposo, membrane cellulari (fosfolipidi), ormoni steroidei (cortisolo, testosterone), vitamine liposolubili.
- Funzioni:
 - Riserva energetica a lungo termine.
 - Isolamento termico e protezione meccanica.
 - Componenti strutturali delle membrane cellulari.
- Tipi principali:

- Trigliceridi, fosfolipidi, colesterolo.

La percentuale varia molto: può essere <10% in persone magre, >30% in soggetti con obesità.

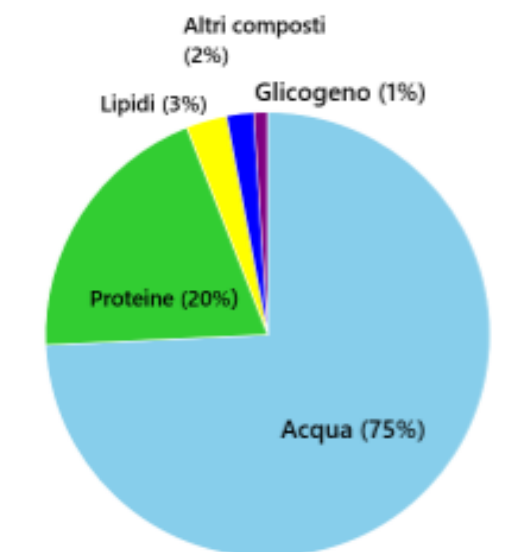
Carboidrati ~1-2% del peso corporeo

- Dove si trovano:
 - Glucosio (nel sangue), glicogeno (riserva nel fegato e muscoli), glicoproteine (membrane cellulari).
- Funzioni:
 - Fonte primaria di energia rapida (glucosio).
 - Riserva energetica a breve termine (glicogeno).
 - Riconoscimento cellulare (glicoproteine e glicolipidi).
- Forme principali:
 - Monosaccaridi (es. glucosio), disaccaridi (es. saccarosio), polisaccaridi (es. amido, glicogeno).

Acidi nucleici <1%

- Tipi:
 - DNA (acido desossiribonucleico) – contiene il patrimonio genetico.
 - RNA (acido ribonucleico) – coinvolto nella sintesi proteica.
- Dove si trovano:
 - Nucleo delle cellule, mitocondri, citoplasma.
- Funzione:
 - Conservazione, trasmissione e espressione dell'informazione genetica.

Grafico a torta della composizione del corpo umano rispetto alle sostanze.





Rinnovamento cellulare

Sarebbe un pensiero fallace l'idea che le cellule del nostro organismo; del cuore, del fegato, delle ossa rimangano le stesse nel corso della nostra vita. Invece non è così: le cellule di organi e tessuti vivono una vita propria, più o meno lunga e si rinnovano ripetutamente nel corso della vita di una persona.

L'idea che le cellule del corpo si rinnovino è nota da molto tempo. Lo studio delle colture cellulari e della divisione cellulare risale ai primi del '900, mentre un metodo innovativo per misurare con precisione la velocità di rinnovamento delle cellule nei diversi organi umani è stato sviluppato dal ricercatore svedese Jonas Frisén nel 2005, portando a scoperte fondamentali sull'età reale dei nostri tessuti, in particolare egli scoprì:

- ✓ che la maggior parte delle cellule del corpo ha in media meno di 10 anni;
- ✓ che anche nel cervello adulto continua la formazione di nuovi neuroni (neurogenesi) in aree specifiche come l'ippocampo.

Occorre aggiungere che vi sono alcuni settori del corpo che invece non si rinnovano mai, tali cellule rimangono inalterate dalla nascita alla morte, e sono:

1. **Neuroni della Corteccia Cerebrale:** la stragrande maggioranza dei neuroni che compongono la corteccia cerebrale, la sede del pensiero, della coscienza, della memoria e della personalità, si forma durante lo sviluppo fetale e non viene mai più sostituita. La stabilità delle loro connessioni (sinapsi) è la base fisica dei nostri ricordi e delle nostre capacità. La loro perdita, a causa di malattie o traumi, è permanente.
 - *(Nota: Esistono piccole nicchie nel cervello, come l'ippocampo, dove una limitata produzione di nuovi neuroni, chiamata neurogenesi, continua anche in età adulta, ma è un'eccezione alla regola generale).*
2. **Cellule dell'Occhio (specifiche):**
 - **Cellule del Cristallino:** le cellule al centro della lente dell'occhio sono vecchie quanto te. Si formano durante lo sviluppo embrionale e la loro perfetta e stabile disposizione è essenziale per garantire la trasparenza necessaria a mettere a fuoco la luce.

- Fotorecettori della Retina (Coni e Bastoncelli): questi neuroni specializzati che catturano la luce non vengono sostituiti. Il complesso "cablaggio" che li collega al nervo ottico deve rimanere stabile per garantire una visione coerente per tutta la vita.
- 3. Cardiomiociti (Cellule Muscolari del Cuore): per molto tempo si è creduto che il cuore fosse completamente statico. Le ricerche più moderne (anche quelle di Jonas Frisé) hanno dimostrato che esiste un lentissimo rinnovamento (meno dell'1% all'anno), ma ciò significa che la maggior parte delle cellule muscolari del tuo cuore ha la tua stessa età. La loro struttura e funzione coordinata sono così vitali che una sostituzione su larga scala sarebbe impossibile.
- 4. Oociti (Cellule uovo, nelle donne): le donne nascono con l'intero patrimonio di ovuli che avranno a disposizione per tutta la vita. Queste cellule non si rigenerano né vengono prodotte di nuove dopo la nascita. Invecchiano insieme all'individuo.

Il “ringiovanimento” non riguarda la singola cellula che torna giovane, ma che il tessuto mantiene un aspetto o una funzione giovane grazie al turnover cellulare.

Ecco come funziona più nello specifico:

1. Morte cellulare programmata (apoptosi): alcune cellule hanno “vita breve” e muoiono secondo un programma naturale.
2. Divisione di cellule staminali o progenitrici: queste cellule si dividono per dare origine a cellule nuove. Non è la cellula vecchia che “si rigenera”, ma una nuova cellula derivata dalla divisione.
3. Differenziazione: la nuova cellula può specializzarsi per diventare parte del tessuto specifico (es. pelle, intestino, sangue).

Un aspetto da aver ben chiaro è che la divisione cellulare è un processo universale: ogni cellula “normale” del corpo (epiteliale, del fegato, del sangue, ecc.) ad un certo punto della sua vita si divide, se l’ambiente lo permette e se non è già “specializzata al massimo” (come i neuroni).

Ma come fa la cellula a sapere che è giunto il momento di dividersi? Una cellula infatti non decide di dividersi "a caso". Il comando è il risultato di una complessa rete di segnali, sia esterni che interni, che funzionano come un rigoroso sistema di controllo e autorizzazione.

Chi dà il comando? La decisione di dividersi?

Una cellula non decide di dividersi "a caso". Il comando è il risultato di una complessa rete di segnali, sia esterni che interni, che funzionano come un rigoroso sistema di controllo e autorizzazione.

1. Segnali Esterni (“i permessi” del vicinato”)

Le cellule del nostro corpo vivono in una comunità e comunicano costantemente tra loro. La decisione di dividersi dipende spesso da messaggi che arrivano dall'esterno.

- Fattori di Crescita (Growth Factors): Sono le molecole-messaggere più importanti. Quando un tessuto viene danneggiato (es. un taglio sulla pelle), le cellule circostanti rilasciano fattori di crescita. Queste proteine si legano a specifici recettori sulla superficie di altre cellule, come una chiave che entra in una serratura. Questo legame innesca una cascata di reazioni all'interno della cellula, che culmina con l'ordine: "Prepara i motori, dobbiamo dividerci!".
- Ormoni: Anche alcuni ormoni, come quelli della crescita, possono stimolare la divisione cellulare in tessuti specifici.
- Contatto Fisico: Le cellule sono anche sensibili al contatto. Quando crescono in uno spazio limitato e "sentono" di aver riempito tutto lo spazio disponibile (inibizione da contatto),

smettono di dividersi. Se si crea uno spazio vuoto, ricevono il segnale per ricominciare a crescere.

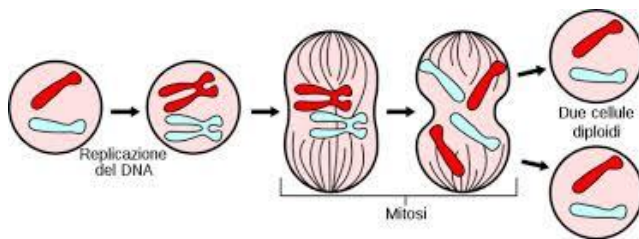
2. Segnali Interni (i "Check-Point" di Controllo Qualità)

Una volta ricevuto il via libera dall'esterno, la cellula non parte subito. Deve prima superare una serie di controlli di qualità interni, chiamati check-point del ciclo cellulare. Immaginali come i controlli pre-volo di un aereo: tutto deve essere perfetto prima del decollo.

- **Check-point G1 (Il punto di non ritorno):** La cellula controlla di essere abbastanza grande, di avere abbastanza nutrienti e, soprattutto, che il suo DNA sia integro e non danneggiato. Se tutto è a posto, riceve il via libera definitivo per duplicare il proprio DNA e procedere con la divisione. Se c'è un problema, il processo si ferma per le riparazioni o, nei casi più gravi, la cellula può essere indotta al suicidio programmato (apoptosi) per evitare di trasmettere errori.
- **Check-point G2:** Dopo aver duplicato il DNA, la cellula fa un ultimo controllo: la copia del DNA è avvenuta correttamente e senza errori? Ci sono tutte le proteine necessarie per la divisione?
- **Check-point della Metafase:** Durante la divisione vera e propria, la cellula si assicura che tutti i cromosomi siano allineati correttamente prima di separarli.

Il comando, quindi, è una decisione collettiva: una combinazione di "permessi" esterni e "controlli di qualità" interni.

Come Avviene? Le Fasi della Divisione (La Mitosi)



Il tipo più comune di divisione cellulare nel nostro corpo si chiama Mitosi. Il suo obiettivo è creare due cellule figlie geneticamente identiche alla cellula madre. È il processo alla base della crescita, della riparazione dei tessuti e del mantenimento del corpo.

Il processo si può suddividere in queste fasi principali:

Fase 1: Interfase (La Preparazione)

È il periodo più lungo della vita di una cellula. Anche se non si sta dividendo attivamente, è tutt'altro che a riposo. È qui che avviene il lavoro preparatorio cruciale:

- **Crescita:** La cellula aumenta le sue dimensioni.
- **Duplicazione del DNA:** L'evento più importante. La cellula crea una copia esatta di tutto il suo patrimonio genetico. Immagina di fare una fotocopia perfetta di un'enorme enciclopedia. Alla fine di questa fase, ogni cromosoma è composto da due copie identiche, chiamate cromatidi fratelli, unite al centro.

Fase 2: Mitosi (La Divisione del Nucleo)

Questa è la divisione vera e propria, suddivisa in quattro sotto-fasi:

1. **Profase:** il DNA, che era sparso nel nucleo, si condensa e si avvolge su se stesso, diventando visibile al microscopio come i classici cromosomi a forma di X. La membrana che racchiude il nucleo si dissolve.
2. **Metafase:** I cromosomi vengono allineati perfettamente in fila indiana al centro della cellula (la "piastra metafase"). Questa è una fase cruciale, controllata da un check-point per assicurarsi che la divisione avvenga in modo equo.
3. **Anafase:** I cromatidi fratelli di ogni cromosoma vengono tirati con forza verso i poli opposti della cellula da una struttura a forma di fuso (il fuso mitotico). Ora ogni metà della cellula ha un set completo di cromosomi.
4. **Telofase:** ai due poli della cellula, i cromosomi si "srotolano" e tornano a essere meno compatti. Attorno a ciascun gruppo di cromosomi si riforma una nuova membrana nucleare. Ora ci sono due nuclei distinti all'interno della stessa cellula.

Fase 3: Citodieresi (la divisione fisica)

È l'atto finale. La membrana cellulare inizia a stringersi al centro, come una cintura che viene tirata, fino a dividere completamente il citoplasma e a formare due nuove cellule figlie, più piccole ma geneticamente identiche alla cellula di partenza, pronte a ricominciare il ciclo.

Quando il sistema si rompe: Il cancro è l'esempio più drammatico di cosa succede quando questo sistema di controllo si guasta. Le cellule tumorali ignorano i segnali esterni e i check-point interni, dividendosi in modo incontrollato e senza sosta.

Notiamo, per concludere questo paragrafo, che le cellule staminali, invece, sono un caso particolare: hanno la capacità unica di dividersi e generare sia una nuova cellula staminale (per mantenere la "riserva"), sia una cellula che si differenzia e diventa un tipo cellulare specifico (per esempio una cellula della pelle o del sangue).

Un metodo “archeologico”

Jonas Frisen, biologo molecolare che presta attività presso il Karolinska Institute di Stoccolma, per scoprire quanto sono vecchie le cellule di organi e tessuti si è avvalso di un sistema utilizzato da tempo nell'archeologia e nella paleontologia: il metodo del carbonio 14.

Si tratta di un metodo di datazione di materiali di origine organica, messo a punto tra il 1945 e il 1955 dal chimico statunitense Willard Libby.

Il carbonio è un elemento che fa parte di tutta la materia vivente e si trova in natura sotto forma di vari isotopi (cioè atomi), come, per esempio il carbonio 12 e il carbonio 13 e lo stesso carbonio 14.

Ogni essere vegetale respira anidride carbonica, che è composta da ossigeno e carbonio. Una parte di carbonio è radioattiva (C^{14}), mentre la maggior gran parte (come avviene per il C^{12}) non lo è.

Tutti i vegetali, quindi, incorporano carbonio radioattivo.

Gli animali, compreso quindi l'uomo, cibandosi di vegetali o di altri esseri animali che hanno mangiato vegetali, assumono il C^{14} . Con la morte della pianta o dell'animale, il carbonio radioattivo che lo impregna diminuisce, sempre di più col passare del tempo.

Occorrono in media 5730 anni affinché il C^{14} presente in una creatura morta o in un oggetto da questa ricavato si dimezzi, 11.460 perché si riduca ad un quarto, 17.200 a un ottavo. Stabilendo, con una serie di calcoli matematici, quanto C^{14} si trova in un corpo al momento dell'esperimento, si può individuare l'anzianità del campione sottoposto a radiodatazione.

Lo studioso Frisen ha analizzato la quantità di carbonio radioattivo nei tessuti delle persone che ha preso in considerazione nel corso della sua ricerca, partendo dal presupposto che tra gli anni Cinquanta e Sessanta le persone respirarono carbonio radioattivo in una certa quantità, dal momento che questo era presente nell'atmosfera in seguito agli esperimenti nucleari effettuati in quegli anni.

Analizzando quindi, la quantità di C^{14} in tutti i tessuti, il ricercatore ha potuto stabilire che alcune cellule si rinnovano più in fretta, altre più lentamente.



Il calendario del corpo

Ecco con quale velocità si rinnovano i vari organi del corpo.

Alcuni giorni: l'epitelio intestinale

Lo strato di cellule superficiali che riveste l'interno dell'intestino tenue e crasso è costantemente esposto ad acidi digestivi, attrito meccanico con il cibo e miliardi di batteri. Per resistere a questo ambiente ostile, si rinnovano a una velocità incredibile: 3- 5 giorni.

Due settimane: la pelle

In questo arco di tempo si rinnovano le cellule della pelle, il tessuto che ricopre tutto il corpo e ha la funzione di difendere l'organismo dalle aggressioni esterne. Le cellule cutanee sono tra quelle di cui si conosce meglio il ciclo vitale.

Esse sono prodotte dallo strato basale, cioè dalla zona più profonda dell'epidermide e affiorano poco alla volta, sostituendo le cellule vecchie che muoiono e cadono.

Tre mesi: i globuli rossi

Vivono più a lungo i globuli rossi, cellule del sangue ricche di emoglobina, la sostanza che serve per formare il ferro e alla quale devono la loro particolare colorazione.

I globuli rossi sono prodotti dal midollo osseo, entrano nel circolo sanguigno e vi restano circa 120 giorni, quindi muoiono. La quantità di emoglobina che contengono viene trasformata dal fegato in bilirubina, che è poi eliminata attraverso le urine.

Un anno-un anno e mezzo: il fegato

È la ghiandola più voluminosa dell'organismo e svolge una serie di funzioni complesse: produce importanti cellule del sangue, come i globuli rossi e crea enzimi fondamentali per lo svolgimento del processo digestivo. In base agli studi svolti, tutto il tessuto che compone il fegato si rinnoverebbe completamente ogni 300-500 giorni circa, quindi nel giro di un anno e mezzo al massimo.

Dieci anni: lo scheletro

Fino ai 18-20 anni circa le ossa del corpo umano sono impegnate soprattutto a crescere e a raggiungere le dimensioni “definitive”. In età adulta, lo scheletro resta uguale a se stesso per circa dieci anni, quindi le cellule del tessuto osseo (osteociti e osteoblasti) più vecchie vengono sostituite da cellule nuove.

Quindici anni: i muscoli

Il tessuto muscolare ha la funzione di reggere l'impalcatura ossea e di consentire alle ossa di assumere le varie posizioni. Del tessuto muscolare fanno parte anche i tendini, sottili legamenti che ancorano i muscoli alle ossa stesse.

Il tessuto muscolare andrebbe incontro a una mutazione completa nel giro di quindici anni e un mese, dopodiché le cellule inizierebbero a essere sostituite da altri elementi nuovi.

Sedici anni: l'intestino

Mentre l'epitelio, come abbiamo visto, si rinnova in pochi giorni, le componenti strutturali più profonde dell'intestino, come le cellule muscolari, i nervi e il tessuto connettivo, sono molto più stabili e hanno un ciclo di vita di molti anni.

Per fare un'analogia è come se l'epitelio fosse l'asfalto di una strada, che si usura rapidamente e deve essere ripassato o sostituito ogni pochi anni. Mentre la parte sottostante è la fondazione della strada ed è costruita per durare decenni e non viene toccata durante la manutenzione ordinaria.

La tabella seguente riassume la tempistica del rinnovamento cellulare.

Tessuto / Organo	Tempo medio di rinnovo
Epitelio	3-5 giorni
Pelle	~2 settimane
Globuli rossi	~120 giorni
Fegato	~1-1,5 anni
Scheletro	~10 anni
Muscoli	~15 anni
Intestino (struttura)	~16 anni

Secondo il ricercatore svedese, il segreto di questo rinnovamento continuo sta nella presenza delle cellule staminali, cellule che si trovano in tutti i tessuti e che hanno la capacità di rigenerarsi, andando a costituire nuovi strati del tessuto vecchio.

La capacità delle staminali di dare luogo a nuovi tasselli di tessuto diminuisce.

Ecco perché la grande speranza di molti ricercatori sta proprio nell'utilizzo delle cellule staminali: queste, impiantate in un organo vecchio o malato, potrebbero dare luogo a un nuovo strato di cellule sane.

Come mantenere sane le cellule

Non si sa ancora se adottando certi sistemi alimentari e uno stile di vita più sano sia possibile influire sul ritmo con cui le cellule del corpo nascono, vivono e muoiono. È però assodato che è possibile mantenere, se non più giovani, sicuramente più sani i tessuti, contrastano il processo di ossidazione da parte dei radicali liberi.

I radicali liberi sono sostanze che il corpo produce normalmente durante il processo di respirazione e di utilizzazione dell'energia derivata dai cibi. Nonostante siano “naturali”, i radicali liberi sono nocivi, perché hanno la capacità di legarsi alle cellule di tutti i tessuti, danneggiandone la struttura.

Ma...ad un certo punto questo processo di ringiovanimento termina, determinando l'invecchiamento cellulare. Quando pensiamo all'invecchiamento, di solito ci vengono in mente rughe, capelli bianchi o acciacchi vari. Ma in realtà tutto comincia nelle cellule. Ogni cellula ha un suo “orologio interno”: non può dividersi all'infinito, a un certo punto entra in uno stato chiamato senescenza cellulare.

Immaginala così: la cellula non muore subito, ma è come se fosse andata in pensione. Non lavora più come prima, non si divide, e in più rilascia segnali chimici che possono influenzare le vicine. Alcuni di questi segnali sono utili, altri invece contribuiscono all'invecchiamento dei tessuti.

Perché succede? Ci sono diversi motivi:

- I telomeri, cioè i “cappucci” che proteggono i cromosomi, si accorciano a ogni divisione cellulare. Quando diventano troppo corti, la cellula riceve un chiaro messaggio: “Stop, è ora di fermarsi”.
- Con il tempo si accumulano danni al DNA, causati da stress ossidativo, radiazioni ionizzanti o semplicemente errori casuali.
- Anche il metabolismo stesso produce scorie che a lungo andare intossicano la cellula.

E qui arriva la parte affascinante: la senescenza non è solo un problema. È anche un meccanismo di difesa: impedisce a cellule potenzialmente pericolose (per esempio con DNA troppo danneggiato) di continuare a dividersi e diventare tumorali. È un po' come un freno di sicurezza. Il rovescio della medaglia è che,

accumulandosi, queste cellule senescenti indeboliscono i tessuti: la pelle perde elasticità, gli organi funzionano meno bene, il sistema immunitario si indebolisce aumentando il rischio di malattie. E' come se l'organismo umano avesse una data di scadenza inscritta dentro di sé. E' il processo ineluttabile della vita: si nasce e poi si muore.

Comunque è ormai accertato che solo un terzo dei fattori che determinano l'invecchiamento è di natura genetica, mentre i restanti due terzi dipendono da fattori esterni e modificabili. Uno stile di vita sano, che includa una dieta equilibrata ricca di antiossidanti (come polifenoli e quercetina), attività fisica regolare e restrizione calorica, può diminuire gli effetti dell'invecchiamento legati anche alla senescenza cellulare.

Dissoluzione finale

*Nasce l'uomo a fatica, ed è rischio di morte il nascimento
Tutto è polvere, e polvere ritorna." (Giacomo Leopardi)*

E' interessante, infine, notare che quando una persona muore, il corpo inizia a decomporsi a causa dell'assenza di ossigeno e della cessazione delle funzioni vitali, che permette ai processi biologici e chimici naturali di prendere il sopravvento. La decomposizione avviene in più fasi, e il risultato finale dipende dall'ambiente (es. sepoltura, esposizione all'aria, cremazione, ecc.). Ecco cosa succede in generale:

Autolisi e putrefazione:

Subito dopo la morte, le cellule iniziano a rompersi (autolisi) a causa della mancanza di ossigeno, rilasciando enzimi che degradano i tessuti.

I batteri presenti nell'intestino e nell'ambiente iniziano la putrefazione, scomponendo i tessuti molli (muscoli, organi, ecc.). Questo processo produce gas come anidride carbonica (CO₂), metano (CH₄), idrogeno solforato (H₂S) e vapore acqueo, insieme a composti organici volatili che causano l'odore tipico della decomposizione.

Rilascio di gas e liquidi:

Durante la putrefazione, i gas si accumulano nel corpo, causando gonfiore, e vengono poi rilasciati nell'ambiente. Il vapore acqueo è prodotto dalla degradazione dei tessuti, che contengono circa il 60-70% di acqua nel corpo umano.

I liquidi corporei si decompongono o evaporano, contribuendo alla perdita di massa.

Degradazione dei tessuti molli:

I tessuti molli (pelle, muscoli, organi) vengono consumati da batteri, funghi e, in alcuni casi, insetti (come larve di mosche). Questo riduce il corpo a componenti più semplici.

Rimane lo scheletro e i minerali:

Dopo che i tessuti molli sono stati decomposti (in un periodo che varia da settimane a anni, a seconda delle condizioni ambientali), rimangono le ossa, che sono composte principalmente da minerali (come calcio e fosforo, sotto forma di idrossiapatite) e una piccola quantità di materia organica (collagene).

Le ossa possono durare anni o secoli, ma anche queste si degradano lentamente, riducendosi a polvere in ambienti naturali nel corso di tempi molto lunghi.

Alla fine, ciò che rimane sono principalmente minerali dalle ossa, che possono pesare solo pochi etti.



Cause principali di morte nel mondo e in Italia

a cura di Giancarlo Buccella

La presente tabella è stata elaborata con i dati forniti dalle varie organizzazioni mondiali e nazionali con riferimento agli anni 2016 - 2019

Popolazione mondiale circa 8 miliardi (2023)

Causa	nel mondo	in Italia
FAME	8.000.000	-----
Inquinamento ARIA (indoor e outdoor)	7.000.000	80.000
Fumo	7.000.000	90.000
Incidenti stradali	1.300.000	3.000
Cardiopatie e ictus	18.000.000	170.000
Tumori	10.000.000	180.000
Influenza stagionale	5.000.000 (500 000 dirette)	10.000 (400 dirette)
Malattie polmonari	3.000.000	40.000
Infezioni polmonari	3.000.000	20.000
Diabete	1.600.000	20.000
Malattie diarroiche	1.500.000	300
Tubercolosi	1.600.000	500
Demenze (Alzheimer)	6.000.000	27.000
HIV/AIDS	1.000.000	500
Suicidio	800.000	4.000
Altro		
COVID (anni 2020-2021)	15.000.000 (7 ml dirette)	200.000

La vita media nel mondo è 73 anni, in Italia 83 anni.

	Morti (anno 2022)	Nati (anno 2022)
Mondo	55 milioni	130 milioni
Italia	700 mila	400 mila

Ogni anno la popolazione mondiale aumenta di circa 80 milioni di persone.

Ogni anno la popolazione italiana diminuisce di circa 300 mila di persone.

Con questo andamento fra 10 anni la popolazione mondiale raggiungerà circa 10 miliardi di persone, mentre quella italiana diminuirà di circa 3 milioni, passando dai 58 milioni attuali a 55 milioni.

Se per ipotesi rimarrebbe questo andamento per i prossimi 2 secoli, cioè senza che ci fosse rimpiazzo di immigrati, fra 175 anni la popolazione sarebbe di solo 10 milioni, e fra 190 anni la popolazione italiana sarebbe completamente scomparsa. Pur ribadendo che questa è una proiezione puramente matematica e teorica, basata su un'ipotesi molto semplificata e irrealistica nel lungo termine, comunque ci mette di fronte ad uno scenario che occorre considerare.

Principali pandemie del XX secolo

1918: la Spagnola (H1N1) - circa 50 milioni di morti (500 milioni di contagiati)

1957: l'Asiatica (H2N2) - circa 1.5 milioni di morti

1968: Influenza Hong Kong (H3N2) - circa 2 milioni di morti (circa 10.000 in Italia)

Il problema della fame...un problema morale!



Nonostante alcuni segnali di miglioramento a livello globale, la fame nel mondo rimane una crisi persistente che affligge centinaia di milioni di persone. Secondo stime recenti, nel 2024 circa 673 milioni di persone, pari all'8,2% della popolazione mondiale, hanno sofferto la fame. Sebbene questo rappresenti un leggero calo rispetto agli anni precedenti, il numero rimane significativamente superiore ai livelli pre-pandemici, evidenziando le profonde cicatrici lasciate dalla crisi del COVID-19.

Le cause principali: un intreccio di fattori

Le radici della fame sono complesse e interconnesse. Tra i principali fattori che contribuiscono a questa piaga globale vi sono:

- **Disuguaglianze:** disuguaglianze economiche e sociali persistenti, sia a livello nazionale che globale, limitano l'accesso alle risorse, all'istruzione e alle opportunità, intrappolando le persone in un ciclo di povertà e fame.
- **La trappola della povertà.** Le persone che vivono in condizione di povertà estrema non hanno la possibilità di nutrirsi in maniera adeguata. Non nutrendosi adeguatamente, non hanno le forze necessarie per svolgere nessun tipo di lavoro e quindi non possono procurarsi cibo. Questa è la trappola della povertà. Un circolo vizioso da cui è difficile uscire.
- **Mancanza d'investimenti nel settore dell'agricoltura.** Strade in buone condizioni, strutture e magazzini, sistemi di irrigazione, macchinari: a causa della povertà, i Paesi del Terzo mondo non hanno la possibilità di investire nell'agricoltura. Come conseguenza, il costo del trasporto è eccessivo, non c'è disponibilità di acqua potabile, c'è carenza di scorte di cibo.
- **Condizioni climatiche.** Alluvioni, lunghissimi periodi di siccità, tempeste tropicali. Tutte queste calamità si stanno verificando con frequenza e violenza sempre maggiori. E con disastrose conseguenze sui Paesi colpiti, spesso molto poveri. Così il problema della fame non può fare altro che aggravarsi.
- **Guerre e conflitti.** I rifugiati scappano da sanguinose guerre e conflitti civili che li hanno privati di tutto: di una casa, degli affetti, di qualsiasi speranza di avere un futuro. In guerra, il cibo diventa un'arma. Spesso i soldati distruggono le scorte di cibo dei loro nemici. I campi vengono cosparsi di mine e le fonti d'acqua inquinate.

Oltre questa analisi oggettiva occorre domandarsi come mai pur essendoci nel mondo cibo a sufficienza per sfamare tutti, questo non avvenga. La causa principale è quindi l'ingiusta distribuzione delle risorse, frutto di strutture economiche sbilanciate.

Viviamo in una società che spreca enormi quantità di cibo, mentre altri muoiono di fame. Lo spreco e l'indifferenza sono forme moderne di ingiustizia contro i più deboli.

La fame è uno "scandalo", perché non nasce da scarsità assoluta ma dall'indifferenza dei ricchi verso i poveri.

La fame non colpisce in modo uniforme. L'Africa è il continente più colpito, con oltre il 20% della popolazione che soffre la fame, equivalente a 307 milioni di persone. In particolare, la situazione è critica in Africa a sud del Sahara. Anche l'Asia occidentale sta vivendo un peggioramento della situazione, con il 12,7% della popolazione colpita.

Al contrario, si registrano segnali di miglioramento in Asia meridionale e in America Latina. In Asia, la prevalenza della denutrizione è diminuita, sebbene la regione ospiti ancora il maggior numero di persone che soffrono la fame in termini assoluti. In America Latina e nei Caraibi si osserva una tendenza positiva, con una diminuzione del numero di persone denutrite.

La fame e la malnutrizione hanno conseguenze profonde e durature, in particolare sui bambini. La denutrizione infantile può causare ritardi nella crescita, problemi di sviluppo cognitivo e un sistema immunitario indebolito, aumentando il rischio di mortalità. Nel 2022, 148 milioni di bambini sotto i cinque anni presentavano ritardi nella crescita a causa della malnutrizione cronica.

Uno sguardo al futuro: l'Obiettivo ONU "Fame Zero" a rischio

Le proiezioni per il futuro sono preoccupanti. Si stima che nel 2030 quasi 600 milioni di persone potrebbero essere ancora cronicamente denutrite. Questo dato rende sempre più difficile il raggiungimento dell'Obiettivo dell'ONU di Sviluppo Sostenibile 2 (Fame Zero), entro il 2030, che mira a porre fine alla fame, raggiungere la sicurezza alimentare, migliorare la nutrizione e promuovere un'agricoltura sostenibile. Per invertire questa tendenza, sono necessari sforzi concertati a livello globale per affrontare le cause profonde della fame, promuovere sistemi alimentari sostenibili e resilienti e garantire a tutti l'accesso a cibo sufficiente, sicuro e nutriente.

Nel mondo ci sono circa 700 milioni di persone che soffrono la fame

quasi 9% della popolazione mondiale (c'è stato un aumento di 10 milioni di persone in un solo anno)

persone affette da grave insicurezza alimentare: **800 milioni**

persone affette da moderata o grave insicurezza alimentare: **2 miliardi**

Circa 3.5 miliardi di persone sono interessate dal problema della fame...

cioè circa la metà della popolazione mondiale!!

Il problema dell'inquinamento



L'inquinamento rappresenta oggi una delle principali minacce per la salute pubblica a livello globale. Secondo i dati dell'Organizzazione Mondiale della Sanità (OMS), circa 12,6 milioni di persone muoiono ogni anno a causa dell'inquinamento ambientale, pari a una persona su quattro tra tutte le morti evitabili legate a fattori ambientali. Questo numero impressionante include decessi causati da inquinamento dell'aria, dell'acqua e del suolo, nonché dall'esposizione a sostanze chimiche nocive.

L'inquinamento dell'aria rappresenta la principale fonte di rischio, contribuendo a malattie respiratorie e cardiovascolari, ictus, cancro e complicazioni legate a infezioni respiratorie. In particolare, circa il 90% della popolazione mondiale respira aria che supera i limiti di sicurezza definiti dall'OMS, esponendo miliardi di persone a rischi cronici.

Anche l'inquinamento dell'acqua e del suolo ha un impatto drammatico, soprattutto nei Paesi in via di sviluppo, dove l'accesso a risorse pulite è limitato. L'acqua contaminata e i terreni avvelenati da sostanze chimiche o rifiuti industriali portano a malattie come diarrea, avvelenamento da metalli pesanti, cancro e altre patologie croniche.

Le cause principali dell'inquinamento sono molteplici e includono:

L'industrializzazione incontrollata e le emissioni di sostanze chimiche nocive.

Trasporti e combustione di combustibili fossili, responsabili di elevate concentrazioni di particolato e gas tossici nell'aria.

Smaltimento inadeguato dei rifiuti, sia solidi che liquidi, che contaminano acqua e suolo.

Deforestazione e degrado ambientale, che riducono la capacità della natura di assorbire sostanze inquinanti.

Il problema è globale e richiede un impegno coordinato tra governi, industrie e cittadini per ridurre l'inquinamento e mitigare i suoi effetti sulla salute. Interventi efficaci possono includere l'adozione di tecnologie più pulite, la promozione di energie rinnovabili, il miglioramento della gestione dei rifiuti e politiche più rigorose per la tutela dell'ambiente.

Le regioni più colpite dall'inquinamento ambientale

1. Asia Meridionale e Orientale

India: circa 2,3 milioni di morti annuali attribuibili all'inquinamento, rendendola la nazione con il maggior numero di decessi legati a fattori ambientali.

Cina: circa 1,8 milioni di morti annuali.

Pakistan: circa 220.000 morti annuali, con il 93% della popolazione esposta a livelli di inquinamento superiori ai limiti raccomandati dall'OMS.

Bangladesh: circa 150.000 morti annuali.gahp.org

2. Africa Sub-Sahariana

Nigeria e Etiopia sono tra i paesi più colpiti, con livelli di inquinamento atmosferico che superano frequentemente i limiti di sicurezza.

3. America Latina

Brasile e Messico affrontano sfide significative legate all'inquinamento atmosferico, soprattutto nelle aree urbane densamente popolate.

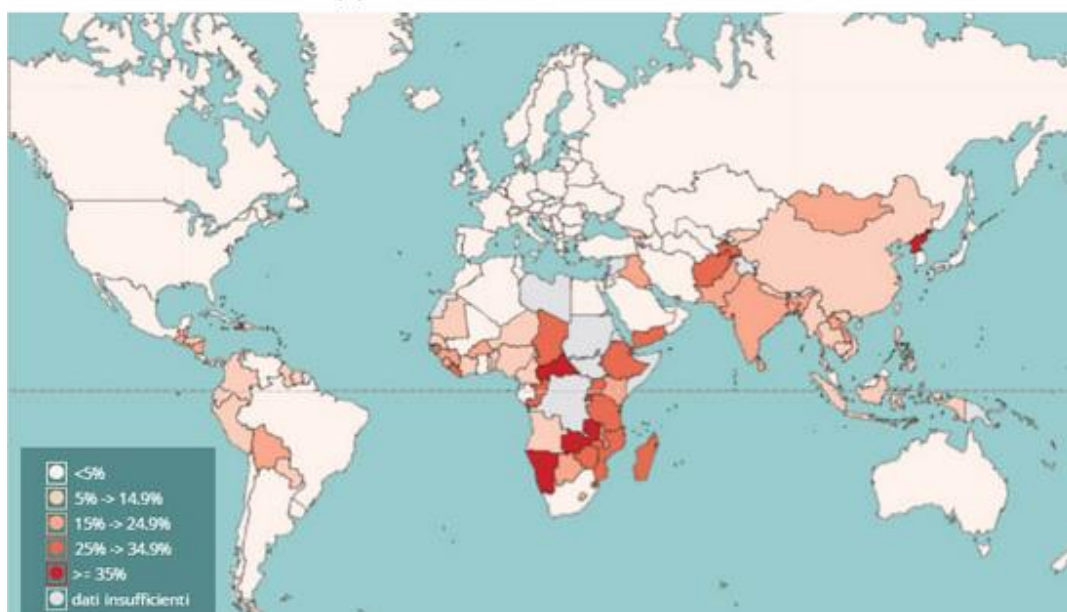
4. Europa

Polonia e Romania registrano alti livelli di inquinamento atmosferico, con conseguenti impatti sulla salute pubblica.

5. Nord America

Stati Uniti: circa 197.000 morti annuali legate all'inquinamento ambientale.

La mappa FAO della fame: 2014-2016



Eserciti ed armamenti nel mondo

a cura di Giancarlo Buccella

“La guerra non determina chi ha ragione, ma solo chi resta.” (Bertrand Russell)



*“Non so con quali armi si combatterà la Terza guerra mondiale,
ma la Quarta sarà combattuta con bastoni e pietre.” (Albert Einstein)*

La tendenza ad armarsi e combattere risale alla preistoria, molto prima che esistessero gli “stati” in senso moderno. Se ci si pensa, le prime “armi” non erano altro che strumenti di caccia riadattati: lance, bastoni, pietre scheggiate. Poi, via via, gli esseri umani hanno imparato a produrre strumenti sempre più efficaci, e non solo per difendersi dagli animali, ma anche per affrontare altri gruppi umani.

I motivi erano già simili a quelli di oggi:

Risorse: caccia, territori di pascolo, accesso all’acqua. In un mondo di scarsità, combattere era spesso questione di sopravvivenza.

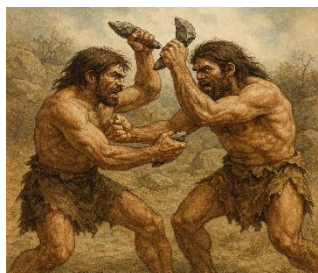
Sicurezza: difendere il proprio clan da incursioni di altri.

Prestigio e potere personale: il guerriero abile o il capo che guidava con successo un conflitto guadagnava status.

Identità di gruppo: la guerra cementava l’unità interna (noi contro loro).

Poi, con l’agricoltura e le prime civiltà, le armi e le guerre si sono fatte più organizzate: eserciti, mura, fortificazioni, strategie. Dall’Età del Bronzo in poi, l’armamento è diventato anche un modo per mostrare ricchezza e sviluppo tecnologico (pensiamo ai carri da guerra o alle spade di ferro).

In fondo, si potrebbe dire che la storia dell’umanità è anche la storia delle sue armi: dall’ascia di pietra all’atomica. Eccone un breve resoconto.



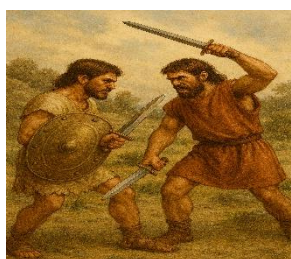
Età della pietra (dalla comparsa dell’uomo, circa 2 milioni di anni fa a circa il 5000 a.C.).

All’inizio, nella preistoria, le prime armi non erano altro che pietre affilate, bastoni e lance di legno. Servivano per cacciare, ma ben presto furono usate anche contro altri gruppi umani: la lotta era per l’acqua, i territori di caccia, la sopravvivenza stessa.



Età del rame (5000 – 3000 a.C.).

Venivano usate spade corte, pugnali e lance, ma il rame è morbido, quindi tendeva a piegarsi o rompersi facilmente. Anche archi e frecce venivano impiegati, soprattutto per raid o difesa a distanza. Clave e bastoni erano altresì strumenti semplici ma efficaci, soprattutto nelle comunità più piccole.



Età del Bronzo (dal 3000 al 1200 a.C.), l’uomo scoprì come fondere i metalli e nacquero le prime spade e pugnali resistenti. I carri da guerra comparvero nelle pianure del Medio Oriente e cambiarono completamente il modo di combattere: la guerra diventava organizzata, non più solo uno scontro caotico.



Età del Ferro (dal 1200 a.C. al 500 a.C.), in cui le armi si fecero più solide e affilate. Le legioni romane, con disciplina e organizzazione, imposero il loro dominio su gran parte del mondo conosciuto. Qui la guerra era ormai parte integrante dello Stato, strumento di conquista e di potere.



Età Antica (dal 500 al a.C. al 476 d.C.)

La guerra diventa qualcosa di organizzato, tecnico, molto diversa dalle scaramucce dell'età del rame o del bronzo. Le guerre si decidevano spesso in scontri diretti tra eserciti schierati in campo aperto. Si usavano formazioni militari ben precise (falange greca, legioni romane, ecc.), dove la disciplina contava più del singolo eroe. Si usavano torri d'assedio, arieti, catapulte, trabucchi rudimentali. Gli

scontri avvengono anche con le navi, importanti soprattutto per Greci, Cartaginesi e Romani. Le navi da guerra (triremi, quinqueremi) erano dotate di rostro per speronare le imbarcazioni nemiche.



Medioevo (dal 476 al 1492), lo scenario cambiò ancora: cavalieri corazzati lanciati al galoppo, castelli che dominavano le campagne e guerre d'assedio che potevano durare mesi. L'arco lungo inglese e la balestra segnarono una svolta, capaci di abbattere anche i più temuti cavalieri. Intorno alla fine del 1200 arrivò dall'Oriente una scoperta destinata a rivoluzionare tutto: la polvere da sparo.



Età Moderna, (dal 1492 al 1789)

I castelli non bastavano più: i cannoni li spazzavano via. Nacquero i primi grandi eserciti: non si trattava più solo di contadini arruolati per la guerra; gli stati iniziarono a mantenere soldati stipendiati tutto l'anno. I cannoni divennero parte integrante delle campagne militari, non solo strumenti d'assedio occasionali. Le batterie erano

coordinate e supportate da ingegneri e specialisti. Il moschetto sostituì l'arco e i mari si riempirono di galeoni armati di cannoni, trasformando le battaglie navali in scontri titanici. L'Età Moderna vide la nascita degli stati-nazione come principali attori militari, con conflitti su territori, colonie e influenza politica. In pratica, tra il 1492 e il 1789 la guerra si professionalizzò, diventò più tecnologica e richiese organizzazione centrale, segnando il passaggio dal medioevo alla guerra moderna.

Età contemporanea (dal 1789 ad oggi).



Nell'Ottocento, la rivoluzione industriale portò la produzione in serie di fucili e cannoni moderni. Le mitragliatrici comparvero sui campi di battaglia e l'idea stessa di guerra cambiò: non era più fatta solo da soldati, ma coinvolgeva intere nazioni, industrie e popolazioni. Ora un esercito poteva equipaggiare migliaia di soldati con fucili a ripetizione, mitragliatrici e cannoni, tutti identici e più affidabili. L'aumento della precisione e della rapidità di fuoco rese i conflitti molto più sanguinosi; le trincee e le fortificazioni improvvisate divennero necessarie. Ferrovie e

navi a vapore permisero di spostare truppe e rifornimenti più velocemente, trasformando guerre locali in conflitti su scala nazionale o addirittura continentale.



Il Novecento è il secolo delle guerre mondiali. La Prima introdusse le trincee, i carri armati, i gas tossici e l'aviazione militare. La Seconda vide un salto tecnologico ancora più grande: bombardieri, portaerei, radar, armi automatiche, fino al punto più estremo con la bomba atomica su Hiroshima e Nagasaki. Dopo il 1945, la Guerra Fredda non si combatté mai apertamente tra le superpotenze, ma scatenò una corsa agli armamenti nucleari e spaziali senza precedenti.

Oggi, nel ventunesimo secolo, la guerra ha preso una dimensione nuova. I droni sorvolano i cieli senza pilota, i computer diventano armi invisibili per il cyberwarfare, i missili guidati colpiscono bersagli con precisione chirurgica. Lo spazio e il cyberspazio sono i nuovi campi di battaglia, mentre i conflitti non sono più solo tra stati, ma anche contro reti terroristiche e gruppi armati irregolari.

Se la guardiamo la questione in chiave religiosa e simbolica, la guerra nasce dal cuore umano segnato dal peccato originale, cioè da quella ferita interiore che porta l'uomo a desiderare potere, dominio, sopraffazione. In questa prospettiva non sono tanto le armi a causare la guerra, ma i desideri distorti che si annidano dentro di noi: invidia, paura, orgoglio, avidità. Le armi diventano solo strumenti nelle mani di passioni già violente.

Anche la Bibbia, già nelle prime pagine, racconta la violenza come frutto del peccato: Caino che uccide Abele, la torre di Babele costruita per superbia, i popoli che si scontrano e si dividono.

Ad uno sguardo razionale è evidente che è come se l'umanità avesse “un difetto congenito” un “qualche cosa” che produce situazioni e fatti di male anziché di bene, perché bisogna pur ammettere che è insito nel cuore (o coscienza che dir si voglia) un criterio che giudica le sue azioni e in definitiva, tutto quello che accade, avendo come due fari: il Bene ed il Male. Ognuno capisce ad esempio che sfamare un bisognoso è un atto di bene, mentre non sfamarlo è un atto di male. Vivere in pace ed armonia fra tutti i popoli è un bene, farsi la guerra ed uccidersi a vicenda è (oltre che irrazionale) un male.

Questo “difetto congenito” per un cattolico ha un nome: peccato originale. È come se la guerra, ed il male in generale, fossero iscritti nella storia umana fin dall’inizio, non come destino inevitabile, ma come conseguenza di un cuore che, sedotto dal diavolo, si è staccato da Dio e dall’armonia originaria

Da un punto di vista più laico e psicologico, potremmo dire che la guerra nasce dai lati oscuri dell’essere umano: la paura dell’altro, la sete di controllo, la difficoltà a vivere in pace e in equilibrio con gli altri. Il “peccato originale”, tradotto in termini moderni, può essere visto come quella inclinazione interiore che ci porta a scegliere l’egoismo invece della cooperazione, del dialogo, della solidarietà.

Considerazione sulla situazione morale attuale

Viviamo in un’epoca di profonda contraddizione quando si tratta di guerra. Da un lato, la coscienza morale collettiva si è evoluta a tal punto da considerare il conflitto armato un fallimento etico e un inaccettabile spreco di vite umane. Dall’altro, continuiamo ad assistere a una corsa agli armamenti quasi rassegnata, giustificata da una logica pragmatica di sicurezza e deterrenza. Questa analisi cattura perfettamente il paradosso centrale del nostro tempo: rifiutiamo la guerra in linea di principio, ma la accettiamo come una possibilità concreta, un “male necessario” nel complesso scacchiere delle relazioni internazionali.

In passato, la guerra poteva essere ammantata di un’aura di eroismo e gloria, uno strumento quasi naturale per forgiare nazioni e affermare il proprio dominio. Oggi, quell’immagine è stata frantumata dalla brutalità delle immagini che i media diffondono in tempo reale. Le città ridotte in macerie, i volti dei civili e le colonne di profughi hanno spogliato la guerra di ogni romanticismo, mostrandola per quello che è: una catastrofe umanitaria. Questa esposizione diretta rende palese la sproporzione tra gli obiettivi geopolitici e il prezzo insopportabile pagato dalla popolazione.

Tuttavia, il ruolo dei media è ambivalente. Se da una parte alimentano la condanna morale, dall’altra possono diventare potenti strumenti di “information warfare”. La propaganda, la disinformazione e le narrazioni volte a demonizzare il nemico possono manipolare l’opinione pubblica, rendendo un conflitto non solo accettabile, ma persino desiderabile agli occhi di alcuni.

Nonostante la diffusa avversione, la logica della “pace attraverso la forza” continua a dominare le strategie di molte nazioni. Gli Stati si sentono in dovere di armarsi per difendere la propria sovranità, proteggere i propri interessi e mantenere un equilibrio di potere che, paradossalmente, dovrebbe prevenire conflitti su larga scala.

Questa visione è sostenuta da dati concreti: la spesa militare globale ha raggiunto livelli record, con un aumento registrato in tutte le principali aree geografiche. Nel 2023, ha toccato la cifra storica di 2.000 miliardi di dollari, segnando il nono anno consecutivo di crescita. Questo dimostra che, al di là delle dichiarazioni di principio, il mondo continua a investire massicciamente negli strumenti di distruzione, mosso da una logica di realismo politico che vede la forza militare come garanzia ultima di sicurezza.

In questo scenario, la diplomazia e la cooperazione internazionale vengono invocate come l’unica vera alternativa alla violenza. Tuttavia, la loro efficacia appare spesso limitata di fronte a crisi profonde e a un crescente multipolarismo che rende più difficile il raggiungimento di un consenso. Sebbene vi siano sforzi continui per prevenire e risolvere i conflitti attraverso il dialogo, il “fallimento” della diplomazia è un’accusa che risuona frequentemente quando le armi prendono il sopravvento.

Nella tabella seguente viene mostrato lo stato degli armamenti nel mondo, (riferito al 2024).

Eserciti e armamenti nel mondo

	popolazione (milioni)	personale militare attivo (milioni)	aerei totali	aerei da da combattim.	carri armati	navi	testate nucleari	budget (miliardi di dollari)
Usa	330	1,4	13.000	5.700	6.000	400	5.000	990
Russia	150	1,0	4.000	1.500	22.000	350	5.500	149
Cina	1400	2,2	3.000	1.000	13.000	700	500	314
India	1300	1,5	2.000	700	4.000	300	150	88
Giappone	126	0,2	1.500	600	1.000	130		55
Corea del sud	50	0,5	1.600	800	2.600	170		40
Francia	70	0,2	1.200	600	400	100	300	60
Regno Unito	65	0,2	800	300	300	80	200	80
Pakistan	200	0,6	1.600	300	2.200	200	160	7
Brasile	200	1,7	700	200	400	100		30
Italia	60	0,3	800	400	200	150		30
Egitto	100	0,4	1.000	300	2.100	300		4
Turchia	80	0,4	1.000	500	3.000	200		9
Corea del nord	25	1,2					50	4
Israele	9	0,2	350	300	3.500	17	90	17
Totale							12.000	2.200

(Rif. : Stockholm International Peace Research Institute (SIPRI), l'International Institute for Strategic Studies (IISS) e il sito specializzato Global Firepower)

Leggenda:

Personale Militare Attivo: Non include riservisti o forze paramilitari, che possono aumentare significativamente il totale in caso di mobilitazione. Ad esempio, Israele può mobilitare rapidamente centinaia di migliaia di riservisti.

Aerei Totali: Include tutte le tipologie di velivoli in dotazione alle forze armate (caccia, addestratori, trasporti, elicotteri, ecc.).

Aerei da Combattimento: Sottocategoria che include caccia, intercettori e aerei da attacco al suolo.

Carri Armati: Si riferisce principalmente ai carri armati da combattimento (MBT - Main Battle Tanks). Il numero di carri armati operativi per la Russia è una stima difficile a causa delle perdite nel conflitto in corso.

Navi: Il conteggio include tutte le tipologie di assetti navali (portaerei, sottomarini, fregate, corvette, pattugliatori, ecc.). La metodologia di classificazione può variare.

Testate Nucleari: Le cifre sono stime del totale dell'arsenale (testate dispiegate, di riserva e ritirate in attesa di smantellamento), basate principalmente sui dati del SIPRI.

Domanda retorica:

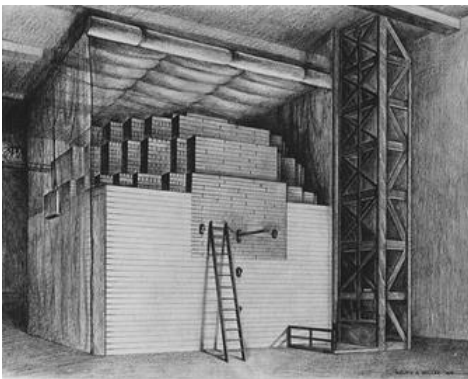
cosa si potrebbe fare con 2200 miliardi di dollari all'anno se venissero spesi anziché per le armi a fin di bene?

Secondo la Banca Mondiale, nel 2023, oltre 700 milioni di persone vivevano con meno di 1,90 USD al giorno, che rappresenta la soglia internazionale di povertà estrema. Questo significa che se si distribuisse equamente 2200 miliardi di dollari fra i 700 milioni di persone che soffre la fame, ciascuno avrebbe 3000 dollari all'anno, cioè circa 8 dollari al giorno. In questo scenario ipotetico il problema della fame sarebbe eliminato.

Le bombe nucleari

Da quando Einstein formulò la sua più famosa equazione ($E=mc^2$) gli scienziati iniziarono a interrogarsi se sarebbe stato possibile liberare l'enorme quantità di energia racchiusa nella materia stessa. Per secoli si era pensato all'atomo come a un mattone indivisibile, ma con l'avvento della fisica moderna divenne chiaro che il nucleo custodiva forze immense, di gran lunga superiori a quelle sprigionate dalle reazioni chimiche. Questa intuizione aprì la strada alla ricerca sulla fissione e, in seguito, sulla fusione nucleare: da un lato la possibilità di nuove e potenti fonti di energia, dall'altro il timore della distruzione legata alle armi atomiche.

Mentre in una reazione chimica, la somma delle masse degli atomi nei reagenti è uguale a quella dei prodotti: si tratta, infatti, di una semplice riorganizzazione dei legami elettronici, senza alcuna perdita o guadagno di massa misurabile, in una reazione nucleare, invece, questa uguaglianza non vale. La massa complessiva dei nuclei finali risulta leggermente inferiore rispetto a quella dei nuclei iniziali: la differenza, detta difetto di massa, è la parte che viene convertita in energia secondo la relazione di Einstein $E = mc^2$. È proprio questo fenomeno che rende le reazioni nucleari così potenti: anche una piccola quantità di massa corrisponde a un'enorme quantità di energia. Questo principio è alla base sia della fissione nucleare, in cui nuclei pesanti si spezzano in nuclei più leggeri liberando energia, sia della fusione nucleare, in cui nuclei leggeri si uniscono per formare nuclei più pesanti, con lo stesso straordinario rilascio energetico. Questa nuova e potente forma di energia fu inizialmente considerata per scopi civili, come una possibile fonte inesauribile di elettricità.



Fu Enrico Fermi e il suo gruppo di ricerca che nel 1942, realizzarono la prima reazione nucleare controllata in una pila di grafite a Chicago: un passo che mostrò che era possibile un uso civile di questa fonte di energia (oggi nel mondo vi sono circa 400 centrali atomiche che producono il 10% dell'energia elettrica).

Prima Pila atomica

Tuttavia, con l'avvicinarsi e poi l'esplosione della Seconda guerra mondiale, le pressioni politiche e militari spinsero la ricerca verso lo sviluppo di un ordigno nucleare: nacque così la bomba atomica. Questo episodio della storia mostra con grande chiarezza come una scoperta scientifica, frutto del desiderio di conoscenza, possa essere orientata tanto verso il bene dell'umanità quanto verso il male. La scienza, in sé, è neutrale: è l'uso che se ne fa a determinare se diventa strumento di progresso e di vita o di violenza e morte.



Il gruppo di ricercatori impegnati nel Chicago Pile-1

Quando parliamo di armi nucleari, ci riferiamo principalmente a due tipi: la bomba A (a fissione) e la bomba H (a fusione). Entrambe liberano una quantità di energia devastante, ma lo fanno sfruttando due processi opposti del mondo atomico: la divisione e l'unione.

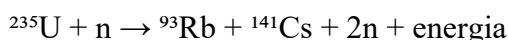
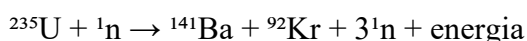
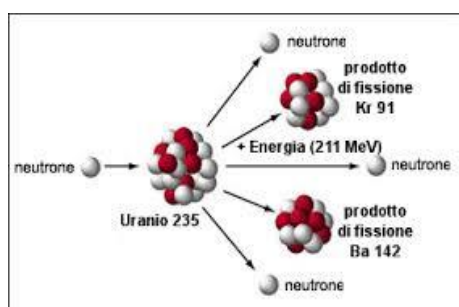
La Bomba A (a fissione): “divide et impera”

La fissione nucleare si innesca quando nuclei di atomi pesanti, tipicamente di uranio-235 o plutonio-239, vengono divisi dall'urto con neutroni. Questi neutroni iniziali possono provenire da una sorgente artificiale, un "innesco", inserita nel cuore del materiale, oppure da neutroni "spontanei" prodotti naturalmente da alcuni isotopi instabili presenti. Una volta che un neutrone colpisce un nucleo, questo si deforma e si frantuma in due nuclei più piccoli, noti come prodotti di fissione, che sono altamente instabili e radioattivi.

Questo processo di scissione rilascia una quantità enorme di energia, molto superiore a quella di qualsiasi reazione chimica, insieme a radiazioni e, crucialmente, a due o tre nuovi neutroni ad alta velocità. L'energia liberata si manifesta principalmente come energia cinetica dei frammenti di fissione e come radiazioni gamma.

È proprio il rilascio di questi nuovi neutroni che alimenta la fase successiva: se la quantità di materiale fissile è sufficiente a raggiungere la cosiddetta "massa critica", i neutroni appena emessi andranno a colpire altri nuclei di uranio-235 o plutonio-239. Ogni collisione riuscita provoca una nuova fissione, liberando a sua volta altra energia e ulteriori neutroni, che a loro volta colpiscono altri nuclei. Si genera così una reazione a catena che cresce in modo esponenziale. Se questo processo non viene controllato, come avviene nelle armi nucleari, l'energia si accumula in una frazione di secondo, portando a una colossale esplosione.

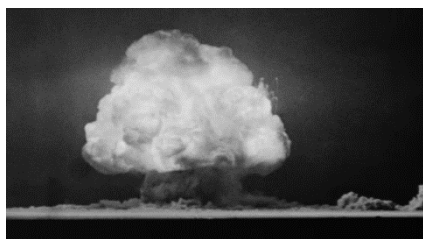
Nel processo di fissione di una bomba A possono avvenire diverse reazioni nucleari, eccone alcune:



Nelle reazioni che usano come combustibile l' U^{235} il numero medio di neutroni rilasciati è di circa 2.4, nel caso del P^{239} è di 2.9.

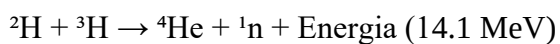
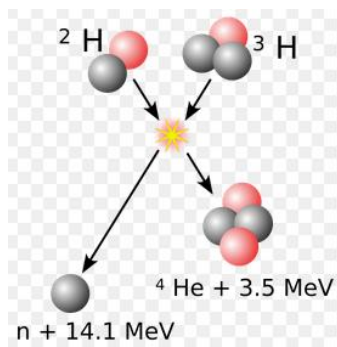
Mediamente l'energia rilasciata dalla fissione di un singolo atomo di U^{235} è di circa 200 MeV

(*) L'elettronvolt (eV) è un'unità di misura dell'energia che viene usata in ambito di fisica atomica, essa è pari all'energia acquistata da una carica elementare (carica dell'elettrone) attraversando una differenza di potenziale di 1 volt.: $1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.



Fotografia della prima esplosione atomica. (Alamogordo, 16 luglio 1945). Si trattò di un test, cui sarebbe seguito l'impiego effettivo su dei civili inermi di Hiroshima e Nagasaki (6 e 9 agosto 1945), causando circa 200000 vittime dirette, mentre le conseguenze indirette colpirono decine di migliaia di altre persone negli anni successivi.

La Bomba H (a fusione): “l'unione fa la forza”



La bomba H, o termonucleare, è molto più complessa e potente. Non si basa sulla divisione, ma sull'unione di atomi, un processo chiamato fusione nucleare. È lo stesso processo che alimenta il nostro Sole. Per funzionare, la bomba H ha bisogno di condizioni estreme: temperature e pressioni simili a quelle che si trovano al centro di una stella. E come si possono creare sulla Terra queste condizioni? La risposta è: facendo esplodere una bomba A. Inoltre, la fusione stessa produce neutroni ad alta energia, che possono contribuire a colpire altri nuclei o a potenziare la fase di fissione circostante.

Per l'innesco di una bomba H non occorrono neutroni ma una bomba A. Quando la bomba A esplode, genera per una frazione di secondo il calore e la pressione necessari per costringere gli atomi di idrogeno (in forme speciali chiamate deuterio e trizio) a fondersi tra loro. Quando questi atomi leggerissimi si uniscono per formarne uno più pesante, liberano una quantità di energia spaventosamente superiore a quella della fissione. Se osserviamo le due immagini mostrate si vede che per una singola reazione la fissione produce circa 15 volte più energia rispetto alla reazione di fusione (211 MeV contro 14.1 MeV).

Allora, perché la Bomba H è immensamente più potente? Il segreto non sta nell'energia per singola reazione, ma in due fattori cruciali: l'efficienza per massa e il numero di atomi nel combustibile.

Energia per Unità di Massa (l'efficienza)

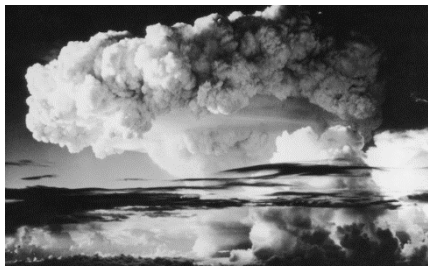
Questo è il punto più importante. Dobbiamo guardare a quanta massa viene "usata" per produrre quell'energia. Fissione: L'energia di 200 MeV viene liberata da un nucleo molto pesante, l'Uranio-235, che contiene 235 particelle (protoni e neutroni). Energia per particella: $200\text{ MeV} / 235\text{ particelle} \approx 0.85\text{ MeV per particella}$. Fusione: L'energia di 17.6 MeV viene liberata unendo nuclei leggerissimi: Deuterio (2 particelle) e Trizio (3 particelle), per un totale di 5 particelle.

Energia per particella: $17.6\text{ MeV} / 5\text{ particelle} \approx 3.5\text{ MeV per particella}$.

Conclusione: Ogni singola particella (protone o neutrone) coinvolta in una reazione di fusione è oltre 4 volte più "efficiente" nel produrre energia rispetto a una particella coinvolta nella fissione. Su una base "grammo per grammo" di combustibile, la fusione è molto più potente.

Più Atomi nel Serbatoio

Gli atomi di idrogeno (Deuterio, Trizio) sono estremamente più leggeri degli atomi di Uranio. Questo significa che: in un chilo di combustibile per la fusione ci sono molti, molti più atomi che in un chilo di combustibile per la fissione. Poiché ci sono molti più atomi disponibili per reagire, anche se ogni singola reazione rilascia meno energia, il numero totale di reazioni che avvengono in un dato quantitativo di materiale è talmente superiore da produrre un'esplosione finale enormemente più grande. Per usare un'analogia semplice: la fissione è come far cadere un'unica, gigantesca palla da demolizione contro un muro. La fusione è come sparare contro lo stesso muro milioni di proiettili ad altissima velocità. Ogni singolo proiettile ha meno energia della palla da demolizione, ma la somma totale dell'energia di tutti i proiettili è enormemente superiore e polverizza il muro in modo molto più efficace. Ecco perché la bomba H, pur basandosi su una reazione singola meno energetica, è un'arma di una categoria di potenza completamente diversa.



Fotografia della prima esplosione (test) di una bomba H
1 novembre 1952 - Atollo di Eniwetock,

Dopo la fine della Seconda Guerra Mondiale, al fine di aumentare la conoscenza delle bombe atomiche, vennero eseguiti numerosi test nucleari da parte delle potenze emergenti. Questi esperimenti non avevano soltanto un valore militare immediato, ma rappresentavano anche un'occasione per approfondire gli effetti fisici, chimici e ambientali delle esplosioni nucleari.

Tra il 1945 e il 1963, gli Stati Uniti furono la nazione che condusse il maggior numero di test atmosferici, sia nel Nevada che nelle isole del Pacifico, come le famose operazioni Trinity e Castle. Questi esperimenti permisero di verificare la potenza distruttiva delle bombe, studiare le ricadute radioattive e testare nuove tecnologie di detonazione. Parallelamente, l'Unione Sovietica avviò i propri esperimenti nucleari, a partire dal 1949, nel poligono di Semipalatinsk, in Kazakistan, mentre Regno Unito, Francia e Cina seguirono negli anni successivi, contribuendo alla cosiddetta corsa agli armamenti nucleari.

Gli scienziati coinvolti nei test erano interessati non solo agli aspetti militari, ma anche alle conseguenze sulla salute e sull'ambiente, osservando effetti come le radiazioni ionizzanti, le esplosioni d'onda e l'impatto sulle strutture civili e militari. Tuttavia, le preoccupazioni per la contaminazione ambientale e la diffusione delle radiazioni portarono alla firma del Trattato di Proibizione Parziale dei Test Nucleari (1963), che vietava gli esperimenti atmosferici, nello spazio e sott'acqua, spingendo le potenze a condurre la maggior parte dei test in ambienti sotterranei.

I test nucleari sotterranei non furono mai completamente vietati come categoria a sé stante, ma furono regolamentati da trattati successivi. Ecco la sequenza principale:

1. 1963 – Trattato di Proibizione Parziale dei Test Nucleari (PTBT): vietava i test atmosferici, nello spazio e sott'acqua, ma consentiva quelli sotterranei.
2. 1996 – Trattato di Proibizione Completa dei Test Nucleari (CTBT): vieta tutti i test nucleari, inclusi quelli sotterranei, ma il trattato non è ancora entrato in vigore completamente perché alcuni stati chiave non lo hanno ratificato. Infatti, la Corea del Nord dal 2006 al 2017 ha eseguito diversi test atomici sotterranei.

Ecco un quadro dei Test nucleari atmosferici:

- USA: tra il 1945 e il 1963, oltre 200 test in aria nel Nevada e nel Pacifico.
- URSS: tra il 1949 e il 1963, oltre 120 test in aria nel Kazakistan (Semipalatinsk) e nell'Artico.
- Altri paesi: Regno Unito, Francia, Cina fecero anche test in aria tra gli anni '50 e '70.

A tutt'oggi le misurazioni radiochimiche mostrano che sono ancora presenti in aria e nel suolo tracce, non significative dal punto di vista sanitario, di alcuni isotopi (soprattutto Cesio-137) del fallout radioattivo dovuto ai test atomici degli anni '60.

Il termine "bomba nucleare" (o arma nucleare) si riferisce genericamente a qualsiasi dispositivo esplosivo che sfrutta reazioni nucleari controllate, quali la fissione e/o la fusione, per rilasciare una quantità estremamente elevata di energia in un intervallo temporale molto breve. La potenza esplosiva di tali ordigni viene espressa in kiloton (kT), dove 1 kiloton corrisponde all'energia liberata dall'esplosione di mille tonnellate di tritolo equivalente (TNT).

- La potenza delle armi nucleari viene misurata in kilotoni (kt):

1 kt = mille tonnellate TNT

(Spesso si usa il suo multiplo: il megatone (Mt): 1 Mt = 1000 kt)

Viene fatta la seguente distinzione strategica a secondo del contesto operativo del loro impiego.

Le armi nucleari tattiche sono progettate per un impiego diretto sul campo di battaglia, con l'obiettivo di neutralizzare specifici target militari in aree territorialmente circoscritte. Generalmente presentano una potenza compresa entro un intervallo massimo di 100-200 kiloton e sono caratterizzate da un raggio d'azione limitato;

Le armi nucleari strategiche sono invece sviluppate per colpire obiettivi di rilevanza critica, come basi militari e infrastrutture essenziali. Questi ordigni possiedono una capacità esplosiva variabile da alcune centinaia di kiloton fino a qualche decina di megaton e dispongono di un raggio d'azione esteso che permette di raggiungere bersagli situati a notevoli distanze all'interno del territorio nemico. Tali caratteristiche tecniche qualificano le armi nucleari strategiche come strumenti di deterrenza, finalizzati a dissuadere attacchi nucleari su larga scala mediante la minaccia di una risposta distruttiva e proporzionata

Tipo di arma	Meccanismo	Potenza tipica	Note
Bomba A (fissione)	Fissione di nuclei pesanti (U-235, Pu-239)	0,1–500 kt	Hiroshima - 15 kt; Nagasaki - 21 kt
Bomba H (fusione)	Fissione + fusione di isotopi dell'idrogeno	1–50 Mt	Bomba Zar $\approx$ 50 Mt; potenze teoriche >50 Mt
Armi nucleari tattiche	Spesso fissione, talvolta mini-H	0,1–50 kt	Progettate per uso su campi di battaglia, non città

La Bomba Zar, fu fatta esplodere sulla baia di Mitjušicha il 30 ottobre 1961

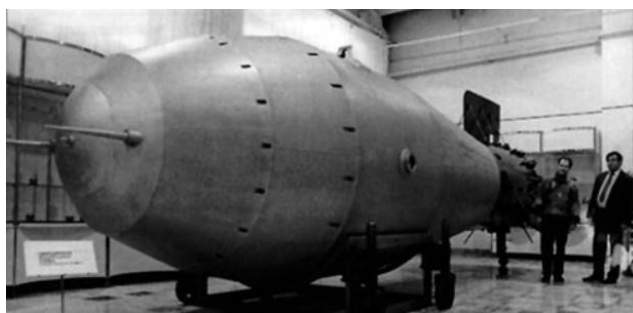


Fig.1 - Bomba Zar (la più grande bomba, sovietica, da 50 Megaton, fatta esplodere con finalità di test

Una chiarificazione terminologica.

Bomba atomica: il termine è storicamente usato, ma tecnicamente poco preciso. Suggerisce genericamente che l'energia venga dall'"atomo", ma tutti i processi chimici coinvolgono atomi, quindi il termine non specifica la reale fonte di energia.

Bomba nucleare: indica chiaramente che l'energia viene dal nucleo dell'atomo, tramite fissione o fusione; è il termine più corretto da usare, anche se mediaticamente si usano entrambe.

Stima sulla potenza totale degli armamenti atomici

A causa della grande variazione di potenza delle testate nucleari, calcolare una potenza totale precisa è quasi impossibile. Tuttavia, alcune stime aggregate sono state proposte.

Considerando che le testate nucleari nel mondo: circa 12.000 e supponendo un rendimento medio stimato per testata di 200 kilotoni si arriva al valore di 2500 Mt.

Potenza complessiva di tutti gli armamenti atomici: circa 2500 Mt

Per dare un'idea di questa cifra:

- Durante la Seconda Guerra Mondiale, la potenza totale di tutte le bombe sganciate (inclusi i due ordigni nucleari) è stata di circa 3 megatoni. L'attuale arsenale nucleare ha quindi una potenza 500 volte superiore.
- L'eruzione del vulcano Krakatoa nel 1883 (uccise circa 36.000 persone, distrusse gran parte dell'isola di Krakatoa, provocò un raffreddamento del clima dovuto alle ceneri nella stratosfera) ha rilasciato un'energia stimata tra i 150 e i 200 megatoni.
- Un singolo missile balistico intercontinentale (ICBM) moderno, equipaggiato con testate multiple (MIRV), può trasportare una potenza distruttiva totale superiore a 1 megatone, quindi tre di questi missili hanno una potenza di fuoco par a quella di tutta la seconda guerra mondiale.

Danni causati dall'esplosione di bombe nucleari

Danni di una bomba da 0.1 kt

Assumendo un'esplosione a terra (surface burst) in un'area urbana, ecco una stima degli effetti suddivisi per raggio dal punto di detonazione (Ground Zero):

1. Palla di Fuoco (Raggio: circa 50 metri)

Nel raggio di circa 50 metri, si forma una palla di fuoco con temperature di milioni di gradi.

Danni: Tutto ciò che si trova in quest'area — persone, edifici, asfalto — viene istantaneamente vaporizzato. Non rimane nulla. La mortalità è del 100%.

2. Onda d'Urto – A.: Distruzione pesante (Raggio: fino a 300 metri), B: Danni moderati (Raggio: fino a 700 metri).

Caso A. La maggior parte degli edifici residenziali e commerciali in cemento armato viene completamente distrutta o subisce danni strutturali così gravi da crollare. La probabilità di sopravvivenza per le persone in quest'area, anche al riparo, è quasi nulla.

Caso B. Gli edifici residenziali subiscono danni gravi (tetti scoperti, muri portanti crollati). Le persone possono essere ferite gravemente o uccise da detriti volanti o dal crollo delle strutture. La rottura dei vetri è universale e pericolosissima.

3. Radiazione Termica - Ustioni di Terzo Grado (Raggio: fino a 500 metri)

Un intenso impulso di calore viaggia alla velocità della luce.

Danni: Chiunque si trovi all'aperto in questa zona subisce ustioni di terzo grado (le più gravi) sulla pelle esposta. Queste ustioni sono spesso letali se non trattate immediatamente. I materiali infiammabili (legno, tessuti, carburante) prendono fuoco spontaneamente, innescando incendi diffusi in tutta l'area.

5. Radiazione nucleare iniziale - Dose Letale (Raggio: fino a 800 metri)

Questo è uno degli effetti più insidiosi. Un'ondata invisibile di radiazioni (raggi gamma e neutroni) viene emessa nei primi secondi.

Danni: Chiunque si trovi all'aperto in questo raggio riceve una dose di radiazioni (superiore a 500 rem) che è letale nel 50-90% dei casi, con morte che sopraggiunge entro poche settimane per avvelenamento acuto da radiazioni, anche se la persona è sopravvissuta all'onda d'urto e al calore.

6. Fallout Radioattivo (Area variabile)

Poiché l'esplosione avviene a terra, solleva tonnellate di terra e detriti, li rende radioattivi e li proietta nell'atmosfera.

Danni: Questa polvere radioattiva (fallout) ricade a terra, spinta dal vento, contaminando un'area che può estendersi per molti chilometri quadrati sottovento. Questa contaminazione rende l'area inabitabile e pericolosa per giorni, settimane o anche più, causando malattie e morti a lungo termine per chiunque si trovi nella zona contaminata senza protezione.

Scenario Riassuntivo

Immaginiamo che questa bomba esploda in una piazza di una città di medie dimensioni. L'intera piazza e gli edifici circostanti sono vaporizzati. Per 2-3 isolati in ogni direzione, la distruzione è totale. Per un raggio di mezzo chilometro, scoppiano incendi ovunque e chiunque sia all'aperto subisce ustioni mortali. Fino a quasi un chilometro di distanza, chi è all'aperto muore per le radiazioni, anche senza essere toccato dall'esplosione. Una nube di fallout radioattivo si sposta con il vento, minacciando le aree vicine. In conclusione, anche se classificata come "mini", un'arma nucleare da 0.1 kt è un'arma di distruzione di massa capace di cancellare un piccolo quartiere, uccidendo istantaneamente migliaia di persone e rendendo inabitabile un'area molto più vasta. Non è in alcun modo paragonabile a un esplosivo convenzionale.

Danni di una bomba da 50 kt

Ecco la sequenza catastrofica degli eventi, suddivisa per raggio dal punto zero (il punto a terra direttamente sotto l'esplosione):

1. Palla di Fuoco (Raggio: 350 metri)

Una sfera di plasma più calda della superficie del Sole si forma istantaneamente nel cielo.

Danni: Tutto ciò che si trova direttamente sotto di essa (un'area di quasi 0.4 chilometri quadrati) viene vaporizzato. Edifici, strade, persone: tutto cessa di esistere in una frazione di secondo. La mortalità è del 100%.

2. Onda d'Urto (primaria) - Distruzione Totale (Raggio: fino a 1.2 km)

L'onda d'urto (con sovrapressioni superiori a 20 psi) si propaga con una forza inimmaginabile.

Danni: Anche i più robusti edifici in cemento armato vengono spazzati via o ridotti a scheletri strutturali. Le infrastrutture sotterranee come le metropolitane collassano. La sopravvivenza in quest'area è impossibile.

3. Radiazione Nucleare Iniziale - Dose Letale (Raggio: fino a 2 km)

Un'ondata invisibile e istantanea di raggi gamma e neutroni investe l'area.

Danni: In quest'area, chiunque non fosse già stato ucciso dall'onda d'urto o dal calore riceverebbe comunque una dose di radiazioni (superiore a 500 rem) assolutamente letale. La morte sopraggiungerebbe in un periodo da ore a poche settimane in atroci sofferenze.

4. Onda d'Urto (secondaria) - Distruzione Pesantissima (Raggio: fino a 2.5 km)

L'onda d'urto a queste distanze è ancora devastante (5-10 psi).

Danni: Quasi tutti gli edifici residenziali e commerciali crollano. Le fabbriche e le strutture industriali sono distrutte. Si verificano fatalità di massa a causa del crollo degli edifici e dei detriti proiettati a velocità supersonica.

5. Radiazione Termica - Tempesta di Fuoco (Raggio: fino a 4 km)

L'impulso di calore è così intenso da causare ustioni di terzo grado sulla pelle esposta.

Danni: I vestiti delle persone prendono fuoco. Materiali come legno, plastica, pneumatici e carburante si incendiano spontaneamente. Questi incendi multipli, diffusi su un'area vastissima (circa 50 chilometri quadrati), si unirebbero molto probabilmente per formare una tempesta di fuoco. Questo inferno auto-alimentato consumerebbe tutto l'ossigeno, incenerendo ogni cosa e uccidendo anche chi si fosse rifugiato nei sotterranei per asfissia.

6. Danni Moderati e Feriti Gravi (Raggio: fino a 5 km)

L'onda d'urto è ancora in grado di far crollare i muri delle case e scopperciare i tetti fino ad una distanza di 5 km.

Danni: La rottura di vetri è universale, proiettando schegge mortali a grande distanza. Le persone subiscono ferite gravissime.

Scenario Riassuntivo

Se una bomba da 50 kt esplodesse sopra il centro di una grande città:

Il cuore della città (un'area di oltre 1 km di diametro) cesserebbe di esistere.

Un'area di circa 5 km di diametro verrebbe completamente rasa al suolo o resa inabitabile.

Un'area di circa 8 km di diametro verrebbe consumata da una tempesta di fuoco inarrestabile.

Le vittime immediate si conterebbero in centinaia di migliaia. Altre decine di migliaia morirebbero nei giorni e nelle settimane successive a causa di ustioni, ferite e avvelenamento acuto da radiazioni. Il sistema sanitario sarebbe annientato, le vie di fuga distrutte. L'area colpita diventerebbe un inferno inimmaginabile di fuoco e radiazioni.

Danni di una bomba da 500 kt

Ecco la sequenza della distruzione, suddivisa per raggio dal punto zero:

1. Palla di Fuoco e Annientamento Totale (Raggio: ~1 km)

Una palla di fuoco accecante, del diametro di quasi 2 km, si espande nel cielo. Il suo lampo sarebbe visibile a centinaia di chilometri di distanza.

Danni: L'area direttamente sottostante non viene semplicemente distrutta; viene cancellata dalla faccia della Terra. Tutto – grattacieli, fondamenta in cemento armato, stazioni della metropolitana, persone – viene istantaneamente vaporizzato, lasciando un paesaggio fuso e irriconoscibile. La mortalità è assoluta.

2. Onda d'Urto (primaria) - Zona di Polverizzazione (Raggio: fino a 3 km)

L'onda di sovrappressione (oltre 20 psi) è così potente da superare la resistenza di qualsiasi struttura costruita dall'uomo.

Danni: In quest'area, non si parla di crolli, ma di polverizzazione. Ponti in acciaio, dighe, edifici massicci vengono fatti a pezzi come fossero di cartone. È una zona di annientamento totale in cui la sopravvivenza è inconcepibile.

3. Tempesta di Fuoco - L'Inferno sulla Terra (Raggio: fino a 7 km)

L'impulso termico è così vasto e intenso che non si limita a innescare incendi: crea una tempesta di fuoco (o firestorm).

Danni: Su un'area di oltre 150 chilometri quadrati, migliaia di incendi si fondono in un unico, gigantesco inferno. Questo fenomeno crea venti propri, con la forza di un uragano, che risucchiano l'ossigeno dall'aria circostante verso il centro della tempesta, alimentando fiamme che raggiungono temperature di oltre 1000°C. Chiunque fosse sopravvissuto all'onda d'urto nei rifugi sotterranei verrebbe ucciso per asfissia o letteralmente cotto vivo. L'area diventa un forno planetario inestinguibile.

4. Radiazione Termica - Ustioni di Terzo Grado (Raggio: fino a 11 km)

Anche a questa enorme distanza, l'impulso di calore è ancora letale.

Danni: Chiunque si trovi all'aperto in questa zona subisce ustioni di terzo grado su tutta la pelle esposta. I materiali infiammabili (alberi, case in legno, automobili) prendono fuoco spontaneamente, estendendo ulteriormente l'area degli incendi.

5. Onda d'Urto (secondaria) - Distruzione Pesante e Crolli (Raggio: fino a 15 km)

L'onda d'urto, sebbene indebolita, ha ancora la forza di un tornado di categoria massima.

Danni: Edifici residenziali, ospedali e scuole vengono sventrati o crollano. Le infrastrutture critiche (centrali elettriche, acquedotti, reti di comunicazione) vengono distrutte. Le fatalità sono ancora

elevatissime. I vetri delle finestre si frantumano fino a 25-30 km di distanza, diventando proiettili mortali.

Scenario Riassuntivo

L'esplosione di una singola testata da 500 kt su una grande capitale europea o americana comporterebbe:

Un'area di quasi 6 km di diametro viene completamente polverizzata.

Un'area di 14 km di diametro è inghiottita da una tempesta di fuoco inestinguibile che consuma tutto l'ossigeno.

Fino a 22 km di diametro (un'area grande quasi quanto una provincia), le persone all'aperto subiscono ustioni mortali e la distruzione è ancora catastrofica.

Danni di una bomba da 1 Mt

Un'esplosione in aria (airburst) a un'altitudine ottimale (circa 2.500 metri) per massimizzare la distruzione di una vasta area urbana produrrebbe effetti su una scala terrificante.

Ecco la sequenza della distruzione, suddivisa per raggio dal punto zero:

1. Palla di Fuoco e Vaporizzazione (Raggio: 1.5 km)

Un sole artificiale, un'accecante palla di fuoco del diametro di quasi 3 km, si espande per diversi secondi, raggiungendo temperature di decine di milioni di gradi.

Danni: L'area sottostante (circa 7 chilometri quadrati) viene istantaneamente vaporizzata. Non si parla di distruzione, ma di sublimazione: acciaio, cemento e roccia vengono trasformati in gas surriscaldato. Il terreno stesso viene scavato, lasciando un cratere fuso e vetrificato. La mortalità è assoluta e istantanea.

2. Onda d'Urto (primaria) - Zona di Annientamento Totale (Raggio: fino a 5 km)

Un'onda di sovrappressione estrema (superiore a 20 psi) si propaga con venti che superano i 1.000 km/h.

Danni: Qualsiasi struttura, inclusi i bunker rinforzati e i grattacieli più massicci, viene disintegrata, strappata dalle fondamenta e polverizzata. Ponti, dighe, autostrade: tutto viene spazzato via. Quest'area, grande quanto una città di medie dimensioni, diventa un deserto piatto di detriti incandescenti e radioattivi. La sopravvivenza è impossibile.

3. Tempesta di Fuoco - L'Incenerimento di una Metropoli (Raggio: fino a 10 km)

L'impulso termico è così vasto e prolungato che innesca una tempesta di fuoco su un'area di oltre 300 chilometri quadrati.

Danni: Decine di migliaia di incendi si fondono in un unico, colossale inferno auto-alimentato. Venti con la forza di un uragano convergono verso il centro, consumando tutto l'ossigeno e trasformando l'intera area metropolitana in un forno. Le temperature al suolo superano quelle della cremazione. Anche i rifugi sotterranei più profondi diventano trappole mortali in cui le persone muoiono per asfissia o vengono letteralmente cotte vive.

4. Radiazione Termica - Ustioni Mortali (Raggio: fino a 15 km)

Anche a questa distanza, il calore è così intenso da essere letale.

Danni: Chiunque si trovi all'aperto e in linea di vista con la palla di fuoco subisce istantaneamente ustioni di terzo grado sull'intera superficie corporea. La pelle e i vestiti prendono fuoco. La carta, le foglie secche e le tende si incendiano spontaneamente, diffondendo ulteriormente il fuoco.

5. Onda d'Urto (secondaria) - Distruzione Catastrofica (Raggio: fino a 20 km)

L'onda d'urto ha ancora la forza di un potente uragano.

Danni: Tutti gli edifici residenziali (case, palazzi) vengono completamente distrutti o resi inabitabili. Fabbriche, ospedali, scuole crollano. Le vittime si contano a centinaia di migliaia a causa dei crolli e dei detriti volanti. La rottura dei vetri causerebbe ferite gravi o letali fino a 40 km di distanza.

Scenario Riassuntivo

L'esplosione di una singola testata da 1 Mt su una capitale come Roma, Parigi o Londra significherebbe: un'area di 10 km di diametro (il centro città e i quartieri circostanti) viene completamente polverizzata e resa irriconoscibile.

Un'area di 20 km di diametro (l'intera area metropolitana) viene divorata da una tempesta di fuoco inestinguibile. Fino a 30 km di diametro, le persone subiscono ustioni mortali e la distruzione è ancora di livello catastrofico.

Le vittime immediate si conterebbero in diversi milioni. La struttura sociale, politica ed economica dell'intera nazione collasserebbe. Non ci sarebbero soccorsi, perché non ci sarebbero più soccorritori. Non ci sarebbero ospedali, perché sarebbero stati distrutti. Le conseguenze a lungo termine, come il fallout radioattivo che contaminerebbe un'area di centinaia di chilometri quadrati provocherebbe altri morti.

Danni di una bomba da 50 Mt

Un'arma del genere non viene usata per distruggere una città, ma per cancellare un'intera regione metropolitana grande quanto un piccolo stato o una provincia, rendendola un deserto radioattivo per secoli.

Ipotizzando un'esplosione in aria (airburst) a un'altitudine ottimale (circa 4 km) per massimizzare la distruzione, gli effetti sarebbero apocalittici e quasi impossibili da immaginare.



Se questo ordigno si facesse esplodere su Roma distruggerebbe tutto tra Civitavecchia e Latina, tanto per dare un'idea di cosa stiamo parlando. Entro il raccordo anulare verrebbe spazzato via tutto, ma i danni devastanti dell'onda d'urto e di calore andrebbero da Civitavecchia a Latina.

Ecco la sequenza della distruzione, su una scala che sfida la comprensione:

1. Palla di Fuoco - La Creazione di un Sole Artificiale (Raggio: ~4.5 km)

Una palla di fuoco di quasi 9 km di diametro si espande nel cielo per oltre un minuto. Sarebbe così luminosa da causare cecità permanente a chiunque la guardasse da centinaia di chilometri di distanza. Danni: L'intera area di una grande metropoli sottostante (circa 60 chilometri quadrati) viene istantaneamente vaporizzata. Non solo gli edifici, ma il terreno stesso viene fuso in un cratere di roccia vetrificata e incandescente. L'annientamento è totale e assoluto.

2. Onda d'Urto - Disintegrazione Regionale (Raggio: fino a 15 km)

L'onda di sovrappressione è così estrema che non si limita a distruggere, ma disintegra ogni cosa. Danni: In un'area vasta quanto una provincia (oltre 700 chilometri quadrati), ogni struttura umana — grattacieli, ponti, dighe, bunker sotterranei — viene polverizzata. Venti a velocità multi-supersonica spazzano via ogni detrito, lasciando un paesaggio piatto, fuso e irriconoscibile. La sopravvivenza è impossibile.

3. Tempesta di Fuoco - L'Incenerimento di una Nazione (Raggio: fino a 35 km)

L'impulso termico è così immenso e prolungato che innesca una mega-tempesta di fuoco su un'area di quasi 4.000 chilometri quadrati.

Danni: Quest'area, grande quanto una piccola nazione europea, viene trasformata in un unico, inarrestabile inferno. La tempesta di fuoco crea un proprio sistema meteorologico, con venti della forza di un tornado che convergono al centro, consumando tutto l'ossigeno e incenerendo ogni cosa, organica e inorganica. L'atmosfera stessa brucia.

4. Radiazione Termica - Ustioni Mortali a Distanze Incredibili (Raggio: fino a 70 km)

Il calore sprigionato è così intenso che le persone subiscono ustioni di terzo grado, mortali, a una distanza incredibile.

Danni: Chiunque si trovi all'aperto in un raggio di 70 km e in linea di vista con l'esplosione, verrebbe istantaneamente incenerito o subirebbe ustioni mortali. Foreste, città e campi prenderebbero fuoco spontaneamente, estendendo ulteriormente l'apocalisse di fuoco.

5. Conseguenze a Scala Continentale e Globale

Gli effetti di un'esplosione del genere non sarebbero più locali:

Onda d'Urto Globale: L'onda d'urto atmosferica sarebbe così potente da fare il giro del mondo più volte (quella della Bomba Zar fu registrata mentre faceva 3 giri completi del pianeta). Potrebbe frantumare vetri a 1.000 km di distanza.

Fallout Globale: La gigantesca nube a fungo raggiungerebbe la stratosfera (oltre 60 km di altezza), iniettando tonnellate di materiale radioattivo che verrebbe poi distribuito dalle correnti a getto su tutto l'emisfero, contaminando suolo e acqua a livello globale per decenni.

Impulso Elettromagnetico (EMP): Un EMP devastante potrebbe friggere le reti elettriche e i dispositivi elettronici non schermati su un'area grande quanto un intero continente.

Inverno Nucleare: Un'esplosione di questa portata (specialmente se parte di un conflitto più ampio) getterebbe così tanta polvere e fuliggine nella stratosfera da oscurare la luce del sole, causando un drastico calo delle temperature globali, il collasso dell'agricoltura e una potenziale estinzione di massa.

Si tenga presente che i missili balistici intercontinentali (ICBM) possono trasportare testate nucleari di potenza estremamente variabile, ma generalmente elevate intorno a 1 Mt.

“ Il fatto che non esista un limite alla capacità distruttiva di questa arma rende la sua stessa esistenza e la capacità di costruirla un pericolo per l'umanità intera. E' inevitabilmente un ordigno diabolico, sotto qualunque aspetto lo si consideri. Per questa ragione, noi crediamo che sia importante per il Presidente degli Stati Uniti dire all'opinione pubblica americana e al mondo di ritenere che sia sbagliato, per fondamentali principi etici, iniziare lo sviluppo di una simile arma”

Enrico Fermi, Isaac Rabi (ottobre 1949)



Le bombe atomiche possono distruggere la Terra?

La Terra in quanto pianeta non potrebbe essere distrutto neanche se tutti i paesi facessero esplodere tutte le bombe presenti nei loro arsenali.

L'effetto delle esplosioni di tutte le bombe atomiche sulla Terra, dunque, non potrebbero causare tecnicamente una distruzione del pianeta mentre discorso diverso si dovrebbe fare per la sopravvivenza dell'uomo e degli altri esseri viventi:

L'esplosione simultanea di tutte le armi atomiche presenti sulla Terra scatenerrebbe una catastrofe di proporzioni inimmaginabili, alterando drasticamente il pianeta e mettendo a rischio la sopravvivenza di innumerevoli specie, compresa quella umana. Sebbene l'estinzione totale della vita sia considerata improbabile da molti scienziati, la civiltà moderna verrebbe annientata e il mondo come lo conosciamo cesserebbe di esistere.

Attualmente, si stima che esistano circa 12.000 testate nucleari nel mondo. La stragrande maggioranza di queste, quasi il 90%, appartiene a Russia e Stati Uniti. Sebbene il numero totale di armi nucleari sia diminuito rispetto al picco della Guerra Fredda, la potenza distruttiva dell'arsenale odierno è immensa.

Le Conseguenze Immediate: Fuoco e Radiazioni

L'esplosione di migliaia di testate nucleari innescerebbe una serie di eventi catastrofici immediati:

Onde d'urto e calore: ogni esplosione genererebbe un'intensa palla di fuoco, con temperature paragonabili a quelle del nucleo del Sole, incenerendo istantaneamente ogni forma di vita e struttura nel raggio di chilometri. L'onda d'urto che ne seguirebbe spazzerebbe via edifici e tutto ciò che si trova sul suo cammino.

Radiazioni ionizzanti: Un'ondata letale di radiazioni verrebbe rilasciata, causando la morte quasi istantanea di chiunque si trovi nelle immediate vicinanze dell'esplosione.

Impulso elettromagnetico (EMP): Le detonazioni ad alta quota produrrebbero un potente impulso elettromagnetico in grado di distruggere le reti elettriche e le comunicazioni su vasta scala, facendo precipitare le società superstiti in un'era pre-tecnologica.

Se anche solo una frazione dell'arsenale globale venisse utilizzata, centinaia di milioni, se non miliardi, di persone morirebbero quasi istantaneamente a causa degli effetti diretti delle esplosioni.

Le Conseguenze a Lungo Termine: inverno nucleare e Fallout radioattivo

Gli effetti a lungo termine sarebbero altrettanto, se non più, devastanti:

Inverno nucleare: le immense quantità di fumo e fuliggine generate dagli incendi delle città e delle foreste verrebbero iniettate nella stratosfera. Questa cappa di particelle oscurerebbe la luce del sole per anni, provocando un drastico calo delle temperature globali, un fenomeno noto come "inverno nucleare". Le temperature medie sulla Terra potrebbero scendere di diversi gradi Celsius, portando a una nuova era glaciale.

Fallout radioattivo: Le particelle radioattive sollevate dalle esplosioni ricadrebbero sulla Terra per giorni, settimane e mesi, contaminando suolo, acqua e catena alimentare a livello globale. Questa "pioggia di morte" causerebbe malattie da radiazioni, cancro e difetti genetici nelle popolazioni superstiti e negli ecosistemi per decenni.

Distruzione dello strato di ozono: La fuliggine nella stratosfera non solo bloccherebbe la luce solare, ma danneggerebbe anche lo strato di ozono che protegge la Terra dalle dannose radiazioni ultraviolette (UV) del Sole.

La Sopravvivenza della Vita

In uno scenario così apocalittico, la domanda sulla sopravvivenza della vita diventa cruciale.

Vita umana: Miliardi di persone morirebbero a causa degli effetti immediati e a breve termine. I sopravvissuti si troverebbero ad affrontare un mondo devastato, senza infrastrutture, con temperature glaciali e risorse contaminate. La carestia globale sarebbe inevitabile, dato che l'agricoltura collasserebbe a causa del freddo e della mancanza di luce solare. Nonostante ciò, alcuni scienziati ritengono che l'estinzione totale dell'umanità sia improbabile. Piccoli gruppi di persone, forse in aree remote e meno colpite, potrebbero riuscire a sopravvivere, regredendo a uno stile di vita da cacciatori-raccoglitori in un ambiente ostile. La civiltà come la conosciamo, tuttavia, cesserebbe di esistere.

Altre forme di vita: L'impatto sugli ecosistemi sarebbe catastrofico. Molte specie animali e vegetali si estinguerebbero a causa del freddo, dell'oscurità e delle radiazioni. Tuttavia, è probabile che alcune forme di vita più semplici e resistenti, come insetti, alcuni microrganismi e piante meno complesse, possano sopravvivere. Anche la vita negli oceani profondi, schermata dalle radiazioni e dagli effetti più immediati, potrebbe avere maggiori possibilità di farcela. Con il tempo, in un arco di migliaia o milioni di anni, la vita potrebbe lentamente riprendersi e diversificarsi nuovamente, ma il pianeta porterebbe le cicatrici di questo evento per ere geologiche.

Piccola riflessione.

Se ripartissimo equamente la potenza totale delle armi atomiche (2.5 Gt) per ogni abitante della terra (8 miliardi) si avrebbe un valore equivalente a circa 300 kg di tritolo.

Che civiltà è la nostra che pone sulla testa di ogni persona, come una spada di Damocle, una bomba da 300 kg di tritolo?

(Più che sufficienti, ad esempio, per distruggere un edificio di 5 piani)

Breve nota sui Missili



Missili Balistici e da Crociera: due filosofie di attacco a confronto

Nel vasto arsenale delle armi moderne, i missili rappresentano uno degli strumenti più potenti e strategici. Tuttavia, non tutti i missili sono uguali. Le due categorie principali, i missili balistici e i missili da crociera, si basano su principi di volo, tecnologie e scopi strategici radicalmente diversi. Comprendere queste differenze è fondamentale per capire le dinamiche della sicurezza globale.

Il Missile Balistico: “la traiettoria inesorabile della gravità”

Un missile balistico è un’arma che segue principalmente una traiettoria determinata dalla gravità dopo una fase iniziale di propulsione. A differenza dei missili da crociera, il suo motore a razzo funziona solo durante una breve fase iniziale: una volta spento, la traiettoria è quasi interamente vincolata alle condizioni iniziali..

Il viaggio di un missile balistico si articola in tre fasi distinte:

1. Fase di Spinta (Boost Phase): è la fase iniziale e più energivora. Potenti motori a razzo si accendono per spingere il missile verso l'alto a velocità estreme, vincendo la forza di gravità e l'attrito atmosferico. In questi pochi minuti, il sistema di guida imposta la rotta, l'altitudine e la velocità finale; una volta spenti i motori, la traiettoria sarà quasi interamente determinata da queste condizioni iniziali.
2. Fase Intermedia (Midcourse Phase): conclusa la spinta, il missile prosegue il suo viaggio in una traiettoria di "volo libero" suborbitale, uscendo dall'atmosfera terrestre. Influenzato quasi esclusivamente dalla gravità e dalla quantità di moto acquisita, segue un arco parabolico prevedibile, simile a come un sasso lanciato segue una curva prima di ricadere a terra. In questa fase, il missile può raggiungere altitudini di oltre 1.200 km (nel caso degli ICBM) e viaggiare a velocità ipersoniche, superando i 25.000 km/h.
3. Fase di Rientro (Re-entry Phase): nell'ultima parte del percorso, l'ogiva contenente il carico bellico si separa dal corpo del missile e rientra nell'atmosfera a velocità vertiginosa, precipitando sull'obiettivo.

Lo scopo primario di un missile balistico è il trasporto di una o più testate, spesso nucleari, su un determinato obiettivo a grande distanza. La sua efficacia risiede nella velocità e nell'altitudine, che lo rendono estremamente difficile da intercettare. Un missile può avere una testata singola o, in una configurazione molto più minacciosa, essere dotato di testate multiple. In questo caso si parla di Multiple Independent Re-entry Vehicles (MIRV): l'ogiva del missile non contiene una sola bomba, ma più veicoli di rientro indipendenti (sub-munizioni) che, durante la fase di discesa, si separano per colpire molteplici obiettivi sparsi su una determinata area. Questa tecnologia aumenta esponenzialmente la letalità di un singolo lancio.

Il Missile da Crociera: “il predatore a bassa quota”

Se il missile balistico è un proiettile che vola alto e veloce, il missile da crociera (dall'inglese *cruise missile*) è più simile a un piccolo aereo senza pilota, progettato per essere furtivo e preciso. L'alternativa alla traiettoria balistica è, infatti, la crociera.

A differenza del suo omologo balistico, il missile da crociera percorre una traiettoria guidata e propulsa per tutta la durata del suo volo. Le sue caratteristiche distintive sono:

- **Propulsione Continua:** possiede un motore a reazione (solitamente un piccolo turbogetto), che resta acceso per l'intero percorso, garantendo una spinta costante.
- **Volo Atmosferico:** È dotato di ali che generano portanza, permettendogli di volare come un aeroplano. Questo gli consente non solo di sostenersi in aria, ma anche di effettuare manovre complesse e di modificare la sua rotta in qualsiasi momento.
- **Profilo di Volo Furtivo:** la sua più grande risorsa strategica è la capacità di volare a **bassissima** quota, seguendo il profilo del terreno ("terrain hugging") per rimanere al di sotto della copertura dei radar nemici, rendendolo molto difficile da individuare e abbattere.
- **Precisione Chirurgica:** le versioni più aggiornate possiedono sistemi di guida sofisticatissimi, come la navigazione inerziale, il confronto del terreno (TERCOM) e, soprattutto, il sistema di navigazione satellitare (GPS), che conferiscono loro una precisione straordinaria, permettendo di colpire bersagli specifici con un margine di errore di pochi metri.

Un'Evoluzione Storica Legata alla Guerra Fredda

La storia del missile balistico moderno inizia nell'oscurità della Germania nazista. Il primo missile balistico fu il cosiddetto Aggregat 4, comunemente conosciuto con il nome di V2. Sviluppato negli anni '30 e '40, principalmente ad opera del geniale ingegnere Wernher von Braun, rappresentò un salto tecnologico rivoluzionario. Il primo lancio di successo avvenne il 3 ottobre 1942, e il sistema divenne operativo nel settembre 1944, venendo impiegato per bombardare città come Londra e Anversa. Alla fine della guerra, ne erano stati lanciati più di 3.000.

Con la sconfitta della Germania, sia gli Stati Uniti che l'Unione Sovietica si precipitarono per accaparrarsi la tecnologia e gli scienziati tedeschi. Iniziò così una corsa sfrenata per sviluppare sistemi balistici propri, partendo proprio dagli studi sulla V2. Negli anni '50, l'attenzione delle due superpotenze era concentrata sulla creazione di un missile in grado di colpire il territorio nemico da un continente all'altro: il missile balistico intercontinentale (ICBM).

Nell'agosto 1957, i sovietici stupirono il mondo con il successo dell'R-7 "Semërka" (noto in Occidente come SS-6 Sapwood), il primo ICBM operativo, che fu anche il vettore usato per lanciare lo Sputnik.

Gli americani risposero rapidamente, immettendo in servizio i potenti missili Atlas e Titan, con gittate nell'ordine dei 10.000-19.000 km. La capacità di lanciare un attacco nucleare globale in meno di 30 minuti era diventata una realtà, definendo l'era della "Distruzione Mutua Assicurata" (MAD).

Lo "Scudo Spaziale" e la Minaccia dei MIRV

L'introduzione dei missili a testata multipla (MIRV) negli anni '70 aumentò ulteriormente la tensione. Un singolo ICBM poteva ora trasportare da 4 a oltre 10 testate nucleari, ognuna capace di colpire un bersaglio diverso. Questa capacità minacciava di sopraffare qualsiasi sistema di difesa, rendendo un primo attacco nucleare ancora più devastante. Fu proprio in risposta a questa crescente minaccia che, negli anni '80, il presidente statunitense Ronald Reagan propose la Strategic Defense Initiative (SDI), soprannominata dai media "Scudo Spaziale". L'ambizioso, e mai pienamente realizzato, progetto mirava a creare un sistema di difesa a più strati, basato su tecnologie spaziali e terrestri, per intercettare e distruggere i missili balistici sovietici prima che potessero raggiungere i loro obiettivi.

- A Corto Raggio (SRBM): Gittata fino a 1.000 km.
- A Medio Raggio (MRBM): Gittata tra 1.000 e 3.000 km.
- A Raggio Intermedio (IRBM): Gittata tra 3.000 e 5.500 km.
- Intercontinentale (ICBM) (acronimo dell'espressione inglese intercontinental ballistic missile): Gittata superiore ai 5.500 km capaci di colpire bersagli in continenti diversi.



Un missile V2 al museo di
Peenemünde



Il sovietico R-7
"Semërka", il primo ICBM
operativo



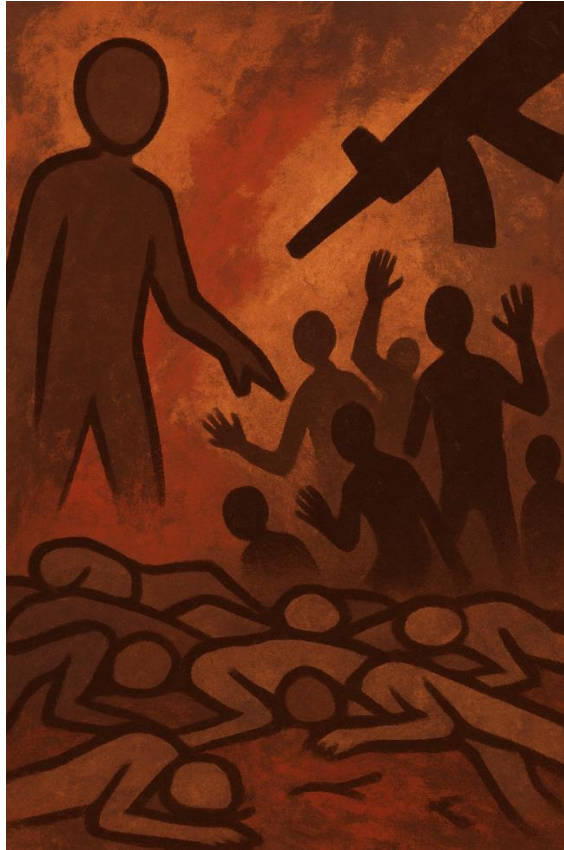
Atlas lancio di missili a gittata
intercontinentale Foto stock - Alamy

Nell'agosto 1957, i sovietici realizzano il primo missile intercontinentale operativo: l'R-7 "Semërka", seguiti due anni dopo dagli USA con il loro Atlas. Da allora sul mondo incombe la minaccia che qualcuno premendo un pulsante faccia piovere dal cielo morte e distruzione.

Questo mondo non è certo un posto tranquillo in cui vivere!

Genocidi nella storia

a cura di Giancarlo Buccella



«Se comprendere è impossibile, conoscere è necessario, perché ciò che è accaduto può ritornare.» (Primo Levi)

La storia dell'umanità, oltre ai grandi progressi scientifici, culturali e sociali, porta con sé anche pagine di dolore e distruzione. Tra le più drammatiche vi sono i genocidi, ossia lo sterminio sistematico di un popolo o di una comunità, perpetrato per motivi etnici, religiosi o politici. Il termine *genocidio* è stato coniato nel 1944 dal giurista Raphael Lemkin e successivamente accolto nella Convenzione delle Nazioni Unite del 1948, che lo definisce come un crimine internazionale. Studiare i genocidi significa non solo ricordare le vittime, ma anche riflettere sui meccanismi che portano l'odio a trasformarsi in violenza di massa.

I genocidi nella storia ci mostrano il lato più oscuro dell'essere umano. Ricordarli è un dovere morale, non solo per rendere giustizia alle vittime, ma anche per impedire che simili tragedie si ripetano. La memoria, l'educazione e la difesa dei diritti umani sono strumenti fondamentali per costruire una società più giusta e tollerante. Come ammonisce la Giornata della Memoria, "quello che è accaduto può accadere di nuovo", e per questo la conoscenza del passato è la nostra migliore difesa per il futuro.

Le ideologie totalitarie, il nazionalismo estremo e il razzismo giocano un ruolo fondamentale nel creare un terreno fertile per il genocidio. La deumanizzazione del gruppo vittima, descritto come "inferiore", "pericoloso" o "disumano", è una tappa essenziale per giustificare la violenza.

La propaganda gioca un ruolo cruciale nel diffondere l'ideologia genocidaria, demonizzare il gruppo target e incitare all'odio e alla violenza. I media possono diventare potenti strumenti di mobilitazione per il genocidio, come dimostra il caso di "Radio Machete" in Ruanda.

Le conseguenze del genocidio sono devastanti e durature, non solo per le vittime dirette ma anche per le generazioni successive e per l'intera umanità.

- Trauma Individuale e Collettivo: i sopravvissuti a un genocidio spesso soffrono di gravi traumi psicologici, tra cui disturbo da stress post-traumatico, depressione e ansia. Il trauma si trasmette anche alle generazioni successive, creando un'eredità di dolore e sofferenza.
- La Negazione del Genocidio: il negazionismo è una caratteristica comune dei regimi genocidari e dei loro sostenitori. Negare o minimizzare il genocidio non solo insulta la memoria delle vittime, ma ostacola anche il processo di giustizia e riconciliazione e può essere un preludio a future violenze.
- Giustizia Internazionale: dopo la Seconda Guerra Mondiale, sono stati istituiti tribunali internazionali per processare i responsabili di genocidio e altri crimini contro l'umanità, come il Tribunale Penale Internazionale per l'ex Jugoslavia e per il Ruanda. La creazione della Corte Penale Internazionale permanente nel 1998 ha rappresentato un passo fondamentale nella lotta all'impunità per i crimini più gravi.
- Prevenzione e Responsabilità di Proteggere: la comunità internazionale ha la responsabilità di proteggere le popolazioni dal genocidio. Questo include il monitoraggio delle situazioni a rischio, l'allerta precoce e l'intervento tempestivo, se necessario. L'educazione alla memoria dei genocidi passati è uno strumento fondamentale per sensibilizzare le nuove generazioni e promuovere una cultura di pace e rispetto dei diritti umani.

Quanti dimenticati nel giorno della memoria!

È giusto che ogni 27 gennaio si ricordi e si rifletta sul genocidio più tristemente famoso del '900, ma è altrettanto giusto che non ci si dimentichi delle vittime di tanti altri genocidi perpetrati nella storia dell'uomo.

Genocidi della Storia:

<i>Popolo</i>	<i>Responsabili</i>	<i>Periodo di riferimento</i>	<i>Numero di morti stimati (milioni)</i>
Nativi Americani (sia del sud che del nord)	Europei	1500-1800	50
Ebreo (ma anche zingari, omosessuali...)	Nazisti	1933-1945	12
Ucraini	Stalin	1930	5
Cambogiani	Pol-Pot	1975-1979	3
Aborigeni	Impero Britannico	1770-1970	1
Armeni	Turchi	1915-1917	1.5
Ruandesi (popolazione Tutsi, Twa e Hutu)	Governo del Ruanda	1994	1
Catari (sud della Francia)	Chiesa Cattolica	1209-1229	0.02

1. **Indiani del Nord e Sud America:** anche questo lo possiamo considerare il genocidio perfetto: nessuno ha mai protestato, nonostante le **decine di milioni di morti in pochi secoli; la cultura indiana è stata praticamente dimenticata da tutti** e anzi, questo genocidio è stato osannato per decenni da libri, film, telefilm, statue, piazze ecc.

Sebbene non sia ancora universalmente riconosciuto come genocidio nel senso giuridico formale della Convenzione ONU del 1948 – a causa della difficoltà di applicare retroattivamente una definizione creata dopo gli eventi e di dimostrare l'intento specifico di distruggere *fisicamente* un intero gruppo nel senso più stretto per tutte le azioni – **molti studiosi e organizzazioni per i diritti umani lo definiscono come tale, o almeno come un "genocidio culturale" o una serie di atti genocidari.**

Malattie Epidemiche: questa è considerata la causa principale e più devastante. I colonizzatori europei portarono con sé malattie per le quali i nativi americani non avevano immunità (vaiolo, morbillo, influenza, tifo, ecc.). Queste epidemie si diffusero rapidamente e decimano intere popolazioni prima ancora che incontrassero direttamente gli europei.

Violenza Diretta e Guerre: molti conflitti armati scoppiarono tra i coloni e le nazioni native. Queste guerre erano spesso brutali, con massacri di civili, distruzione di villaggi e l'uso della forza per soggiogare o eliminare la resistenza. Esempi includono le Guerre Indiane negli Stati Uniti, che videro stragi come quella di Wounded Knee.

Deportazioni Forzate e "Sentieri delle Lacrime": le politiche governative, in particolare negli Stati Uniti del XIX secolo, portarono allo spostamento forzato di intere nazioni native dalle loro terre ancestrali verso territori meno fertili o riserve. Il più noto è il "Sentiero delle Lacrime" (Trail of Tears), la deportazione forzata di Cherokee e altre nazioni del sud-est, che causò migliaia di morti per fame, malattie ed esposizione.

Distruzione dei Mezzi di Sussistenza: una tattica militare e politica comune era la distruzione delle risorse vitali dei nativi. Ad esempio, negli Stati Uniti, la caccia quasi all'estinzione del bisonte, fonte primaria di cibo, vestiario e riparo per molte tribù delle pianure, fu una strategia deliberata per piegare la loro resistenza e forzarli ad accettare le riserve.

Genocidio Culturale e Assimilazione Forzata: questa è una componente cruciale del dibattito. Le politiche coloniali e post-coloniali miravano a distruggere le culture, le lingue, le religioni e le strutture sociali native per assimilarle alla cultura dominante. Esempi includono:

- **Le scuole residenziali (o "boarding schools"):** Migliaia di bambini nativi vennero sottratti alle loro famiglie e costretti a frequentare scuole gestite da governi o chiese, dove era loro vietato parlare la propria lingua, praticare le proprie tradizioni e spesso subirono abusi fisici, sessuali ed emotivi. L'obiettivo dichiarato era "uccidere l'indiano per salvare l'uomo".
- **La proibizione di riti e cerimonie:** Molte pratiche religiose e culturali native furono proibite per legge.
- **La distruzione delle strutture politiche e sociali tradizionali.**

2. **Shoah, (o Olocausto):** si intende principalmente lo sterminio sistematico degli ebrei da parte dei nazisti, perché considerati “nemici della nazione tedesca”. Per lo stesso motivo furono uccisi anche oppositori politici, omosessuali, zingari e tutti coloro che venivano considerati appunto “nemici della nazione”. Lemkin coniò il termine *genocidio* per descrivere in generale lo sterminio dei popoli, non solo la Shoah (anche se quella fu l'ispirazione principale).

Le radici della Shoah affondano nell'antisemitismo, un odio millenario verso gli ebrei, che il Partito Nazionalsocialista di Adolf Hitler portò a un livello senza precedenti, trasformandolo in una dottrina razziale pseudoscientifica. L'ideologia nazista considerava gli ebrei una "razza inferiore" e una minaccia esistenziale alla purezza e alla forza della "razza ariana" tedesca, accusandoli di tutti i mali della Germania e dell'Europa.

Discriminazione e Emarginazione (1933-1939):

Ascesa al Potere di Hitler (1933). Subito dopo la presa del potere, il regime nazista iniziò a emanare leggi e direttive anti-ebraiche.

Boicottaggi di negozi ebraici, espulsioni da incarichi pubblici, professioni e università.

Leggi di Norimberga (1935): queste leggi privarono gli ebrei della cittadinanza tedesca, proibirono i matrimoni e le relazioni sessuali tra ebrei e "ariani" e definirono chi fosse ebreo in base alla discendenza. Segnarono la codificazione della discriminazione razziale.

Kristallnacht (Notte dei Cristalli, 9-10 novembre 1938): un pogrom organizzato in tutta la Germania e l'Austria, in cui sinagoghe furono bruciate, negozi ebraici distrutti e migliaia di ebrei arrestati e inviati nei campi di concentramento. Questo segnò un'escalation di violenza pubblica e sponsorizzata dallo stato.

Concentrazione e Ghettoizzazione (1939-1941).

Invasione della Polonia (1939). Con l'inizio della Seconda Guerra Mondiale, la Germania occupò vaste aree con grandi popolazioni ebraiche.

Gli ebrei vennero confinati in ghetti sovraffollati e isolati in città come Varsavia, Łódź e Cracovia. Le condizioni di vita erano disumane, con fame, malattie e lavoro forzato, mirate a distruggere la popolazione lentamente.

La "Soluzione Finale" e lo Sterminio di Massa (1941-1945):

Invasione dell'Unione Sovietica (Operazione Barbarossa, 1941). Le unità speciali delle SS, gli Einsatzgruppen, seguirono l'avanzata della Wehrmacht e iniziarono a massacrare sistematicamente intere comunità ebraiche (e Rom, comunisti, ecc.) a colpi di arma da fuoco, spesso in fosse comuni. Questo fu l'inizio dello sterminio di massa.

Conferenza di Wannsee (gennaio 1942). I principali funzionari nazisti si incontrarono per coordinare e pianificare la "Soluzione Finale della Questione Ebraica", cioè l'annientamento totale degli ebrei d'Europa. Questo segnò l'inizio “scientifico” del genocidio.

Furono creati campi di sterminio appositamente per uccidere su scala di massa, principalmente in Polonia occupata. I più noti sono Auschwitz-Birkenau (che era anche un campo di concentramento e di lavoro forzato), Treblinka, Sobibór, Bełżec, Chełmno e Majdanek. Qui, gli ebrei (e altre vittime) venivano deportati da tutta Europa, spesso ingannati sulla loro destinazione, e poi gassati a morte in camere a gas.

Altri campi come Dachau, Buchenwald, Bergen-Belsen non erano campi di sterminio primari, ma luoghi di prigionia, lavoro forzato, esperimenti medici e morte per stenti, malattie e brutalità.

Si stima che circa sei milioni di ebrei, ovvero due terzi degli ebrei europei, siano stati assassinati durante la Shoah. Oltre agli ebrei, il regime nazista perseguitò e uccise anche milioni di altre vittime, tra cui Rom (Porrajmos), persone con disabilità, prigionieri di guerra sovietici, Testimoni di Geova, omosessuali e oppositori politici. La Shoah non fu opera solo dei tedeschi; in molti paesi occupati o alleati, le autorità locali e i collaboratori parteciparono attivamente alla persecuzione e alla deportazione degli ebrei.

L'Eredità e la Memoria: La Shoah ha avuto un impatto indelebile sulla coscienza umana. Ha portato alla formulazione della Convenzione sul Genocidio e alla creazione di tribunali internazionali per i crimini contro l'umanità. Il monito del "Mai Più" è intrinsecamente legato alla memoria della Shoah. La sua commemorazione attraverso il Giorno della Memoria e l'educazione sono fondamentali per prevenire future atrocità e per comprendere i pericoli dell'odio e del razzismo.

Statistica dei morti causati dai nazisti: esistono centinaia di migliaia di pagine di documenti nazisti tedeschi che riportano le seguenti informazioni.

(Fonte <https://encyclopedia.ushmm.org/content/it/article/documenting-numbers-of-victims-of-the-holocaust-and-azi-persecution>)

Circa 2,7 milioni di ebrei furono uccisi nei campi di sterminio.

Circa 2 milioni di ebrei furono uccisi tramite le fucilazioni di massa e altri massacri simili.

Circa 1 milione di ebrei furono uccisi nei ghetti, nei campi di lavoro e nei campi di concentramento.

In totale circa 5.7 milioni di ebrei uccisi nella Shoah.

A questo dato va aggiunto il numero di persone non ebrei uccise dalla Germania nazista dai suoi alleati e dai suoi collaboratori.

Prigionieri di guerra sovietici	circa 3.3 milioni

Polacchi (etnici) non ebrei	circa 1.8 milioni

Uomini, donne, bambini e bambine rom e altre persone etichettate in modo dispregiativo come “zingari”	circa 300 000

Civili serbi uccisi dalle autorità ustasce dello Stato Indipendente di Croazia	oltre 300 000

Persone con disabilità in cura presso strutture pubbliche	oltre 10 000

Tedeschi imprigionati nei campi di concentramento come “criminali”	oltre 35 000

Testimoni di Geova	circa 1700

Uomini accusati di omosessualità	diverse centinaia

In totale circa 6 milioni di persone, non ebrei, uccise dal 1933 al 1945 dai nazisti e loro alleati.

3. **Genocidio ucraino: perpetrato da Stalin**, forse un enorme errore di giudizio economico del dittatore sovietico, resta il fatto che **milioni di ucraini furono lasciati a morire di fame**, in quanto il cibo fu requisito per altre destinazioni.

L'Holodomor (dall'ucraino "morte per fame") fu una carestia catastrofica che colpì l'Ucraina sovietica tra il 1932 e il 1933, causando la morte di milioni di persone (le stime variano da 3,5 a 7-10 milioni, o anche più). Molti paesi e storici riconoscono l'Holodomor come un genocidio, sebbene la Russia neghi questa definizione, attribuendo la carestia a cause naturali e a politiche agricole fallimentari in generale nell'URSS.

Contesto e Cause: L'Holodomor non fu una carestia naturale, ma il risultato deliberato di politiche staliniste:

- **Collettivizzazione Forzata:** Il regime sovietico imponeva la collettivizzazione forzata delle terre, costringendo i contadini a cedere le proprie fattorie e il bestiame a collettivi statali. Questo incontrò forte resistenza in Ucraina, dove la proprietà della terra era storicamente radicata.
- **De-Kulakizzazione:** la repressione contro i "kulaki" (contadini più agiati o semplicemente resistenti alla collettivizzazione) portò all'eliminazione fisica, alla deportazione e alla confisca di beni di milioni di persone.
- **Confische di Grano:** il regime sovietico impose quote di raccolta di grano irrealisticamente elevate all'Ucraina, che furono poi confiscate con la forza, lasciando i contadini senza cibo. Nonostante la carestia fosse evidente, l'URSS continuò ad esportare grano.
- **Blocco Interno:** furono imposte restrizioni di movimento, impedendo ai contadini ucraini di lasciare le loro regioni per cercare cibo altrove, condannandoli di fatto alla morte per fame.
- **Repressione dell'Identità Ucraina:** Alcuni storici sostengono che l'Holodomor fosse parte di un piano più ampio di Mosca per reprimere il nazionalismo ucraino e distruggere l'identità nazionale ucraina, in particolare la sua classe contadina, vista come il baluardo di tale identità.

Riconoscimento come Genocidio: molti paesi (tra cui Stati Uniti, Canada, Australia, Polonia, Lituania e, naturalmente, l'Ucraina stessa) e il Parlamento Europeo hanno riconosciuto l'Holodomor come genocidio. Questa posizione si basa sull'argomento che le politiche di Stalin furono intenzionalmente dirette a distruggere il popolo ucraino in quanto gruppo nazionale, attraverso la fame. La Convenzione sul Genocidio richiede l'intento di distruggere "in tutto o in parte" un gruppo nazionale, e l'eliminazione di milioni di ucraini attraverso la fame rientra in questa definizione per molti.

4. **Pol Pot in Cambogia: 3 milioni di morti in un paese che ne conteneva 20 milioni**, un orrore senza fine, perpetrato inizialmente per ragioni politiche, poi in un susseguirsi di atrocità sempre maggiori e dalla follia di un capo comunista.

Il genocidio cambogiano, perpetrato dal regime dei Khmer Rossi sotto la guida di Pol Pot, ha causato la morte di un numero stimato tra 1,5 e 3 milioni di persone su una popolazione di circa 8 milioni, ovvero circa un quarto della popolazione totale della Cambogia. Questo evento è spesso definito un "autogenocidio" perché le vittime erano prevalentemente cambogiane, anche se mirava a distruggere gruppi specifici all'interno della società.

Contesto Storico: dopo anni di guerra civile, esacerbata dal coinvolgimento degli Stati Uniti (con bombardamenti segreti e l'invasione del Vietnam del Sud che si estese anche in Cambogia), i Khmer Rossi conquistarono la capitale Phnom Penh il 17 aprile 1975. Il loro leader, Pol Pot, era un ideologo marxista-leninista che aveva sviluppato una visione radicale e utopistica di una società agraria comunista, priva di influenze straniere, proprietà privata, denaro, città e persino di intellettuali o religione.

La Ideologia e gli Obiettivi del Regime:

I Khmer Rossi volevano trasformare la Cambogia in una società puramente agraria, basata su un collettivismo estremo e una totale autarchia. Per raggiungere questo obiettivo, intrapresero una "rivoluzione agraria" che prevedeva:

- **Abolizione della proprietà privata:** terre, case, beni personali, denaro e mercati furono aboliti.
- **Smantellamento della società urbana:** tutte le città furono evacuate, e i loro abitanti (i "nuovi cittadini", considerati corrotti dalle influenze straniere) furono costretti a marciare verso le campagne per lavorare nelle risaie e nei campi.
- **Eliminazione delle classi sociali:** in particolare, l'intelligenza, gli insegnanti, i professionisti, i religiosi e chiunque avesse un'educazione o legami con il precedente regime fu perseguitato e ucciso.
- **Repressione delle minoranze etniche e religiose:** Vietnamiti, Cham (una minoranza musulmana), Cinesi, Thai e membri di altre minoranze etniche e religiose furono sistematicamente perseguitati e massacrati. Anche i buddhisti furono perseguitati e i monaci costretti a "ritornare alla vita secolare" o uccisi.
- **Distruzione delle tradizioni e delle istituzioni:** ogni forma di cultura tradizionale, religione e istituzione sociale pre-rivoluzionaria fu annientata.

Le Modalità del Genocidio:

1. **Evacuazione Forzata delle Città:** subito dopo la presa di Phnom Penh, la popolazione fu costretta a lasciare le città e a marciare verso le zone rurali. Molti morirono lungo il cammino per fame, stanchezza o violenze.
2. **Lavoro Forzato e Fame:** nelle "comuni" agricole, le persone furono costrette a lavorare in condizioni disumane, con razioni di cibo insufficienti e senza accesso a cure mediche. La fame e le malattie divennero cause diffuse di morte.
3. **Torture ed Esecuzioni di Massa:** chiunque fosse sospettato di essere un nemico della rivoluzione (ex soldati, funzionari, intellettuali, medici, insegnanti, persone che parlavano una lingua straniera, chi portava occhiali o semplicemente chi sembrava "colto") veniva arrestato, torturato per estorcere confessioni (anche di crimini mai commessi) e poi giustiziato.
 - **S-21 (Tuol Sleng):** la prigione di sicurezza S-21 a Phnom Penh, un ex liceo, divenne un centro di interrogatorio e tortura dove circa 15.000-20.000 persone furono torturate e poi inviate ai "Campi della Morte" per essere uccise. Solo una manciata di persone sopravvisse a S-21.
 - **I Campi della Morte:** siti come Choeung Ek divennero luoghi di esecuzione di massa, dove le vittime venivano uccise in modo brutale (spesso con strumenti agricoli per risparmiare proiettili) e poi gettate in fosse comuni.
4. **Divisione Familiare e Controllo Totale:** le famiglie venivano spesso separate, e i bambini indottrinati e usati come spie o soldati. Ogni aspetto della vita quotidiana era controllato dal regime.

La Caduta del Regime:

Il regime dei Khmer Rossi cadde nel gennaio 1979, quando il Vietnam invase la Cambogia, rovesciando Pol Pot e installando un governo amico. Solo allora l'entità delle atrocità cominciò a venire alla luce.

Giustizia e Riconoscimento:

Sebbene ci sia stato un lungo periodo di impunità, i **Tribunali Straordinari nelle Corti della Cambogia (ECCC)**, un tribunale sostenuto dalle Nazioni Unite, sono stati istituiti nel 2006 per processare gli alti dirigenti dei Khmer Rossi. Hanno condannato alcuni dei principali architetti del genocidio, tra cui Nuon Chea ("Fratello Numero Due") e Khieu Samphan (capo di stato). Pol Pot stesso morì nel 1998 prima di poter essere processato.

Il genocidio in Cambogia è un esempio agghiacciante di come una visione ideologica radicale, combinata con la paranoia e la brutalità, possa portare a un'autodistruzione di massa su una scala terrificante, con l'intento esplicito di annientare intere categorie di persone percepite come ostacoli alla "purezza" rivoluzionaria.

5. **Aborigeni australiani: forse uno dei più crudeli e dimenticati genocidi della storia, perché fatto contro persone inermi e pacifiche**, portato avanti con talmente tanto successo, che oggi i pochi superstiti aborigeni hanno ormai dimenticato **la propria lingua e le proprie tradizioni**.

Come per il genocidio operato contro i nativi americani, anche in questo caso una lunga sequela di stragi, iniziate nel 1770 e terminate pochi decenni addietro con l'indegna pratica operata dal "civile" stato della corona inglese, di rapire i figli degli aborigeni per deportarli in centri di rieducazione, in una pratica passata alla storia come "Stolen generation" (generazione rubata)... Lo Stato australiano sotto la guida della civilissima Royal Family, da sempre impegnata a difendere la democrazia, esportandola con "guerre di civilizzazione" negli altri paesi oppressi, l'ha praticata "molto bene" all'interno del proprio territorio, dimenticando che la terra ora chiamata "Australia" appartiene agli aborigeni e non agli inglesi-australiani che hanno sterminato oltre il 90% della popolazione autoctona.

Quando i britannici sbarcarono nel 1788 e dichiararono l'Australia *terra nullius* (terra di nessuno), ignorarono del tutto la presenza delle centinaia di comunità aborigene che vivevano lì da decine di migliaia di anni. Da quel momento iniziò un processo di colonizzazione che comportò:

- **Massacri e violenze:** molti aborigeni furono uccisi in scontri con i coloni, oppure attraverso vere e proprie campagne militari.
- **Espropriazione delle terre:** la perdita del territorio, fondamentale per il loro stile di vita, portò fame, malattie e disgregazione sociale.
- **Epidemie:** malattie portate dagli europei (vaiolo, influenza, tubercolosi) decimarono intere comunità.
- **Assimilazione forzata:** nel XX secolo, con le cosiddette *Stolen Generations*, molti bambini aborigeni furono sottratti alle famiglie e inseriti in istituti o famiglie bianche per "civilizzarli", cancellando le loro radici culturali.

Molti storici parlano apertamente di *genocidio* perché si trattò di una distruzione sistematica di culture, lingue e identità, non solo di vite umane.

Oggi in Australia c'è un forte movimento di riconciliazione, con richieste di scuse ufficiali (il famoso *Sorry Day* del 2008) e di restituzione di diritti e terre. Tuttavia le disuguaglianze sociali, economiche e sanitarie tra aborigeni e non aborigeni rimangono profonde.

N.B. Gli aborigeni sono il popolo più antico della terra, presenti in Australia già da 60.000 anni fa (Homo Sapiens compare circa 200.000 anni fa).

6. **Genocidio armeno:** fatto dai turchi, che consideravano gli armeni “nemici della patria”.

Il **genocidio armeno** è uno dei più drammatici eventi del XX secolo e spesso viene considerato il “primo genocidio moderno”. Avvenne tra il 1915 e il 1916, durante la Prima guerra mondiale, nell’Impero Ottomano.

Ecco i punti essenziali:

Contesto storico: L’Impero Ottomano era in declino e temeva che le minoranze cristiane, come gli armeni, potessero allearsi con la Russia (storico rivale). Gli armeni erano una comunità radicata da secoli, con forte identità culturale e religiosa, ma minoritaria e percepita come “pericolosa”.

Eventi principali:

- Nell’aprile 1915 il governo ottomano (allora controllato dai “Giovani Turchi”) ordinò l’arresto e la deportazione dei leader della comunità armena a Costantinopoli.
- Iniziò una campagna sistematica di **deportazioni forzate**, marce della morte nel deserto siriano, massacri e fucilazioni.
- Molti morirono di fame, sete e stenti durante gli spostamenti.
- Le stime parlano di **1-1,5 milioni di vittime**.

Carattere genocidario: L’intento era eliminare gli armeni come gruppo etnico-religioso, cancellandone la presenza nei territori anatolici. Per questo la maggior parte degli storici, e numerosi paesi, riconoscono questi eventi come *genocidio*.

Negazionismo e controversie:

La Turchia moderna non riconosce ufficialmente che fu genocidio, sostenendo che si trattò di morti dovute a guerra, carestia e disordini civili. Nonostante ciò, molti stati (tra cui Francia, Germania, Italia, USA e Vaticano) hanno riconosciuto ufficialmente il genocidio armeno.

Il genocidio armeno segnò profondamente la diaspora armena, che si sparse in tutto il mondo. Oggi è ricordato ogni 24 aprile (giornata della memoria del genocidio armeno).

7. **Il genocidio del Ruanda:** avvenuto solo pochi anni fa, milioni di morti a colpi di **machete**, solo per una differenza etnica.

Il genocidio del Ruanda, avvenuto nel 1994, è stato uno degli eventi più oscuri della storia recente, con circa 800.000 persone massacrate in soli 100 giorni. I massacri sono iniziati dopo l’abbattimento dell’aereo del presidente Habyarimana, un hutu, il 6 aprile 1994. Sebbene le responsabilità non siano mai state pienamente accertate, questo evento scatenò una violenza inaudita contro la minoranza tutsi e gli hutu moderati, perpetrata principalmente dalle milizie interahamwe e dall’esercito ruandese.

Le radici del conflitto sono complesse e affondano nella storia coloniale belga, che aveva esasperato le divisioni etniche tra hutu e tutsi, favorendo questi ultimi. Dopo l’indipendenza, la maggioranza hutu prese il potere, e le tensioni continuarono a crescere, culminando in un’ondata di odio e propaganda anti-tutsi.

8. Il genocidio (non genocidio) dei Catari: fatto dalla Chiesa cattolica nel XIII secolo

Il genocidio dei Catari, più propriamente chiamato crociata albigese, fu un conflitto che durò dal 1209 al 1229. Non fu un genocidio nel senso moderno del termine, ma piuttosto una serie di campagne militari e persecuzioni religiose contro i Catari, un movimento cristiano dissidente fiorito nel sud della Francia, in particolare nella regione della Linguadoca.

Chi erano i Catari? I Catari credevano in un dualismo, ovvero nell'esistenza di due principi eterni: uno buono (Dio) e uno malvagio (Satana). Rifiutavano molti dogmi della Chiesa cattolica, inclusa la gerarchia ecclesiastica, i sacramenti e la dottrina della Trinità. La loro dottrina era vista come una grave eresia dalla Chiesa di Roma.

Le cause della crociata: La Chiesa cattolica vedeva la diffusione del Catarismo come una minaccia esistenziale. Dopo anni di tentativi infruttuosi di conversione pacifica, Papa Innocenzo III bandì una crociata contro i Catari e i loro sostenitori. L'assassinio del legato pontificio Pierre de Castelnau nel 1208 fu la scintilla che fece scoppiare il conflitto.

Lo svolgimento della crociata: La crociata fu condotta principalmente da nobili francesi del nord, desiderosi di acquisire terre e ricchezze nel sud. Fu caratterizzata da estrema brutalità. Uno degli episodi più tristemente noti fu l'assedio di Béziers nel 1209, dove si racconta che, quando fu chiesto come distinguere i Catari dai cattolici, il legato pontificio Arnaldo Amalrico rispose: "Uccideteli tutti! Dio riconoscerà i suoi!"

Le conseguenze:

- **Declino del Catarismo:** La crociata distrusse quasi completamente il movimento cataro nel sud della Francia. I sopravvissuti furono oggetto dell'Inquisizione, istituita appositamente per estirpare l'eresia.
- **Annessione della Linguadoca alla corona francese:** I territori del sud, precedentemente semi-indipendenti, furono gradualmente assorbiti nel regno di Francia, rafforzando il potere del re.
- **Rafforzamento dell'Inquisizione:** La crociata albigese diede un impulso decisivo allo sviluppo e all'organizzazione dell'Inquisizione come strumento di controllo della fede.

Sebbene non sia classificato come "genocidio" secondo le definizioni moderne che si concentrano sull'eliminazione di un gruppo etnico o nazionale, la crociata albigese fu senza dubbio una campagna di sterminio mirata a un gruppo religioso, con conseguenze devastanti per la popolazione della Linguadoca.



Questi sono solo alcuni dei tanti genocidi accaduti nella storia. Quello che ci racconta la storia d'altronde è solo una parte della verità, infatti la storia, come è noto, la scrivono i vincitori. Non ci dimentichiamo ad esempio che l'Impero Romano rase al suolo Cartagine, la quale scomparve come società dalla storia, i sopravvissuti all'assedio furono venduti come schiavi, Cartagine ricomparve solo secoli dopo, e non ci scordiamo che Cesare uccise circa un milione di galli.

Se è vero che la Shoah fu il genocidio per eccellenza, quello per cui è stato inventato questo termine, gli altri furono meno famosi, meno scientifici e forse con un numero minore di morti, ma avevano sempre il fine ultimo di cancellare dalla faccia della terra il nemico, o presunto tale. Attualmente, è in atto un vero e proprio genocidio di yemeniti ad opera dei sauditi e dei suoi alleati, ma quasi nessuno ne parla, è una delle più gravi crisi umanitarie contemporanee, ma viene raramente etichettato come genocidio dalle istituzioni internazionali. Al momento, né le Nazioni Unite né agenzie internazionali hanno ufficialmente definito la situazione in Yemen come genocidio. Tuttavia, numerosi organismi hanno sollevato accuse di crimini di guerra e violazioni massicce dei diritti umani, compresa la distruzione di infrastrutture civili, attacchi indiscriminati, blocchi agli aiuti umanitari e un collasso sanitario che ha causato centinaia di migliaia di morti, perlopiù civili.

La distinzione tra genocidio e altri crimini internazionali, come i crimini di guerra o i crimini contro l'umanità, risiede principalmente nell'intento specifico di distruggere, in tutto o in parte, un gruppo nazionale, etnico, razziale o religioso. Dimostrare questo intento è spesso la sfida più grande nelle indagini legali. Tuttavia, la mancanza di una designazione ufficiale di genocidio non diminuisce in alcun modo l'orrore e l'impatto devastante delle violazioni dei diritti umani che il popolo yemenita sta subendo.

Abbiamo fatto in questo piccolo resoconto un viaggio doloroso attraverso le pagine più oscure della storia umana: quelle macchiate dal sangue dei genocidi. Dal Genocidio Armeno all'Olocausto, dalla Cambogia al Ruanda, e con l'ombra di simili atrocità che ancora incombe su conflitti contemporanei, abbiamo testimoniato la capacità dell'uomo di infliggere una sofferenza inimmaginabile, di deumanizzare il prossimo e di pianificare la distruzione di interi gruppi umani. Il genocidio non è un evento spontaneo; è l'apice di un processo. Un processo che inizia con l'odio, alimentato dalla propaganda, nutrito dall'indifferenza e perpetrato dall'azione, o dall'inazione, di coloro che detengono il potere. Le ideologie estremiste, nazionalismi virulenti e la demonizzazione dell'altro possano creare un terreno fertile per la violenza più estrema. E abbiamo imparato, a caro prezzo, che la storia non è solo un elenco di date e fatti, ma un monito vivente.

Il termine "genocidio" è nato da una necessità: quella di dare un nome all'innominabile, di riconoscere e condannare un crimine unico nella sua portata e nella sua malevolenza. La Convenzione delle Nazioni Unite sul Genocidio del 1948 è stata una promessa solenne, un impegno globale a prevenire e punire tale atrocità. Eppure, la storia successiva ci ha mostrato quanto sia fragile e spesso disattesa questa promessa.

L'atteggiamento della comunità internazionale dovrebbe essere duplice.

Innanzitutto, abbiamo il dovere **della memoria**. Ricordare le vittime, nominare i carnefici e comprendere le dinamiche che hanno portato a questi orrori è essenziale. La memoria non è un atto passivo; è un atto di resistenza contro l'oblio e contro coloro che cercano di negare la verità. È attraverso la memoria che onoriamo le vite spezzate e impariamo le lezioni più dure della storia. Dobbiamo educare le nuove generazioni, non per spaventarle, ma per renderle consapevoli della

fragilità della pace e della democrazia, e per equipaggiarle con gli strumenti critici per riconoscere e contrastare i segnali d'allarme.

In secondo luogo, abbiamo il dovere **dell'azione**. L'imperativo del "mai più" non può essere solo uno slogan. Richiede vigilanza, coraggio e un impegno costante. Significa sostenere le istituzioni internazionali dedicate alla giustizia, come la Corte Penale Internazionale, e lottare contro l'impunità. Significa rafforzare i meccanismi di allerta precoce e la volontà politica di agire quando i segni del genocidio iniziano ad apparire. Significa combattere l'incitamento all'odio in ogni sua forma e difendere i diritti di tutte le minoranze.

Non possiamo permetterci di restare indifferenti. Ogni volta che si nega un genocidio, ogni volta che si minimizzano le sofferenze, ogni volta che la comunità internazionale fallisce nell'intervenire di fronte a evidenti violazioni dei diritti umani, si apre una breccia nella nostra coscienza collettiva, una crepa nella diga che dovrebbe proteggere l'umanità da sé stessa.

Che il ricordo dei genocidi passati sia di stimolo a costruire un futuro in cui la dignità umana sia inviolabile, in cui la diversità sia celebrata e in cui l'odio non trovi spazio. Solo così potremo sperare di onorare veramente la promessa del "Mai Più".



Genocidi nella storia

a cura di Giancarlo Buccella

Quanti dimenticati nel Giorno della Memoria!

È giusto che ogni 27 gennaio si ricordi e si rifletta sul genocidio più tristemente noto del Novecento, ma è altrettanto doveroso non dimenticare le vittime di tanti altri genocidi perpetrati nella storia dell'umanità.

Il termine *genocidio* fu coniato nel 1944 dal giurista polacco Raphael Lemkin, ebreo, per definire lo sterminio sistematico degli ebrei da parte dei nazisti, la Shoah. In realtà il concetto si può estendere ad altri eventi tragici e sanguinosi che, in diverse epoche, hanno annientato interi popoli.

Genocidi della storia

Popolo	Responsabili	Periodo	Vittime stimate (milioni)
Nativi americani (Nord e Sud)	Europei	1500-1800	50
Ebrei, zingari, omosessuali e oppositori politici	Nazisti	1933-1945	17
Ucraini	Stalin	1930	5
Cambogiani	Pol Pot	1975-1979	3
Aborigeni australiani	Impero britannico	1770-1970	1
Armeni	Turchi	1915-1917	1,5
Tutsi, Twa e Hutu moderati	Governo del Ruanda	1994	1
Catari (sud della Francia)	Chiesa cattolica	1209-1229	0,02

1. Popolazione indigena del Nord e Sud America

Questo può essere definito il “genocidio perfetto”: nessuno ha mai protestato, nonostante decine di milioni di morti in pochi secoli. La cultura dei nativi nord americani è stata quasi dimenticata e, anzi, per lungo tempo il loro sterminio è stato esaltato da libri, film, statue e persino nomi di città.

I popoli indigeni del nord e sud morirono a causa delle guerre di conquista, della perdita del loro ambiente, del cambio forzato dello stile di vita e soprattutto delle malattie portate dai colonizzatori, contro cui non avevano alcuna difesa immunitaria.

2. Shoah o Olocausto

Lo sterminio sistematico degli ebrei da parte dei nazisti, considerati “nemici della nazione tedesca”. Per lo stesso motivo furono perseguitati e uccisi anche oppositori politici, omosessuali, zingari e tutti coloro che non rientravano nell’ideologia razziale del Reich.

3. Genocidio ucraino (Holodomor)

Perpetrato da Stalin negli anni Trenta, forse nato da un enorme errore di valutazione economica, resta il fatto che milioni di ucraini morirono di fame: i raccolti furono requisiti e destinati altrove, lasciando intere regioni alla carestia.

4. La Cambogia di Pol Pot

Tre milioni di morti in un Paese che allora contava circa 20 milioni di abitanti. Un orrore senza fine, iniziato per ragioni politiche e sfociato in un susseguirsi di atrocità crescenti, alimentate dalla follia del leader dei Khmer rossi.

5. Aborigeni australiani

Forse uno dei genocidi più crudeli e dimenticati: condotto contro un popolo pacifico e inerme, fu portato avanti con tale “successo” che i pochi superstiti hanno perso lingua e tradizioni.

Le stragi iniziarono nel 1770 e proseguirono fino a pochi decenni fa. Emblematica fu la “Stolen Generation” (Generazione rubata): migliaia di bambini aborigeni strappati alle famiglie per essere rinchiusi in centri di rieducazione, nel tentativo di cancellare ogni identità culturale.

Gli aborigeni sono il popolo più antico della Terra: presenti in Australia già 60.000 anni fa, (Homo Sapiens compare tra 200.000 e 300.000 anni fa).

6. Genocidio armeno

Nel 1915 l'Impero ottomano sterminò circa un milione e mezzo di armeni, considerati “nemici della patria”. Ancora oggi il riconoscimento ufficiale di questo genocidio è oggetto di tensioni politiche.

7. Il genocidio del Ruanda

Avvenuto nel 1994, causò circa un milione di morti in poche settimane, soprattutto tutsi e hutu moderati, massacrati a colpi di machete in nome di un odio etnico fomentato dal potere politico.

8. Il genocidio dei Catari

Nel XIII secolo, nel sud della Francia, la Chiesa cattolica ordinò lo sterminio dei Catari, considerati eretici. Secondo le cronache, il legato papale pronunciò la frase: “Uccideteli tutti, Dio riconoscerà i suoi”. Donne e bambini inclusi.

Riflessioni finali

Questi sono solo alcuni dei tanti genocidi avvenuti nella storia. Ma ciò che la storia ci racconta è sempre solo una parte della verità, perché – come è noto – la scrivono i vincitori.

Non dimentichiamo, ad esempio, che l'Impero romano rase al suolo Cartagine: la città scomparve dalla storia, i sopravvissuti furono venduti come schiavi. Né che Cesare massacrò circa un milione di Galli.

Se è vero che la Shoah fu il genocidio per eccellenza, quello per cui è stato coniato il termine, anche gli altri – meno “scientifici” o meno noti – ebbero sempre lo stesso fine: cancellare un popolo dalla faccia della terra.

E oggi? Nel silenzio quasi generale è in corso un vero e proprio genocidio nello Yemen, perpetrato dall'Arabia Saudita e dai suoi alleati. Ma nessuno sembra parlarne...

Alcune riflessioni sul tema del male

a cura di Giancarlo Buccella



Premessa

Joseph Ratzinger – Unde malum? Da dove viene il male?

Vittorio Possenti – Dio e il male (tratto dal testo “Essere e libertà”)

Papa Giovanni Paolo II – Udienza Generale del 9 novembre 1988

Papa Giovanni Paolo II – Lettera Apostolica “Salvifici Doloris”

Papa Francesco – Meditazione mattutina nella Cappella Sanctae Marthae (26 aprile 2013)

Giancarlo Buccella – Alcune poesie

Giancarlo Buccella – La vita è un cammino

Premessa

Il concetto di "male" è uno dei più antichi e persistenti interrogativi dell'esperienza umana, una questione che ha tormentato filosofi, pensatori e individui comuni attraverso i millenni. Da una prospettiva laica, ovvero slegata da interpretazioni teologiche o trascendenti, il male non è una forza demoniaca o una punizione divina, bensì un fenomeno intrinsecamente radicato nella realtà del mondo e nell'agire umano. La sua comprensione e mitigazione richiedono un'analisi rigorosa delle sue manifestazioni, delle sue origini e delle possibili risposte che la ragione e l'etica possono offrire.

Il male in un contesto laico

Iniziamo con il delineare cosa si intenda per male in un contesto laico, che rappresenta il contesto maggioritario nella società occidentale. Per un laico, lontano dalle categorie di peccato originale o di prova divina, il male si concretizza primariamente come sofferenza: il dolore fisico acuto di una malattia terminale, il trauma psicologico di una perdita inaspettata, la disperazione di chi subisce violenza o ingiustizia. È la privazione di benessere, di salute, di libertà, di opportunità, elementi essenziali per una vita degna. Il male si manifesta anche come danno, sia quello inflitto intenzionalmente, espressione di crudeltà o sadismo, sia quello derivante da negligenza, inettitudine o dalle cieche forze della natura. In questa visione, il male è tangibile, misurabile nei suoi effetti e visibile nelle sue conseguenze sugli individui e sulle collettività.

Il laico, come abbiamo esplorato, identifica le sorgenti del male in fenomeni concreti e studiabili:

1. **Origini Individuali:** vede il male nascere da disfunzioni psicologiche (disturbi della personalità, psicopatia), da predisposizioni biologiche (aggressività istintiva in contesti disfunzionali) o da processi cognitivi e sociali che alterano il giudizio e l'empatia (come mostrano gli studi sull'obbedienza all'autorità o la disumanizzazione). Qui, il "da dove" è spiegato attraverso la psicologia, la neuroscienza e la sociologia.
2. **Origini Sociali e Strutturali:** riconosce che il male è generato da sistemi ingiusti: la povertà, la disuguaglianza, l'oppressione, la discriminazione, le ideologie totalitarie. In questo caso, il "da dove" è individuato nelle strutture socio-economiche, politiche e culturali create e mantenute dagli esseri umani.
3. **Origini Naturali:** accetta che una parte del male derivi da eventi naturali intrinseci al funzionamento del cosmo (terremoti, malattie, incidenti) che non hanno alcuna intenzionalità morale. Qui, il "da dove" è la natura stessa, con le sue leggi impersonali e talvolta distruttive.

Pensa che il male non abbia un'origine unica o misteriosa, ma molteplici radici, ciascuna delle quali richiede un approccio di comprensione e intervento specifico. Non c'è un "demone" o una "punizione" da cui deriva, ma una complessa interazione di fattori interni ed esterni all'essere umano e al suo ambiente.

In ultima analisi, la risposta laica al problema del male è un impegno costante verso la costruzione di una società più giusta, empatica e razionale. Non si tratta di eliminare completamente la sofferenza, un'utopia irrealizzabile dato il carattere intrinseco del male naturale e la complessità della psiche umana, ma di minimizzarne le manifestazioni evitabili e di alleviarne l'impatto. Riconosce che la lotta contro il male è una sfida perpetua che definisce gran parte del nostro essere uomini. Non vi è una soluzione trascendente, ma un imperativo etico di agire nel mondo per ridurre la sofferenza e promuovere il fiorire dell'esistenza. Quando *infine* la morte tocca da vicino *una*

persona, sia per la perdita di una persona cara sia per la consapevolezza della nostra stessa ineluttabile fine, la categorizzazione laica del male come fenomeno naturale assume il suo significato più acuto. la morte per il laico non è una punizione, né un passaggio verso un'altra dimensione in senso stretto. è la conclusione biologica di ogni esistenza, un evento intrinseco al ciclo vitale. In buona sostanza per il laico il male è una condizione data, cerca di categorizzarlo ed elaborare strategie per mitigarlo, ma non ha una consapevolezza di cosa sia veramente e soprattutto del perché esista. Il laico non si pone neppure il problema del senso, perché secondo lui la natura stessa e tutto quanto esiste non ha un senso, ma tutto è solo frutto di casualità. Il Cosmo è frutto del caso, l'uomo è frutto del caso, perciò non ha nessun senso porsi il problema del senso delle cose, del male e della vita stessa.

Ma bisogna riconoscere che l'uomo è per sua natura “religioso”, quindi volgiamoci ad una comprensione più connaturata alla natura dell'uomo.

Già nelle religioni preistoriche e politeiste è presente l'idea della contrapposizione tra bene e male (anche nelle forme del totemismo, sciamanesimo, animismo ecc.), possiamo senz'altro affermare che ogni religione è strettamente connessa al problema del male. Il pensiero occidentale nasce dal pensiero filosofico dei greci, quindi vediamo come essi lo hanno affrontato.

Il male nel contesto del pensiero dei Greci

Per i Greci il problema del male non era affrontato in termini religiosi, come punizione o peccato, ma in rapporto al cosmo e alla vita umana. Già nei Presocratici, ad esempio in Empedocle, compare l'idea che ciò che chiamiamo male non sia tanto un difetto morale quanto una forza cosmica: la Contesa, in opposizione all'Amore. Il cosmo, secondo lui, è regolato da queste due potenze, e ciò che noi percepiamo come male non è altro che il risultato inevitabile di questa lotta, necessaria a mantenere l'equilibrio del tutto.

Platone, invece, pur mantenendo l'idea che il Bene sia il principio supremo, riconosce che il male esiste come imperfezione, come “scoria” dell'ordine ideale. Nei dialoghi come il *Timeo* o il *Teeteto* non lo considera mai un principio assoluto, ma piuttosto una conseguenza del fatto che il mondo sensibile, rispetto al mondo delle Idee, non può essere perfetto. In altre parole, il male non si oppone al Bene, ma esprime il limite della materia e della necessità.

Con Epicuro la questione cambia prospettiva. L'esistenza del dolore e della sofferenza porta a dubitare dell'idea di divinità benevole e onnipotenti. La celebre argomentazione epicurea – se gli dèi vogliono eliminare il male ma non possono, non sono onnipotenti; se possono ma non vogliono, non sono benevoli; se né vogliono né possono, che razza di dèi sono? – mette in crisi la visione tradizionale del divino. In realtà Epicuro pensava a divinità lontane e indifferenti, e proprio per questo il male, e in particolare il dolore, è un fatto naturale da accettare e da ridurre attraverso la filosofia, la ricerca della serenità e l'eliminazione delle paure infondate.

Gli Stoici, infine, affrontano il male in maniera radicale: ciò che noi chiamiamo male non esiste come realtà autonoma. Non è nelle cose, ma nei giudizi che formuliamo su di esse. La malattia, la povertà, perfino la morte, non sono mali in sé: diventano tali solo se li viviamo come tali. L'unico vero male, per loro, è agire contro la ragione e contro natura, ossia lasciarsi trascinare da passioni e desideri non governati. Da qui deriva la loro etica del distacco: imparare a distinguere ciò che dipende da noi e ciò che non dipende da noi, perché soltanto nel primo caso possiamo parlare di responsabilità morale.

In sintesi, i Greci non hanno mai concepito il male come una forza metafisica opposta al bene, come accadrà in seguito in tradizioni religiose. Per loro il male era o un principio cosmico, o una conseguenza della finitezza, o una constatazione del dolore naturale, o ancora un errore di giudizio. In ogni caso, il problema non era tanto spiegare “perché” esista, ma come collocarlo nella comprensione del mondo e, soprattutto, come affrontarlo nella vita umana.

Entra in scena il Cristianesimo

Con il cristianesimo la prospettiva cambia radicalmente. Il male assume uno statuto più drammatico e, potremmo dire, “personalizzato”. Non è più solo una privazione o un errore: diventa peccato, ossia una frattura della relazione con Dio. L’uomo non è soltanto imperfetto o fragile, ma colpevole. Il racconto della caduta di Adamo ed Eva istituisce il male come conseguenza di una scelta libera ma sbagliata, che ha contaminato la condizione umana: il peccato originale. Da qui in poi, ogni sofferenza non è soltanto necessità cosmica o caso naturale, ma parte di una condizione corrotta che solo la grazia divina può redimere.

La filosofia greca cercava soluzioni razionali al male: la serenità del saggio epicureo, la disciplina dello stoico, la contemplazione del Bene platonico. Il cristianesimo, invece, colloca la soluzione al di fuori dell’uomo: non si tratta più di imparare a pensare o ad agire rettamente, ma di ricevere salvezza attraverso Cristo. Il male non si dissolve con la conoscenza o con la ragione, ma si vince con la redenzione.

C’è un altro punto di differenza importante. Per i Greci, il cosmo nella sua totalità rimane fondamentalmente ordinato e armonioso: il male è un aspetto interno, ma non ha l’ultima parola. Nel cristianesimo, invece, la storia stessa diventa teatro di una lotta tra bene e male, tra Dio e il demonio, tra grazia e peccato. Il male assume così un carattere più “storico-drammatico”, legato alla libertà dell’uomo e alla necessità di salvezza.

I seguenti due contributi sono tratti dal sito: “Gliscritti.it” (17 /11 /2022)

a cura di don Andrea Lonardo

1. *Joseph Ratzinger* Unde malum? Da dove viene il male?
2. *Vittorio Possenti* “Essere e libertà” [capitolo: Dio e il male]

La domanda sul male e sulla sua origine, si pone dinanzi a Dio, al suo cospetto. E' evidente come il sole che, se Dio non fosse, neanche il male sarebbe. Se avesse ragione il materialismo, né la colpa morale, né il lutto sarebbero realmente male, ma sarebbero semplicemente eventi che “appaiono” all'uomo, in una realtà non dotata di radicale libertà e senso, in una natura né buona, né cattiva. Come le idee di Dio, di anima e di libertà sono correlativa (e la non verità della prima porterebbe alla insensatezza delle altre) così possiamo affermare del male. La lettura recente di alcuni contributi che si pongono volutamente e coscientemente da un punto di vista teologico, da una prospettiva che considera il male non solo come evento morale intra-umano, ma lo valuta al cospetto di Dio, ci ha spinto a voler condividere alcuni pensieri. I tre approcci che proponiamo ci sono sembrati straordinariamente in consonanza e potrebbero esser letti quasi come un testo unitario, pur nelle diverse sfumature.

E' in gioco innanzitutto che cosa sia il male o chi sia il male. E la sfumatura chi/che cosa - come vedremo - è questione centrale. Non solo per l'origine del male. E' questione che vuole identificare, nominare, ciò che il male stesso sia (e non si può definire l'origine di qualcosa, se non si ha il coraggio di identificarlo). E' questione che determina in conseguenza anche come il male si manifesti e quali siano le sue espressioni più proprie. Il card. J.Ratzinger, in un suo saggio del 1974, che vi proponiamo, ha acutamente asserito il carattere personale/non personale del male. Il maligno/il male è veramente nemico di Dio, è veramente nemico dell'uomo – con linguaggio popolare potremmo dire che “ce l'ha con l'uomo, se la prende con l'uomo, ce l'ha liberamente con lui” – con una libertà che non è la necessità degli eventi naturali. Ma questa inimicizia è proprio nella forma della non personalità. Non ha forse il pensiero cristiano – ed è uno dei suoi contributi più significativi – mostrato che si è persona, proprio perché si hanno relazioni e che queste relazioni sono intessute di amore, di responsabilità, di fiducia, di fecondità, ecc. ecc.? Eppure il male è proprio colui che non ha queste relazioni, colui che ha scelto e sceglie di rifuggire da ogni relazione di amore, anzi di insidiare quelle che esistono, colui che si è tagliato fuori da ogni fiducia da prestare a Dio e all'uomo. Il male è rabbia, amarezza, tristezza, è il ghiaccio di una immobilità glaciale (come lo ha ben descritto Dante). Ad una analisi precisa il male si rivela tutt'altro che goduria, piacere, passione per la vita, ma piuttosto come l'incapacità di gioire. Il rifiuto di ogni relazione di bene diviene, infine, anche incapacità dell'amore di sé: il male si rivela così come essere “personale” – “non persona”. E tutto questo perché non è semplicemente assenza di bene, come, pur acutamente, talune posizioni filosofiche sono arrivate a definire, ma, più radicalmente, assenza di quel bene che è Dio stesso, anzi opposizione decisa e determinata a Dio stesso, il cosciente volgergli le spalle. E' rifiuto, non solo assenza di Dio. Il rifiuto di Dio è così rifiuto dell'Origine della dignità personale umana, lotta contro il Creatore stesso che diviene tentativo di dissoluzione della stessa personalità umana, a motivo del legame di ogni persona con Colui che è l'Amante delle sue creature. Ma seguiamo da presso il card. Ratzinger nelle sue considerazioni ^[1]. Esse prendono avvio dalla valutazione critica di un intervento dell'esegeta H. Haag che, negli anni sessanta, si era espresso contro l'idea dell'esistenza del Maligno.



Unde malum? Da dove viene il male?

Joseph Ratzinger

Il vangelo della prima domenica di quaresima, che riferisce la tentazione di Gesù ad opera di

«Satana», dà occasione di anno in anno di meditare su quella misteriosa potenza, che si nasconde dietro il nome di «Satana». Un ulteriore impulso a questo problema venne alcuni anni fa da Tubinga; nel 1969 Herbert Haag, professore di Antico Testamento, vi aveva pubblicato un libretto con il significativo titolo di “La liquidazione del diavolo?” Questo libretto culmina nella frase: «Noi abbiamo già compreso che nel Nuovo Testamento il concetto di 'diavolo' sta semplicemente al posto del concetto di 'peccato'» (p. 52). Al papa, che aveva sottolineato la reale esistenza di Satana e si era dichiarato contrario alla sua dissoluzione in qualcosa di astratto, Haag ha di recente rimproverato di ricadere nella visione del mondo giudaica dei primi tempi; Paolo VI farebbe confusione, nella Sacra Scrittura, tra visione del mondo ed espressione della fede. Cosa si può dire di ciò? E' importante qui, anzitutto, una precisazione metodologica. Neppure Haag può negare che nel Nuovo Testamento Satana e i demoni giochino un ruolo importante. Non può contestare nemmeno il fatto che nel Nuovo Testamento il termine «diavolo» non rappresenta affatto un sinonimo di peccato, ma allude ad una potenza esistente; l'uomo è abbandonato ad essa e ne viene liberato per opera di Cristo, perché solo lui, nella sua qualità di «più forte» può legare l'uomo «forte» (Lc11,22; cfr. Mc. 3,27). La supposizione che si avrebbe conosciuto la possibilità di sostituire diavolo con peccato sorge in Haag per via induttiva, senza un vero e proprio fondamento; il «fondamento» si nasconde in una formulazione, che per la sua ovvietà potrebbe indurre a rinunciare ad un esame più preciso: «Nel significato delle forme di pensiero giudaiche di allora il diavolo appare nel Nuovo Testamento come l'esponente del male. Gesù e gli apostoli si muovono entro queste forme di pensiero allo stesso modo del loro ambiente» (p. 47). Qui si ammette — come il testo afferma indiscutibilmente — che Gesù e gli apostoli fossero convinti dell'esistenza di potenze demoniache; nello stesso tempo, però, si presuppone come del tutto evidente che essi fossero vittime «delle forme di pensiero giudaiche di allora». Da qui non è difficile derivare la conclusione seguente, che cioè «questa concezione non è più conciliabile con la nostra immagine del mondo» (p. 27). Ciò significa che il motivo per il «commiato dal diavolo» non poggia sulle affermazioni bibliche, le quali sostengono il contrario, ma sulla nostra visione del mondo, con la quale esso sarebbe «inconciliabile». In altre parole, Haag congeda il diavolo non come esegeta, come interprete della Scrittura, ma come persona del nostro tempo, che ritiene improponibile l'esistenza di un diavolo. L'autorità in forza della quale egli asserisce il suo giudizio non è, dunque, quella di interprete della Bibbia, ma la visione del mondo a lui contemporanea. Si potrebbe pensare di aver così eliminato il problema, perché è chiaro ormai che Haag giudica quello che è «conciliabile» con il pensiero moderno, contro il testo della Bibbia, sulla base della sua concezione. Ma la questione non è così semplice perché, in realtà, ci sono delle espressioni nella Bibbia, che non si possono reputare come testimonianza della fede, ma devono venir considerate come struttura della visione del mondo, nella quale quell'idea particolare si esprime. Questo vale

ad esempio per la visione del mondo geocentrica, che venne difesa in un primo momento, contro Copernico e Galilei, come dottrina biblica, finché si riconobbe che la Bibbia non è competente per problemi di astronomia; ciò vale per l'interrogativo sull'origine del mondo; per un certo tempo si volle vederla descritta letteralmente nel primo capitolo della Genesi, finché si ritrovò la strada per dar ragione di nuovo alla chiesa antica nell'ammettere che qui si tratta di affermazioni della potenza di Dio e del compito dell'uomo, ma non di informazioni scientifiche. Si dovrà dichiarare pure che non è affatto sempre chiaro fin dove arrivi l'affermazione di fede della Bibbia e cosa sia soltanto una strumentalizzazione del suo tema peculiare, determinata dal tempo. Nel medioevo l'idea della terra come centro dell'universo si era fusa così strettamente con la fede nell'incarnazione di Dio, con la speranza in un nuovo cielo e una nuova terra, che la visione del mondo eliocentrica apparve come un attacco al nucleo stesso della fede. Perché Dio infatti dovrebbe essersi fatto uomo su un pianeta privo di importanza dal punto di vista astronomico, posto in mezzo ad un gigantesco universo? La decisiva azione salvifica non era stata privata di una degna sede? Solo con una faticosa lotta si poté arrivare a capire cosa è necessario, e cosa non lo è, per credere nella «discesa» di Dio. Per questo parla a sfavore di Haag la semplicità con cui egli stabilisce ciò che è conciliabile o meno con la visione moderna del mondo; parla contro di lui la falsa pretesa di decidere in qualità di esegeta, benché egli parli come filosofo e la sua unica filosofia consista evidentemente in una irriflessiva modernità. Ma non è ancora stato deciso in senso univoco il problema se qui, forse, non ci si trovi realmente davanti solo ad un modo di vedere determinato dalla visione del mondo, il cui contenuto reale si debba separare dalla forma. Sorge perciò l'interrogativo: come si può chiarire ciò? Come si può evitare che vengano qui ripetuti degli scontri falsi e dannosi come la disputa con Galileo? Come si può impedire, viceversa, che la modernità venga amputata per amore della fede stessa? Anche questo è accaduto, da Reimarus fino ai cristiani tedeschi del Terzo Reich; nel mettere in guardia da nuovi casi Galileo, si tace in genere su questo fatto, benché gli effetti di cristianesimi così conformistici fossero probabilmente molto più catastrofici del processo a Galilei, che non fu soltanto un prodotto dell'ostinatezza ecclesiastica, ma la lotta di un'intera società, la quale doveva imparare a superare la scossa ricevuta dai principi spirituali della storia fin da allora vissuta ed a distinguere di nuovo, nel cambiamento dei tempi, tra «stelle fisse» e «pianeti», tra orientamento persistente e movimento transitorio. Non esistono criteri che si possano impiegare subito, e senza tema d'errare, in ogni caso che si presenti; il tracciare dei confini rimane un compito, che richiede anche un continuo sforzo spirituale; si potrà comprendere così una lotta per i confini della fede, finché, per un verso, rimane la disponibilità alla correzione sulla base di un sapere dimostrato e, dall'altra parte, si riconosce che una fede può venir realizzata soltanto nella fede comune con la chiesa; quello che di volta in volta viene considerato sostenibile o meno, non è soggetto alle disposizioni di decisioni private. Anche se non esiste criterio alcuno, che in tutti i singoli casi indichi automaticamente, volta per volta, dove termina la fede e dove inizia la visione del mondo, esistono tuttavia una serie di aiuti per giudicare, i quali indicano la strada da seguire nella ricerca di delucidazioni. Io ne nomino quattro.

Un primo criterio deriva dal rapporto dei due Testamenti. La Bibbia non esiste in uniformità, ma nell'accordo tra Antico e Nuovo Testamento, che nel loro porsi di fronte e nella loro unità si commentano a vicenda. Si deve affermare anzitutto che l'Antico Testamento ha valore soltanto in unione col Nuovo, sotto i suoi segni, per mezzo della sua rapportabilità, come pure che il Nuovo Testamento dischiude il suo contenuto solo grazie al suo continuo riferirsi all'Antico. Questo dato di fatto è generalmente riconosciuto per quanto riguarda le prescrizioni legislative dell'Antico Testamento; esse non hanno valore di legge nella loro letteralità, ma valgono in quanto sono una parte della storia che porta a Cristo, che è terminata in lui. La stessa regola di base, che Paolo ha chiaramente formulato per la questione della legge, determina in generale la relazione dei Testamenti. Se nell'ultimo secolo la si avesse avuta così chiaramente davanti agli occhi come l'ebbero i padri della chiesa, si sarebbe evitata tutta la disputa sul racconto della creazione. In base ad essa, infatti, il racconto della creazione della Genesi non ha valore diretto, come testo veterotestamentario, nella sua nuda letteralità, ma in quanto viene accolto nella prospettiva del Nuovo Testamento,

nell'ambito della cristologia. Se si usa questo criterio, si vede che Gv. 1,1 è l'assunzione neotestamentaria del testo della Genesi, la cui vivace descrizione viene riassunta nell'unica affermazione: in principio era il Verbo. Tutto il resto viene così rimandato nel mondo delle immagini. Ciò che rimane è la provenienza della creazione dalla parola, la quale si rispecchia nell'Antico Testamento in molte parole. Che senso ha questo criterio per le nostre questioni? Chi lo usa va incontro ad un risultato sconcertante. Mentre noi nel problema della creazione e nella questione della legge trovavamo, nel porre il Nuovo Testamento di fronte all'Antico, la tendenza alla concentrazione, al riassunto in un semplice punto centrale, qui appare esattamente il contrario, la tendenza cioè all'espansione; la presentazione di potenze demoniache appare nell'Antico Testamento soltanto gradualmente; nella vita di Gesù invece possiede un peso incredibile, che rimane immutato in Paolo e si mantiene fino agli ultimi scritti del Nuovo Testamento, nelle lettere della prigionia e nel vangelo di Giovanni. Questo processo di intensificazione, di estrema cristallizzazione del demoniaco — che avviene nel passaggio dall'Antico al Nuovo Testamento, proprio in contrapposizione alla figura di Gesù — e la persistenza del tema nell'intera testimonianza neotestamentaria possiedono una notevole forza espressiva. A partire da qui si potrà dire che nella storia iniziale della fede veterotestamentaria l'affermazione di potenze demoniache doveva rimanere in disparte, perché si doveva far accettare, in primo luogo, contro ogni dualità, la fede nel Dio uno ed unico. In un ambiente saturo di dei, che osservava incerto i cambiamenti tra dei buoni e cattivi, il richiamo a Satana avrebbe tolto la sua chiarezza alla decisiva professione religiosa. Solo quando la tesi dell'unico Dio, con tutte le sue conseguenze, era divenuta possesso imperturbabile di Israele, fu possibile allargare lo sguardo a delle potenze che superavano la dimensione dell'uomo, senza poter mettere in discussione Dio, nella sua unicità. Questo processo storico rimane importante in quanto anche oggi dà un parere vincolante sull'ordine gerarchico della conoscenza di fede. Al primissimo posto sta l'essere Dio di Dio, la sua unicità. La fede cristiana va verso Dio e, a partire da lui, vede il mondo; il cristiano, come dice Gregorio di Nissa a proposito del libro di Qohelet (2,14), ha i suoi occhi nella testa, cioè in alto, non in basso. Egli sa che colui che teme Dio non deve temere niente e nessuno e il timore di Dio è fede, qualcosa di molto diverso da un timore servile, da una paura dei demoni. Ma esso è anche qualcosa di molto diverso da un coraggio millantatore, che non vuol vedere la serietà della realtà. E' proprio del vero coraggio non nascondersi le dimensioni del pericolo, ma essere in grado di percepire la realtà nel suo insieme. E ciò chiarifica anche il fenomeno dell'intensificazione: quanto più l'uomo sta dalla parte di Dio, tanto più egli diventa realistico; quanto più chiari si mostrano i confini della realtà, tanto più chiara diventa anche la contrapposizione a ciò che è santo: le belle maschere del demonio non ingannano più colui che le osserva partendo da Dio. Questo porta già ad un secondo criterio. Si deve indagare di volta in volta in quale rapporto sta un'asserzione con la realizzazione interiore della fede e della vita del credente. Delle affermazioni che rimangono soltanto modi di vedere teoretici, ma non entrano nel vero e proprio svolgersi dell'esistenza, in via normale non potranno venir annoverate tra ciò che è essenzialmente cristiano. Viceversa ciò che non si presenta come un puro modo di vedere teoretico, ma sta nello spazio dell'esperienza di fede, appare nella vita di fede come dato dell'esperienza, ha una posizione del tutto diversa. L'idea del sorgere e del tramontare del sole, della posizione centrale della terra, poteva essere quindi un modo di vedere naturale e variamente interpretabile della fede, non apparteneva alle sue specifiche esperienze. La mistica, con la sua via dell'unione, portava piuttosto alla relativizzazione di tutti gli schemi di visione del mondo. In questa questione mi sembra di straordinaria importanza il fatto che la lotta con la potenza dei demoni appartiene allo specifico cammino religioso di Gesù stesso. La Bibbia è a conoscenza delle sue tentazioni (Lc. 22,28), non soltanto di quelle che vengono esplicitamente descritte; essa va così avanti da poter affermare che Gesù è venuto nel mondo per distruggere le opere del diavolo (1Gv 3,8). Questa formula compendia ciò che Gesù stesso dice — nella serie di detti sull'uomo più forte — della potenza dei demoni, il cui regno egli, nella forza dello Spirito Santo, porta alla rovina (Mc. 3,20-30). Sorprende che egli, che non voleva lasciarsi trasformare in uomo del miracolo, ritenesse la lotta contro i demoni la parte centrale del suo incarico (vedi ad esempio Mc 1,35-39) e che, di conseguenza, i pieni poteri su di essi costituiscano il nucleo del

potere, che egli conferisce ai suoi discepoli: essi vengono mandati «a predicare col potere di cacciare i demoni» (Mc. 3,14s). La lotta spirituale contro le potenze che rendono schiavi, l'esorcismo su un mondo abbacinato da demoni è una componente inseparabile dell'iter spirituale di Gesù e sta al centro sia della sua particolare missione che di quella dei suoi discepoli. La figura di Gesù, la sua fisionomia spirituale non cambia se il sole gira attorno alla terra oppure se la terra si muove attorno al sole, se il mondo si è formato per evoluzione oppure no, ma viene decisamente cambiata, se si esclude da essa la lotta con la sperimentata potenza del regno dei demoni. A questo secondo criterio è strettamente collegato il terzo. Una Bibbia senza chiesa sarebbe soltanto una raccolta letteraria. Perciò quando, al di là della necessaria ricerca scientifica di ciò che è strettamente storico, la Bibbia viene esaminata come libro della fede, quando viene cercata la distinzione tra fede e non fede, deve venir in ballo questa unità di Bibbia e chiesa. Come già dicemmo, la fede può venir realizzata soltanto nel credere insieme con tutti; essa svanisce dove viene superata dalla volontà del singolo individuo. Come ulteriore criterio è necessario quindi ricercare in che misura le affermazioni sono state accolte nella fede della chiesa. Ma la fede della chiesa non è un qualcosa del tutto univoco e circoscrivibile, altrimenti la questione sarebbe semplice. Si deve dunque discernere con più esattezza ed adoperarsi per scoprire in quale misura qualcosa è entrato a far parte della vera ed interiore realizzazione della fede, nella forma di base della preghiera e della vita stessa, al di là delle deviazioni della tradizione. Così, ad esempio, la disputa sulla filiazione divina di Gesù, sulla divinità dello Spirito Santo, sulla unità e trinità di Dio, è stata portata avanti a motivo delle conseguenze per la liturgia battesimale, per la liturgia eucaristica e quindi per il significato della conversione cristiana, quale si presenta nel battesimo. Basilio, ad esempio, che portò a conclusione l'ultima disputa sulla divinità dello Spirito Santo, ha discusso questo problema con molta rigore, partendo dall'intima pretesa del battesimo e della sua forma liturgica. Lui sostenne che il battesimo non è un trastullo liturgico, ma la solenne forma ecclesiale della decisione esistenziale, supposta dall'essere cristiano. Si deve poter prenderla alla lettera, soprattutto nel suo avvenimento centrale. Essa specifica cosa avviene nel divenire cristiani e cosa non avviene. Ma, per ritornare alla nostra questione, l'esorcismo e la rinuncia a Satana fanno parte dell'avvenimento centrale del battesimo; quest'ultima, assieme alla promessa a Gesù Cristo, costituisce l'essenziale porta d'ingresso al sacramento. Il battesimo introduce così l'uomo nel modello di esistenza di Gesù Cristo, nella sua lotta e nella sua libertà. Viene a contatto con la sua esperienza spirituale e la trasferisce in colui, che inizia ad imitare Cristo. Quando l'uomo cammina nella luce di Gesù Cristo il demonio viene trasportato dall'altra parte e diventa così superabile. Ritorna con pieno valore l'affermazione che se si volesse annullare la realtà della potenza demoniaca, si cambierebbe il battesimo e con esso la realizzazione della vita cristiana. Nella ricerca sulla chiesa, d'altronde, si dovrebbe includere l'esperienza dei santi, di coloro che credono in forma esemplare; parlo della loro esperienza, non di tutte le loro idee. Questa esperienza corrisponde all'esperienza di Gesù; con quanta maggior forza diventa visibile e potente ciò che è santo, tanto meno il demonio può nascondersi. Per questo si potrebbe dire senz'altro che lo scomparire dei demoni, il presunto divenire innocuo del mondo vanno di pari passo con lo scomparire di ciò che è santo.

Infine, come ultimo criterio, deve venir ricordato il problema della «visione del mondo», della conciliabilità con una conoscenza scientifica. La fede diventerà di continuo la critica di ciò che di volta in volta ha valore di certezza in quanto moderno e nuovo; però essa non può contraddire una conoscenza scientifica garantita, anche se questa deve stabilire dei segni negativi così notevoli. Si sarebbe curiosi di sapere in base a quali ragioni Haag decide «che questa concezione non è più conciliabile col nostro mondo». E' evidente che essa si oppone al gusto medio della gente; è altrettanto palese che essa non trova nessun appoggio in un mondo considerato funzionalisticamente. Ma in un puro funzionalismo non c'è posto neppure per Dio né per l'uomo come uomo, ma soltanto per l'uomo come funzione; qui dunque crolla molto di più della sola idea del «diavolo». Rimane difficile cercar di sapere in nome di quale filosofia Haag esprima il suo verdetto; secondo le apparenze egli parte da uno schema personalistico fortemente semplificato. Ma le forme del personalismo più approfondite hanno riconosciuto

senz'altro che con le sole categorie di io e tu non è possibile spiegare l'intera realtà; proprio il «rapporto» che unisce l'un l'altro i due poli è una realtà caratteristica ed autonoma. Alcuni suggerimenti tratti dal pensiero asiatico fanno oggi risaltare ancor di più questa coesione. Una malattia psichica, così dicono ad esempio, non è un semplice modo di sentirsi dell'io, ma si basa proprio su una perturbazione del «rapporto»; dal momento che il rapporto non è in ordine, è spezzato, sviato, rovesciato, anche l'io stesso è fuori fase. Il rapporto è una forza decisiva del destino della quale il nostro io non può affatto disporre completamente. Il ritenere questo è un razionalismo di una sincerità quasi fantastica. Qui il pensiero moderno mette a disposizione, mi sembra, una categoria che ci può aiutare a comprendere di nuovo e con più esattezza la potenza dei demoni, la cui esistenza è di certo indipendente da tali categorie. Essi sono una potenza del «rapporto», col quale l'uomo è confrontato ad ogni piè sospinto, senza che egli lo possa arrestare. Paolo intende esattamente questo quando parla dei «signori di questo mondo tenebroso»; quando dice che la nostra lotta è diretta contro di essi, contro le potenze celesti del male, non contro la carne e il sangue (Ef 6,12). Essa si dirige contro quel «rapporto» saldamente stabilito, che lega gli uomini l'uno all'altro e nello stesso tempo li separa uno dall'altro, che usa loro violenza mentre fa da preludio alla loro libertà. Qui si chiarifica una particolarità tutta specifica del demoniaco, cioè la sua assenza di fisionomia, la sua anonimità. Quando si chiede se il diavolo sia una persona, si dovrebbe giustamente rispondere che egli è la non-persona, la disgregazione, la dissoluzione dell'essere persona e perciò costituisce la sua peculiarità il fatto di presentarsi senza faccia, il fatto che l'inconoscibilità sia la sua forza vera e propria. In ogni caso rimane vero che questo rapporto è una potenza reale, meglio, una raccolta di potenze e non una pura somma di io umani. La categoria dell'intermedio, che ci aiuta così a ricomprendere l'essere del demonio, si presta inoltre per un altro servizio parallelo; rende possibile spiegare meglio la vera potenza opposta, che diventa anch'essa sempre più estranea alla teologia occidentale, lo Spirito Santo cioè. Noi potremmo dire, partendo da quella categoria, che egli è quell'intermediario, nel quale Padre e Figlio costituiscono una cosa sola, l'unico Dio; nella forza di questo intermediario il cristiano si pone di fronte a quell'intermediario demoniaco, che sta ovunque «fra mezzo» ed ostacola un'unità. Un teologo così «libero da pregiudizi» come H. Cox ha di recente affermato che i mass-media, nei modelli di comportamento da loro elogiati, farebbero appello «ai demoni non esorcizzati»; sarebbe perciò molto necessaria «una chiara parola di esorcismo» (Stadt ohne Gott, 1967, p. 210; trad. it.: La città secolare, Vallecchi, Firenze 1968). Forse egli lo pensa solo in termini allegorici, non lo so. Ma chi come cristiano vede i baratri dell'era moderna, vede operare la potenza dei sette demoni, che sono tornati nella casa pulita e vuota e mettono in moto il loro non-essere, costui sa che il compito di esorcista del credente inizia oggi a riacquistare quella necessità, che possedette all'inizio del cristianesimo. Egli sa che in questo campo è debitore di un servizio al mondo e che trascura il suo incarico, se egli aiuta i demoni ad avvilupparsi in quella anonimità, che è il loro elemento prediletto.

Come secondo contributo vi invitiamo a seguire il ricchissimo, anche se non facile, intervento del filosofo Vittorio Possenti che, nel suo recente saggio Essere e libertà ^[11], titola un capitolo: Dio e il male. Due citazioni aprono le sue riflessioni. Innanzitutto lo Pseudo Dionigi Areopagita che, nel Trattato sui nomi divini ha scritto:

Il male non è in Dio, né ha in sé nulla di divino, né viene da Dio.

Poi Plotino che, in Enneadi VI, 7, 23, aveva dichiarato:

La natura del Bene era già ciò che è, prima delle altre cose, quando il male ancora non c'era.

Queste due splendide affermazioni orientano già alla chiara consapevolezza del fatto che il pensiero cristiano non è dualistico. Non riconosce cioè due principi, egualmente divini ed eterni, del bene e del male. Il male ed il bene, pur essendo ovviamente antitetici e, quindi, correlativi, non hanno eguale dignità e, soprattutto, parità ontologica e temporale. Il cristianesimo dichiara la sua estraneità da espressioni filosofiche e religiose come quelle del Manicheismo e del Tao estremo-orientale ed, a maggior ragione, dalle loro banalizzazioni New Age. Il Bene, Dio, è ontologicamente primo ed eterno. Il male è secondario e temporale, non esistente dall'eternità. Vittorio Possenti inizia difendendo la centralità della questione filosofica del male.

Vittorio Possenti

.La sfida

Un retaggio si diparte dal XX secolo, forse il più oscuro e sanguinoso della storia umana, e sta nella lacerante domanda sul male. Se il pensiero antico iniziò la gigantomachia sull'essere e sul divenire che dura tuttora, forse nel nostro tempo si annuncia una gigantomachia sul male. Sono famose le parole di san Girolamo a proposito di Giobbe, libro che vale come scrigno per la meditazione e la cui scoperta è eterna quanto nell'uomo la sofferenza: “Spiegare Giobbe è come tentare di tenere nelle mani un'anguilla o una piccola murena: più forte la si preme, più velocemente sfugge di mano”, e questo nonostante lo splendore dei simboli e la profondità del discorso. Quasi lo stesso si potrebbe dire dell'interrogativo sul male: più cerchi di comprenderne il mistero, più questo sembra farsi fitto. Eppure abbandonare l'impresa sarebbe vile, oltre che impossibile: se anche l'uomo volesse abbandonare il male, questo non abbandonerà l'uomo. Il male costituisce un'inesorabile possibilità dell'esistenza umana. Come suggerisce la riflessione contemplativa, che sarebbe stoltezza mettere da parte, la possibilità del male è necessaria, dal momento che la limitazione è inerente a tutte le cose finite. Non potendo Dio fare l'assurdo, egli non potrebbe chiamare all'esistenza una creazione che fosse ad un tempo finita e perfetta, e dunque senza male (assunto che va lontano, implicando che, a differenza dal manicheismo, non è richiesto un Principio malvagio per render conto dell'esistenza del male). A chi perseveri nella meditazione si farà chiaro che la domanda più radicale tra tutte, quella che potrebbe denominarsi la “domanda delle domande”, la più saettante e misteriosa, quella dove l'uomo lasciato solo incontra il buio più fitto, non suona “Perché c'è il male?”, ma “perché Dio ha creato?” A tale interrogativo non può assegnare risposta nessuna gigantomachia sull'essere o sul male, perché occorrerebbe porsi nell'Assoluto e nessuna ragione umana, per quanto acuta e risplendente, può farlo. La risposta può venire dalla Trascendenza ed il suo araldo è la rivelazione, non la ragione. Nessuna astuzia del pensiero, nessuna saggezza intramondana sembra alla misura di quella dismisura che è il male: se l'intellectus mundi da solo è impari, può cercare un'alleanza con l'intellectus fidei. Nel porre il problema dinanzi al Trascendente, è imperativo che lo scandalo del male rimanga in tutta la sua forza. Non dalle dialettiche “speculative”, che riducono il male ad apparenza, ci si può attendere la vittoria sul male, ma dall'unione di contemplazione e azione, preghiera e lotta, compresa quella con Dio, in cui si inoltrarono Giacobbe e Giobbe. Sarà sempre possibile negare la legittimità dell'atteggiamento che sul male si colloca dinanzi a Dio. Essa rimane però dentro un paradosso ineludibile: la negazione di Dio è nutrita dalla contestazione che l'enigma del male gli indirizza; ma tale enigma non fa un solo passo avanti, al contrario, con la soppressione di Dio. Con questa la sofferenza si pone come ancor più insensata, non si sgomina né il dolore né il male. Viene anzi persa la speranza in una finale vittoria su di loro. Al di là della infeconda risposta atea, la meditazione umana ha posto il problema del male dinanzi a Dio secondo tre fondamentali forme:

- *quella per cui Dio non può impedire il male, essendo egli buono ma debole, ma non onnipotente, ma diveniente in una coappartenenza col mondo e l'uomo. Una concezione finitista e diveniente di Dio, che si ritrova in H. Jonas ma che è pure di S. Alexander, J. S. Mill, J. Royce, A. D. Whitehead, forse anche in F. H. Bradley. Poiché Dio è quasi il correlato dialettico del mondo, anche l'hegeliano Ohne Welt kein Gott (senza il mondo non c'è Dio) potrebbe appartenere a tale versante. Esso, a prendere le cose dal lato dell'ottimismo, può condurre ad una evoluzione emergente, in cui Dio e uomo, entrambi finiti, cooperano in un'asintotica, mai terminata vittoria sul male; mentre Dio passa dallo stadio del Deus implicitus a quello del Deus explicitus;*

- *quella per cui Dio ospita in sé l'oscurità e una traccia del male. In lui vi sarebbero luce e ombra, una mano destra e una sinistra, per cui il male sarebbe parte (magari vinta, ma sempre parte) della sua natura, sarebbe la sua mano sinistra. Spesso questa posizione si richiama ad uno schema bipolare-dialettico. dove in ogni processo, compresa la vita intradivina, si dà coesistenza dei contrari, i quali sono correlativi e interdipendenti in modo che nessuno dei due può essere descritto come reale, se è per sé stante. Si assume che la perfezione non stia nell'atto, ma nel movimento, nel processo; non nell'identità ma nella attiva sintesi dei contrari. All'assunto dialettico-bipolare si collega anche l'idea che Dio non sia completamente innocente nella produzione del male di colpa; l'oscurità che viene supposta in lui sembra diventare la base di una generale sollecitazione al male. Una concezione del genere circola nella intensa e quasi travolgente meditazione che segna il cammino dell'ultimo Pareyson: essa mostra elementi comuni con le posizioni dell'idealismo tedesco, in cui il male, l'errore, il dolore, intesi come facenti parte dell'essenza dell'essere, non sono avvertiti come argomenti contro la divinità;*
- *quella per cui Dio permette il male (morale), che di per sé origina solo dall'atto della libertà finita. In quanto totalmente indenne dal male, infinito, trascendente, atto puro, Dio può salvarne. Qui egli è necessario al mondo, non il mondo a Dio; il primo è reale in modo eminente, il secondo solo in modo derivato. In tale assunto prendono alto rilievo le questioni del bene, della legge morale e soprattutto quella della libertà finita: abisso del male e abisso della libertà si richiamano mutuamente. Potrebbe darsi che la nuova meditazione sul male già avviatasi, individui il suo centro nella capacità nientificante della libertà finita. Essa è in grado da sola di colpire al cuore l'Assoluto: un infinitesimale movimento della volontà, e un bene che avrebbe potuto essere, non è.*

Nel corso delle epoche la coscienza umana ha elaborato una fenomenologia del male, tanto più intensa quanto più nasceva da un'esperienza dolorosa e assillante. Colpa, peccato, sofferenza, infermità, morte, disarmonia e ferita dell'esistenza, male commesso e male subito: non è qui nostro intento ripercorrere la multiforme fenomenologia del male e della coscienza infelice, quanto interrogare sulla natura del male morale e sulla sua produzione da parte della libertà. Ma senza nutrire una visione esclusivamente morale del male, che lo assimili solo a quello di colpa, che anzi un problema altrettanto complesso è costituito dal male di natura (malattia, morte, cataclismi, dolore, miseria). Può darsi che qualche lettore attribuisca questo capitolo al versante della teodicea, il cui concetto tuttavia non ci attira. Oltre ad appartenere ad un'epoca storica ormai lontana, la teodicea aveva l'aria di mettere in campo ambiguamente delle attenuanti per Dio. Di essa Kant, che pur la riteneva votata alla sconfitta, diceva: “Per teodicea si intende la difesa della somma saggezza del Creatore dell'universo contro le accuse che le vengono mosse dalla ragione sull'assurdo corso del mondo. Questo si chiama sostenere la causa di Dio” ^[12]. Più che di sostenere solo la sua causa, più che di difendere o giustificare Dio, l'uomo ha bisogno di comprendere il mistero del male e di stringere un patto con l'assoluto per lottare con lui contro il male: in ciò si concentra forse l'esistenziale fondamentale nel dramma del male. E' possibile lottare contro qualcosa che ci attanaglia, ma di cui ignoriamo natura e origine? Per questo ogni lotta contro il male ha bisogno di abitare nello spazio di una sempre rinnovata meditazione su di esso, là dove intellectus mundi e intellectus fidei si danno la mano e cercano di collaborare. Il metodo che seguiremo è ontoteologico. Ontoteologia: parola venerabile e, nel contempo, non priva di rischi se intesa di traverso. Conosciamo la folla d'obiezioni che da tempo le vengono elevate contro, non di rado lanciate come omaggio alla moda dell'ora. Nel discorso sul male entrano in campo più strati, a partire dal simbolo e dalla fenomenologia del male. E se ci sembra che non vi siano speranze di raggiungere un po' di luce se il livello tipicamente ontoteologico viene cassato, l'approccio non si limita a questo ambito. Cerca piuttosto di intessere un fecondo rapporto con la religione e il “mito”. Il pensiero mitico non appartiene al passato, ma ci riguarda e ci interpella perennemente: esso, al di là del

pensiero concettuale-universale, racconta una storia secondo idee ed immagini, ed è latore di significati che, portati e vestiti dal simbolo, non sono agevolmente traducibili in altri linguaggi. Non possiamo intendere il mito come un insieme di racconti e immagini privi di senso. Nell'intuizione mitica si esprime una facoltà specifica dello spirito, su cui solo un razionalismo oltranzista può gettare il discredito. Nella meditazione sul male e sul suo legame con l'uomo e con Dio l'ontoteologia tocca il punto più alto e arduo. Essa, su cui ha puntato gli strali Heidegger con dubbie ragioni, non è un pensiero sistematico, logico, astratto e indifferente al dolore del mondo (come potrebbe forse essere la Scienza della logica di Hegel). Essa si tiene in contatto con le grandi manifestazioni del male, e con le risposte dovunque avanzate: quella della tragedia greca (cfr. il ciclo di Edipo), quella biblica, quella di altre culture. L'ontoteologia sta accanto alla condizione umana, dove si esprime la dialettica vissuta di peccato, colpa, sofferenza e morte. Essa cerca di imparare dappertutto, per poter dire qualcosa sulle eterne domande sul male...

Qui Vittorio Possenti propone di suddividere in tre parti la sua analisi, riflettendo in primo luogo sulla filosofia interpellata dal male, in secondo luogo sulla risposta di L.Pareyson e di H.Jonas ed, infine giungendo ad un approccio di carattere etico e religioso. Noi seguiremo la prima e la terza parte, lasciando da parte le suggestioni proposte dai due autori Pareyson e Jonas, il primo cristiano ed il secondo ebreo, che indagano il tema del male, rigettando, conformemente alla posizione dello stesso Possenti e nostra, una lettura solamente secolarizzata e non religiosa del negativo. La prima parte del saggio di Possenti allarga ulteriormente l'impostazione del problema, la terza indica una proposta di lettura proprio a partire dalla rivelazione biblica ebraico-cristiana e non solo della "pura" ragione. Ecco la prima tappa ed, a seguire, l'ultima della sua riflessione sempre nel saggio Essere e libertà.

La filosofia dinanzi al problema del male

Il primo compito dell'uomo è di non arretrare di fronte al male, bensì di guardarlo in faccia; non però nel senso hegeliano secondo cui la dimora presso il negativo muti quest'ultimo in essere, in virtù di una trasformazione dialettica in cui si esprime un punto alto del razionalismo (e forse anche per questo è oggi necessario rinnovare il nostro requiem per la dialettica). Dimorare senza connivenza presso il male temprava la persona, se questa è capace di separarlo dal bene, di non confonderlo con quest'ultimo, di mantenersi libera. Secondo Berdjaev "il fatto di non vedere il male rende l'uomo superficiale, gli impedisce di attingere alle profondità della vita: la forza della sua coscienza è legata alla denuncia del male e, quando si aboliscono i limiti, l'uomo si trova in uno stato di confusione o d'indifferenza, la sua personalità comincia a disgregarsi: nella confusione e nell'indifferenza, nella perdita della nozione del male, l'uomo è sprovvisto della libertà dello spirito" ^[13]. Con ciò viene individuato un compito estremamente impegnativo per il pensiero, di fronte al quale una larga parte della filosofia e della teologia contemporanee si è mostrata colpevolmente timida. In modo persuasivo L. Pareyson... ha dato voce all'estremo stupore di chi, dopo l'abisso di male e di sofferenza della seconda guerra mondiale e dell'Olocausto, ha visto la filosofia portarsi, come se nulla fosse accaduto, su pensieri sofisticati ed astratti, nell'oblio del senso tragico di quegli eventi: "Mi ha sempre stupito il fatto che nell'immediato dopoguerra abbiano avuto grande diffusione filosofie esclusivamente dedite a problemi tecnici di estrema astrattezza e sottigliezza, mentre l'umanità stava appena uscendo dall'abisso del male e del dolore in cui era precipitata. Com'è possibile, mi chiedevo, che la filosofia chiuda gli occhi di fronte al trionfo del male, alla natura assolutamente diabolica di certe forme di malvagità?". Su sponde vicine nel rilevare lo scandalo di un'assenza si colloca O. Höffe. Invitando la filosofia a recuperare il tema del male, egli osserva che è davvero sorprendente che essa non rifletta più sul male e che anzi ne abbia smarrito il tema ^[14]. A

ridosso di tali questioni si colloca la richiesta dell'ebraismo contemporaneo di non dimenticare l'Olocausto. Non dimenticare, perché Auschwitz è diventato un luogo centrale per la comprensione dell'uomo e di Dio, del bene e del male.^[15] L'enigma dell'Olocausto si pone come un crocevia da investigare religiosamente: l'abisso del male (*mysterium iniquitatis*) richiama quello del bene. In entrambi i casi occorre accettare la lotta: quella lotta ingaggiata con lo Sconosciuto da Giacobbe al calar della sera al guado dello Jabbok, e proseguita sino all'alba. Quella lotta necessaria per intendere la natura e il dramma del male e il loro rapporto con Dio. "Lotta inuguale, il cui esito può essere vittorioso o micidiale, o anche indeciso, con la doppia traccia di una ferita o di una benedizione"^[16]. Quando, dopo il primo razionalismo, la questione del negativo e del male radicale esplose con la massima forza nel pensiero moderno, gli autori che non la lasciarono cadere, cercarono attraverso vari cammini di riprendere il tema massimo lasciato insoluto dai greci: ossia come osserva Hans Blumenberg, la questione dell'origine del male nel mondo^[17]. I grandi tragici greci del VI e V secolo avevano messo in opera un eccezionale lavoro di scavo sulla colpa, l'espiazione, la responsabilità, il fato e il destino, senza ultimamente riuscire ad un esito stabile e almeno parzialmente chiarificante. Uno dei più alti punti raggiunti dalla sapienza tragica greca è posto da Sofocle sulla bocca del coro nell'Edipo a Colono, ed è parola dove vibra il senso di una sconfitta, e che ha il suono di una terminale disperazione: "Non esser nati, è condizione / che tutte supera; ma poi, una volta apparsi, / tornare al più presto colà donde si venne, / è certo il secondo bene". Archiloco scriveva: "Tutto è fatica, tutto per l'uomo è travaglio di morte". Più innanzi giunse forse Plotino, ma per altro e assai diverso cammino, quello non della concezione tragica ma di un sapere speculativo sull'uno e sul cosmo. Per primo egli comprese la necessità di elaborare una scienza del male, di cui intuì l'impossibilità se non si fosse prima scandagliata quella del bene: "Ma come si potrebbe concepire il male come una forma se esso appare solo nell'assenza del bene? Ma siccome dei contrari una sola la scienza e il male è contrario al bene, la scienza del bene sarà quella del male e perciò è necessario che coloro che vogliono conoscere il male specolino intorno al bene, poiché le specie superiori precedono quelle inferiori e queste non sono quelle, ma privazioni di quelle. E si deve ancora ricercare in che senso il bene sia contrario al male; se sia contrario come l'inizio alla fine, o come la forma alla privazione" (Enneadi, I, 8, 1). Il pensiero greco ha così lasciato in eredità, nonostante le aporie e l'impossibilità di addivenire ad un'adeguata comprensione del male e della sua origine, due eccezionali lasciti: l'idea plotiniana del male come privazione del bene, che comporta l'anteriorità ontologica e gnoseologica della scienza del bene su quella del male; e la grande parola di Eschilo nel coro dell'Agamennone: "Conoscenza attraverso dolore", quale valida legge fissata dagli dèi per avviare a saggezza i mortali. Ciò che l'uomo apprende attraverso la sofferenza sono soprattutto i limiti dell'umano, l'invalidabile distanza dal divino. Ora, risalendo all'indietro dalla filosofia contemporanea alla moderna, sembra doversi riconoscere che il tema del male non sia stato particolarmente frequentato. La kantiana dottrina sul male radicale, che pur rimane come termine di confronto ineludibile, le ricerche di Schelling sull'essenza della libertà umana, le pagine di Schopenhauer e gli scomodi aforismi di Nietzsche veicolano spunti e intuizioni grandiosi, ma anche incompleti e manchevoli. Tanto più che insieme ad essi si incontra la sostanziale elusione del problema in Spinoza e poi nel razionalismo moderno, che fondamentalmente hanno considerato il male o qualcosa di apparente o il negativo dialettico necessario alla vicenda del positivo. Oggi un ostacolo si annuncia attraverso la temperie largamente empiristica e utilitaristica della cultura, che tende a togliere l'opposizione assoluta tra bene e male, e a stemperare quest'ultimo in disadattamenti sociologici e psicologici. Sicché anche per le più recenti filosofie vale, a conferma della diagnosi di Pareyson, l'assunto secondo cui esse allontanano l'interrogativo sul male. Eppure non si potrebbe sostenere che la battaglia per non dissipare in una piatta indifferenza nichilistica la sua tragicità o il suo enigma sia persa. Sorel e Maritain hanno più volte espresso l'opinione che l'interrogativo sul male sarebbe nuovamente divenuto centrale per i filosofi, e il secondo autore ha offerto un contributo di prim'ordine in proposito^[18]. C'è inoltre la

grande tragedia greca, e la straordinaria potenza dei romanzi di Dostoevskij, e l'intera storia della salvezza come espressa nel messaggio biblico a ricordare ad una cultura distratta e confusa lo scandalo del male. Nella nostra epoca sono stati un certo esistenzialismo, il pensiero metafisico e quello tragico, la sensibilità ebraica e quella cristiana a mantenere in vario modo desto il suo pungiglione senza banalizzarlo. Tuttavia il pensiero cristiano sembra meno attento in proposito, avendo patito più l'accusa rivoluzionaria e "laica" secondo la quale il cristianesimo è l'oppio dei popoli, che non la protesta tragica della coscienza individuale smarrita di fronte al male della vita. Di conseguenza l'atteggiamento in senso lato apologetico della teologia come pure l'orientamento della prassi cristiana si sono dispiegati con ampiezza per contrastare quell'accusa. Oggi è plausibile attendersi che la fine delle grandi ideologie intramondane che avevano alimentato l'enfasi sull'azione sociale, comporterà un rinnovato interrogarsi esistenziale sul male. La tradizione teologica e metafisica cristiana potrà in proposito esprimere una nuova

vitalità, se eviterà un atteggiamento riduttivo consistente nel riportare la questione del male nell'ambito della sola etica. Questa è luogo troppo ristretto per una domanda tanto immane come quella che riguarda il peccato, la colpa, l'espiazione, la libertà, il dolore dell'uomo e quello di Dio. Prima dell'etica sono chiamate in causa la metafisica e la religione per la loro pretesa di determinare un senso ultimo. In un approccio metodologicamente puristico e forse alquanto deesistenzializzato, è possibile compiere un tratto di cammino riflettendo sul male senza collegare questo tema con quello della Trascendenza. Possiamo elaborare una complessa fenomenologia del male su base storica e razionale. Si tratta di un compito utile eppure insufficiente, perché da sempre il soggetto umano domanda sul male e il dolore riportando il problema sulle spalle di Dio: di questi con quanta ampiezza l'uomo si porrebbe il problema, se non vi fosse il male? Sin dal più remoto passato sembra che la maggiore obiezione contro Dio scaturisca proprio dall'esistenza del male. Si dice: se c'è tanto male nel mondo e nella vita è perché Dio non esiste. Se egli fosse un vivente, non lo consentirebbe: altrimenti dobbiamo pensarlo come incurante nella sua felicità delle vicende umane, oppure come un demiurgo malvagio che si compiace del dolore dell'uomo. Né è detto che si accetti il mondo, se accade che non si rifiuti Dio. È la condizione di Ivan Karamazov nel suo dialogo con Alèsa: Questo mondo creato da Dio io non lo accetto... Non è che io non accetti Dio, ma è questo mondo da Lui creato, che io non accetto e non posso rassegnarmi ad accettare" (P II, l. V), perché è un mondo cattivo che ospita la sofferenza innocente, specialmente quella dei bambini. Da questi angosciati interrogativi prendono origine i tentativi di mostrare che Dio non è responsabile del male, e che i due concetti di Dio e di male non si escludono, ma per quanto sorprendente possa apparire a prima vista, si richiamano necessariamente. L'apporto forse più prezioso della meditazione metafisica e religiosa sul male e su Dio è in primo luogo la loro "indissolubilità": solo pensando Dio si può pensare adeguatamente il male. Questo col suo corteo di sofferenza, di colpa, di espiazione, di morte, di negazione che sempre l'accompagna, può esser visto in tutta la sua sanguinosa realtà, se e solo se Dio esiste; se e solo se è considerato in rapporto a Dio. Si dà infatti una negazione più radicale di quella che cerca di inferire dall'esistenza del male l'inesistenza o la problematicità dell'esistenza di Dio; ed è la negazione che sopprime il problema o l'interrogativo stesso sul male. Questo è l'estremo ateismo, il nichilismo assoluto, che non addebita a Dio il male ma ne cancella il pungolo. Il nichilista coerente non può che minimizzare il male, pensarlo come apparenza, come qualcosa che è storicamente toglibile. Quando si tratta di Dio e del male, o si prendono entrambi i termini, oppure incombe il pericolo che si cancellino entrambi. Là dove l'uomo è attanagliato dalla forza del negativo, potrà rivoltarsi contro Dio, forse maledirlo e negarlo, ma non cancellarne il problema. A Boezio che poneva l'eterna domanda "Si Deus est, unde malum?" (collegata all'altra: "et si non est, unde bonum?"), Tommaso d'Aquino con originale forza contemplativa rispondeva ribaltando i termini della questione e stabilendo: "Si malum est, Deus est", dove l'esistenza di Dio è argomentata a partire dalla realtà del male ^[19]. Pensando il male, si può ascendere alla conoscenza di Dio, e

inversamente solo pensando Dio si può conoscere nel modo più intimo il male. Che si debbano assumere entrambi i poli (non perciò solo Dio senza il male, o solo il male senza Dio), lo conferma l'esperienza di Nietzsche, che ha inteso cancellare con un unico atto l'esistenza di Dio e quella del male, ed è difficile stabilire quale delle due negazioni sia in lui stata la più profonda. Proprio in quanto non ci sono né bene né male, egli può volere un "aldilà del bene e del male", che è la divisa propria dell'oltreuomo. Egli è oltre l'umano, perché ha valicato il confine che separa bene e male, cancellandoli.

Qui si innesta nel saggio di Possenti la riflessione su Jonas e Pareyson che tralasciamo, pur consci della sua importanza, per giungere direttamente alla terza parte, la pars construens:

Destino della teodicea

Prima di volgerci a un'altra meditazione su Dio e il male... è saggio riconoscere che il compito di una dottrina non si esaurisce solo nella sua coerenza intelligibile e nella sua verità, poiché essa è come uno specchio in cui si riflette qualcosa dell'epoca. Sotto questo profilo le concezioni di Jonas e di Pareyson valgono come una critica della falsa coscienza utopica, che facilmente sfocia in quella totalitaria. In esse si fa avanti la massima lontananza dalla posizione che ritiene il male superabile in un nuovo ordine sociale, e possibile secondo una modalità atea o secolarizzata la costituzione del "regno di Dio" in terra. La voce ebraica di Jonas e quella cristiana di Pareyson rimangono consapevoli della limitatezza dell'uomo. Lontane da quel nichilismo che è lo sbocco coerente dell'utopia, in cui il male appare come qualcosa di esterno all'uomo e perciò di dominabile con mezzi "tecnici", pungolano la filosofia a non rinchiudersi in angusti orizzonti e oltrepassano il quadro della teodicea, la cui vicenda può venire scandita in tre fasi:

- 1. L'epoca delle grandi teodicee razionalistiche (tipica fra tutte quella di Leibniz), in cui Dio è giustificato perché ha creato il migliore dei mondi possibili, e l'uomo appare ugualmente giustificato in se stesso: quasi sempre una teodicea implica una antropodicea. Qui il problema della teodicea veniva assunto entro il quadro della coerenza logica e della totalità sistematica, onde tenere insieme senza contraddizione le seguenti tre proposizioni: Dio è onnipotente; Dio è assolutamente buono; il male esiste. Nonostante l'indubbia legittimità della domanda, la forma di quelle teodicee sembra ormai alle nostre spalle. Non presumevano esse di avere un po' troppa confidenza con Dio? Non è un esempio di ciò il modo alquanto facile con cui Leibniz nel Discours de métaphysique parla di Dio quasi da pari a pari, presentandolo come "le plus juste et le plus débonnaire des monarques"? Secondo Maritain "il tempo delle teodicee alla Leibniz o delle giustificazioni di Dio, che hanno l'aria di far appello alle attenuanti, è decisamente passato. Ci vuoi altro per far fronte all'ateismo contemporaneo..." [20].*
- 2. Anche l'era della sola antropodicea o dell'antropocentrismo ateo moderno, riassumibile nell'asserto marxiano homo homini deus, sembra definitivamente conclusa. In essa la teodicea venne colpita a morte, perché si riteneva che Dio dovesse scomparire affinché l'uomo visse. Annunziando l'avvento del regno dell'uomo, Feuerbach riconduceva ad esso ogni attributo divino, alla luce del concetto secondo cui il segreto della teologia è l'antropologia. Il problema del male non può tuttavia compiere passi avanti perché, riportando tutto all'uomo. Feuerbach, senza dichiararlo, vi ha riportato anche l'intera produzione del male. Non essendovi più l'Avversario, a cui imputare la tentazione, e neppure Dio, l'uomo si trova completamente solo dinanzi ad esso e rischia di soccombervi. Si dà forse in tale evento una premessa celata, su cui hanno fatto leva alcune correnti successive per annunciare la morte del soggetto.*

3. *Nell'epoca presente la questione del male ha assunto un rilievo tragico per l'uomo, nonostante le dimissioni e le gravi debolezze della filosofia. Sono stati grandi scrittori, poeti, profeti assai più dei filosofi a sentire profondamente la domanda sul male: in specie Dostoevskij ma anche Bloy, Lautréamont, ed altri. Tentativo necessario di richiamare la filosofia alla sua responsabilità, le riflessioni di Pareyson e di Jonas si collocano dopo la fine delle teodicee razionalistiche e lo scacco dell'antropodicea dell'umanesimo ateo assoluto. Le une e le altre avevano di fronte un male più limitato rispetto all'abisso che si è scatenato nel XX secolo, e di cui i nostri autori tengono manifestamente conto. Dinanzi alla dimissione del problema da parte della teologia speculativa, essi possono rivendicare il merito di riaprire la riflessione sul male, sull'uomo, su Dio entro un quadro spirituale e antropologico diverso da quelli del '600 e dell'800. Se è chiusa l'epoca della teodicea, si apre quella di un'adeguata antropodicea affinché non si disperi dell'uomo, perché così vasta è la produzione del male morale da lui operata nella storia, che può sorgere la tentazione di equiparare l'uomo a Satana. Dio l'uomo spiegano il bene e il male, ma diversamente. Senza l'uomo non si spiega il male morale; senza Dio non si spiega il bene.*

Etica e religione

Libertà e legge morale: una dialettica interrotta. Un processo viene interrotto quando il suo movimento risulti bloccato. Sembra che nei pensatori di cui ci siamo occupati la domanda sulla libertà conduca ad una dialettica interrotta, nel senso che non si inoltra sino all'estremo limite nel pensare l'abisso della libertà finita e il suo legame col male. Nel fatto che numerose riflessioni contemporanee sul male non esplorino sino in fondo la sfera della libertà, non potrebbe celarsi l'idea che questa sia ritenuta incapace di produrre da sola la tragica messe di male che fluisce nella storia? E che di conseguenza occorra in qualche modo fare appello ad altri livelli, e coinvolgere Dio stesso nella storia del male? Se questa diagnosi fosse fondata, si comprenderebbe il rischio corso da Pareyson e da Jonas nel concentrare l'attenzione su Dio, trovandosi poi nella necessità di riformulare radicalmente la sua natura. Noi dobbiamo ora porre a tema l'interrogativo sull'origine del male morale. Come si potrebbe nutrire la speranza nella liberazione dal male morale, se la riflessione umana, applicandosi con tutta la forza di cui è capace e quasi con disperazione dinanzi al baratro, non cercasse di comprendere la sua origine, attingendo dove possibile indizi e tracce? Kant ha percorso un tratto di strada in tale direzione, legando la colpa all'infrazione della legge morale per cui essa è la difformità dell'arbitrio rispetto alla legge. Non si dà in lui peraltro un principio del male nel senso di un'origine storica, quale sarebbe ad esempio la dottrina del peccato originale. Il principio del male sta nella massima suprema che serve da fondamento soggettivo a tutte le massime cattive (e perciò contrarie alla legge morale) del nostro libero arbitrio, e che stabilisce la propensione al male nell'uomo. Egli è corrotto nel fondamento delle sue massime, e per passare dal vizio alla virtù ha bisogno di un cambiamento di cuore che lo conduca alla santità delle massime nel compimento del proprio dovere, nell'effettuazione del dovere per il dovere, per cui l'uomo accoglie l'integralità della legge morale come movente sufficiente del suo arbitrio. Questo insieme di riflessioni compongono un quadro degno della più accurata attenzione. Tuttavia Kant non sembra aver percorso sino in fondo tale cammino, concludendo anzi con una annotazione di grande riserbo: "Qui non v'è dunque alcun fondamento, per noi comprensibile, da cui, per la prima volta, il male morale possa essere venuto in noi" ^[21]. Alla domanda se esista una causa comprensibile del male morale, Tommaso d'Aquino ha risposto affermativamente. Potrebbe anzi darsi che egli sia stato l'unico a considerare l'interrogativo in tutta la sua difficoltà e a tentarne una risposta ultima, in una dialettica non interrotta. Il riserbo dell'Aquinate è noto: è ben raro che prorompa in esclamazioni, altrettanto raro che impieghi le risorse di una scaltra retorica per far breccia nell'interlocutore. Il caso di cui ci occupiamo non fa eccezione: la brevità con cui

egli svolge l'indagine sulla causa del male morale, potrebbe mascherare l'importanza della scoperta compiuta e del colpo di sonda gettato entro l'abisso della libertà creata. Cercando di porsi dinanzi al problema della produzione del male in tutta la sua difficoltà, l'Aquinate ha sottoposto ad analisi il movimento che si instaura nella libertà finita, nell'atto del volere da cui emana un'azione malvagia. Che cosa accade quando una persona si volge verso un atto cattivo? Quale ne è la causa o l'origine? Riassumendo la sua posizione, la causa prima e unica della produzione del male morale è individuata nella libera non-considerazione della regola da parte della volontà nel momento in cui essa procede all'azione: "Ciò che costituisce formalmente la colpa o il male morale proviene dal fatto che, senza la considerazione attuale della regola, la volontà procede all'atto della scelta" ^[22]. Il male dell'azione proviene da un certo difetto della volontà dell'agente, che deve essere volontario, se deve essere all'origine di un atto libero cattivo. Ora tale difetto, che va preconsiderato nella volontà, consiste appunto nel passare all'azione lasciando da parte la sua regola, la legge morale: questa possibilità esiste in generale per l'uomo in ragione della differenza tra regola della libertà e libertà stessa (non esiste invece per la libertà divina che è identicamente la sua propria regola). Il risultato dell'azione sarà cattivo, quando essa sarà stata posta senza la sua regola interna, e perciò privata di un bene che avrebbe dovuto esserci e che non c'è. Per rendere ragione di questa libera deficienza non c'è bisogno di risalire oltre: *ad hoc sufficit ipsa libertas voluntatis* ^[23]. Di modo che si può dire che la volontà, distogliendo lo sguardo dalla regola, che è santa e pura, negandola, fa il male: introduce una privazione di bene o una ferita nell'esistenza. Essa, distruggendo il bene che avrebbe dovuto esservi, "nullifica". Inaudita potenza della libertà finita che, agendo da sola contro la legge e senza cooperare con la Causa prima, non può che inserire il nulla nell'esistenza. Essa vale come causa efficiente di una privazione, ossia come causa deficiente. Agendo da sola, è causa prima ed unica del male morale. Mentre, in rapporto alla già segnalata dissimmetria fra linea del bene e linea del male, nella prima la libertà divina e quella umana cooperano producendo atti buoni, che provengono da Dio come causa prima e dall'uomo come causa seconda. Anteriorità del male e concezione retributiva del dolore. In queste pagine che fanno riferimento all'etica e alla religione, si è finora dato, conformemente allo scopo, il maggior rilievo alla questione dell'etica, della legge, della sua trasgressione. E' la religione riducibile all'etica? Piuttosto essa va oltre la concezione morale del mondo e la limitazione al solo ambito umano. La meditazione di Tommaso sull'origine del male di colpa non ne comporta una completa eticizzazione. Il male mostra un volto ancipite: è qualcosa che l'uomo inaugura; ed è qualcosa che egli trova fuori di sé, che in certo modo ha già avuto luogo, che possiede una storia, una tradizione. La caduta dell'angelo, l'Avversario, la tentazione, la colpa originale costituiscono le fasi di una tale storia. L'uomo vi appare ad un tempo come iniziatore ma anche come prosecutore di un male anteriore. Tra il libero arbitrio e il servo arbitrio esiste la libertà indebolita. Nei grandi racconti sul male, su cui la filosofia non può non meditare perché quando essa inizia quasi tutto è già stato detto in merito, si distinguono quelli che ne riconducono l'origine a qualcosa di anteriore all'uomo e quelli che la riportano all'uomo stesso. Il racconto della Genesi, pur stando a cavallo tra le due tradizioni, si colloca più vicino alla seconda. Esso non vale però come racconto esclusivamente ma solo parzialmente antropologico, poiché l'origine del male di colpa non viene attribuita soltanto ad Adamo ed Eva: al suo centro sta infatti la figura del serpente, che inganna e seduce l'uomo. Dunque il male c'è già quando Adamo entra nell'esistenza: "Il serpente insomma significa che l'uomo non dà inizio al male, ma lo trova: per lui cominciare è in realtà continuare. Così, al di là della proiezione della nostra concupiscenza, il serpente raffigura la tradizione di un male più antico di lui [dell'uomo]: il serpente è l'Altro del male umano" ^[24]. Per Adamo l'anteriorità del male (il suo "esservi già") è il serpente, mentre per ogni uomo è Adamo. Nel racconto biblico sono contemperati lo schema dell'ereditarietà, e perciò della necessità del male, e quello della sua contingenza, del suo esser prodotto dalla libertà umana. In proposito Ricoeur ha parlato del male come di un involontario in seno al volontario; altrettanto bene si potrebbe parlarne come di un volontario in seno

all'involontario. Egli ha anche osservato che nella Bibbia il racconto dell'Inizio non è adeguatamente compreso se separato dal rinvio a quello della Fine, se il primo Adamo non rinvia al secondo Adamo e alla storia della salvezza che in lui si compie. Con l'avvento del Verbo il dramma del male è compreso in una luce nuova. Col cristianesimo il problema del male si illumina nel discorso, si risolve nella vita e nella lotta verso una soluzione. Ciò che fa la differenza cristiana in proposito è che la vita è intesa come dramma, non come tragedia. Vi è tragedia quando l'esistenza è rinchiusa in una "contraddizione non dialettica", ossia in una contraddizione senza esito, senza soluzione, senza sbocco. Edipo è l'eterno prototipo del personaggio assolutamente tragico, Adamo invece drammatico, perché la storia segnata dal negativo a cui egli ha dato inizio, rinviando alle cose ultime attraverso la promessa di un salvatore, non è assediata da un buio senza fine. La concezione morale del male, presente nella tradizione biblica, forte nel pensiero dei grandi teologi (si pensi tra tutti ad Agostino), è fortissima in Kant, dove l'intera radice del male è posta nella libertà, ossia nell'inversione della gerarchia delle massime in base a cui si muove l'arbitrio. Tuttavia l'eticizzazione kantiana rischia di offuscare la solidarietà nel male e la sua "preesistenza", che Agostino invece coglieva contro Pelagio. Mentre quest'ultimo si esprime a favore di una concezione puramente etica del male, che è prodotto contingente della libertà (intesa come *libertas ad peccandum et ad non peccandum*); e mentre Mani scivola verso un'idea necessaria del male, per cui esso s'impone all'uomo provenendogli dal principio malvagio; Agostino sceglie una via mediana, dove la tesi della contingenza del male quale prodotto della libertà è attenuata dalla generale compartecipazione umana ad una condizione ferita. Il tentativo di restaurare, sia pure parzialmente, la visione manichea si scontra con l'assunto gnostico dell'esteriorità del male, con la correlativa negazione del male morale come catastrofe della libertà finita. La meditazione dell'Aquinate sulla volontaria non-considerazione della regola quale causa del male di colpa va prolungata con un cenno alla non coincidenza tra visione puramente morale e visione religiosa del male e della colpa, e al rapporto colpa e punizione. Per gli amici di Giobbe Dio è un Signore esclusivamente etico, che segue una rigorosa legge di equilibrio tra colpa e punizione, di modo che il male di colpa viene retribuito col male di pena, con la sofferenza. Elifaz, Bildad, Zofar sono teologi che adottano ad un tempo una teodicea e una "duolodicea": mentre con la prima intendono giustificare Dio dinanzi al male del mondo, riportato esclusivamente alla colpa, nello stesso tempo giustificano il dolore e la sofferenza come esito necessario del male agire. L'eticizzazione dell'uomo, di Dio e del loro rapporto muove verso una visione morale del mondo, secondo la quale la storia è un tribunale, i piaceri e i dolori una retribuzione, Dio un giudice. La totalità dell'esperienza umana assume carattere giuridico-penale, il cui luogo proprio è il dibattimento, come si mostra nel lungo contendere tra gli amici e Giobbe, tra accusa e difesa, e perfino nella chiamata in giudizio di Dio da parte di Giobbe. Si può certo obiettare: dove sta in tutto ciò la dimensione propriamente religiosa del perdono, della speranza, della grazia? Non è la concezione puramente etico-retributiva messa in crisi dalla sofferenza innocente? Mentre la sofferenza vicaria, assunta volontariamente, può rimanere entro il quadro della retribuzione riequilibrante e manifesta la fede nel governo divino del mondo; e la sofferenza accolta come purificazione e innalzamento sta un gradino più su del semplice schema retributivo, quella innocente ne è al di fuori: per quale colpa dovrebbe essere chiamata a pagare l'innocenza? Ammettiamo senza reticenze tutto ciò, contribuendo così ad allargare le strette maglie del paradigma etico-retributivo. Ed è Giobbe stesso che, sperimentandola sulla propria pelle e relativizzandola, rinuncia ad ogni totalizzante visione morale del mondo. L'origine del male morale quale produzione della libertà non ne viene però scalfita: io sono l'autore del male, esso è l'opera della mia libertà. Ammettendo che avrei potuto agire diversamente, riconosco la mia responsabilità, l'esistenza della legge morale e di una obbligazione nei suoi confronti. Mi riconosco reo attraverso la confessione della colpa, evento che ricorre nella letteratura penitenziale di tutte le epoche, e di cui è vertice il salmo di David: "Quello che è male ai tuoi occhi, io l'ho fatto" (Salmo 50). L'uomo, consapevole di incontrare in se stesso un tribunale che

giudica e condanna, e aspirando nella speranza alla liberazione dalla colpa, trova un passaggio verso la dimensione religiosa che integra quella puramente etica. Mentre l'etica dice che il male, scaturito da un'infrazione di un'impersonale legge morale, dipende dal mistero individuale e insondabile dell'atto libero, la religione considera il male dinanzi a Dio, entro un rapporto personale con lui: *“Contro di te, contro te solo ho peccato”*. Il limite di una concezione esclusivamente morale del mondo non risiede nel richiamo alla responsabilità personale; consiste nel fermarsi ad esso, nel volgere l'occhio quasi solo al divieto che proibisce e infine schiaccia senza allargare lo sguardo alla speranza nella liberazione dal male. L'invocazione davidica è voce del pentimento, attesa di perdono e di salvezza, accettazione dell'espiazione. In quest'ultimo aspetto si manifesta un elemento della condizione umana, che costituisce anche una base della concezione morale del mondo e della pena. L'uomo non si sentirebbe in pari con se stesso e con la legge, se sfuggisse all'espiazione, ma tale movimento è insidiato dal suo contrario. Si incontra qui una difficile dialettica della coscienza, presa fra l'esigenza dell'espiazione e il suo rifiuto. L'uomo può negare di essere colpevole, pur essendolo; e può voler sfuggire alla pena. Ma in tutta verità, può l'uomo sottrarsi all'espiazione? Egli non è in grado di sottrarvisi, perché non gli è dato di sfuggire al proprio io neppure col suicidio. L'essere un io è un fatto eterno. Sfuggire in qualsiasi modo al proprio io è un'impossibilità metafisica. La concezione esclusivamente morale del mondo, se assunta senza la speranza in un salvatore, è intimamente tragica: l'uomo colpevole non può sfuggire alla sanzione della legge morale, più di quanto possa sfuggire al proprio io eterno. *Contra malum cum Deo*. L'uomo difficilmente può aspettarsi dalla filosofia quel nutrimento di cui più di tutto ha bisogno: nutrirsi di liberazione dal male e di redenzione dal negativo. La riflessione

filosofica risulta di limitata utilità nell'individuare la risposta all'essenziale domanda: *donde la liberazione dal male?* La sapienza dei concetti non può essere alla misura di quella dismisura che è il male. Bastano i Seneca pagani e i Pelagio cristiani dinanzi a un tale eccesso? Vale qui un celebre detto dell'oracolo di Delfi: *“Chiamato o non chiamato, Dio sarà presente”*. Che cosa significa questo se non che occorre portare l'interrogativo sul male dinanzi a Dio, non solo dinanzi all'uomo? In tale prospettiva due posizioni appaiono in vario modo insufficienti: quella che dall'esistenza del male argomenta contro quella di Dio; e la posizione giustificazionista e *“apologetica”* della teodicea. Nell'Alleanza emerge invece come posizione adeguata il *contra malum cum Deo et in Deo*, che supera sia la posizione atea del *contra malum sine Deo*, sia quella antiteista del *contra malum, contra Deum*, sia l'atteggiamento giustificazionistico del *pro Deo*, in cui ci si preoccupa più di Dio e della sua innocenza, che dell'uomo e del suo male ^[25]. La lotta contro il male richiede l'alleanza con il Trascendente in ragione dell'infinito potere negante della libertà finita. Nella concezione 'tradizionale' il male morale è riportato alla causalità della libertà finita, che sembra gravata di un peso immenso, che sarebbe forse più congruo compartire con altri. Non si trascuri però di meditare un elemento della teologia, che sembra idoneo a diradare un poco quell'enigma. Alludo all'Angelo decaduto, un tema di alto rilievo nonostante il disinteresse da cui appare circondato. Nel peccato dell'Angelo si è di fronte al mistero della libertà allo stato puro e della colpa allo stato puro, almeno nel senso che la colpa della volontà non preesige né l'errore né l'ignoranza come condizione dell'atto cattivo del libero arbitrio. L'Angelo conosceva allo scoperto l'esistenza di Dio e la divisione tra bene e male, eppure ha liberamente e consapevolmente voluto se stesso contro Dio, preferendo l'amore verso la propria natura spirituale risplendente invece che l'amore per Dio. Ha peccato, volendo peccare e sapendo di peccare: l'ha voluto con una libera opzione in cui ha posto tutto se stesso, perché la sua volontà era intensamente volta verso se stesso, amandosi di un amore in certo modo infinito e al di sopra di ogni altra cosa. Nella sua radice più profonda il male (morale) sembra scaturire dalla violenza di un falso amore, di un desiderio intimamente e tragicamente disordinato. Col peccato dell'Angelo viene a svelamento l'erroneità dell'intellettualismo etico o del *“socratismo morale”* che fa della virtù un effetto della conoscenza e del vizio un risultato dell'ignoranza. Ma emergono pure l'innocenza di Dio nei confronti del male e la possibilità intrinseca alla libertà

creata di introdurre il male nell'essere, attraverso un atto nientificante: il maremoto della libertà. Solo una libertà altra, divina, può rifare quello che il soggetto finito disfa. Col loro ottimismo storico Razionalismo e Illuminismo credevano in una progressiva vittoria del bene sul male e nella liberazione umana, che le esperienze più salienti del XX secolo, quali il deserto dell'ateismo e il dilagare dell'oppressione dell'uomo sull'uomo, hanno frustrato. Vi è oggi bisogno più che dell'aria e dell'acqua di una nuova esperienza religiosa, nel cui fuoco riprendere contatto con l'itinerario provvidenziale di prevalenza del bene sul male. Una tale esperienza non parlerà del male di Dio, piuttosto del suo "dolore" (per quella modestissima misura in cui possiamo avere accesso ad un tema tanto carico di mistero) e in generale del valore redentivo del soffrire. E se è assurdo introdurre la minima ombra di male in Dio, non è assurdo scorgervi un misterioso riflesso del dolore, di quello che quando è accettato come riscatto e rivelazione del senso segreto delle cose, è una perfezione umana di cui non può non cercarsi un qualche analogo nell'Assoluto.

Note

[Nota 1] E' il testo dal titolo *Liquidazione del diavolo*, ripubblicato in J.Ratzinger, *Dogma e predicazione*, Queriniana, Brescia, 1974, pp.189-197.

[Nota 2] W.Kasper, *Il problema teologico del male*, in W.Kasper-K.Lehmann (edd.), *Diavolo-Demoni-Possessione*. Sulla realtà del male, Queriniana, Brescia, GdT 149, pp.45-78.

[Nota 3] Ciò deriva da quanto leggiamo in *Sal* 96,5 e *1Cr* 16,26, che cioè gli idoli dei pagani sono niente (*elilim*; cf. *Is* 44,9 ss); nei Settanta e nella Volgata si dice che gli idoli dei pagani sono demoni (cf. *Dt* 32,17; *Sal* 106,37). Che i demoni siano degli idoli inesistenti ci viene suggerito anche da *1Cor* 8,4 e 10,19. Cf. l'art. *éidolon*, in *ThWNT* II, 374 s.; H.CONZELMANN, *Der erste Brief an die Korinther* (Krit. exeget. Kommentar), Göttingen 1969, 168 s.

[Nota 4] Riprendo così una definizione che K.BARTH ha dato, ed ampiamente evoluta, nella sua *Kirchliche Dogmatik* III/3, 327-425. Pur rimanendo debitore di tanti stimoli che Barth mi ha offerto, qui mi differenzio fondamentalmente dalla sua posizione. Per Barth quello del 'niente' è il terzo modo dell'essere: né come Dio, né come creatura, bensì come reale rispondenza al non volere di Dio, come opposto dell'elezione e conferma di Dio (cf. spec. 402 ss). Partendo da questo punto di vista Barth potrà dunque contestare che gli angeli e i demoni traggano la loro origine da una comune radice (cf. 608 ss). Invece di questo terzo modo d'essere, insostenibile dal punto di vista teologico, a me interessa determinare la creaturalità del male pervertita mediante la propria decisione. Mi rendo tuttavia conto che il concetto di negazione o negatività da me impiegato esige un più preciso chiarimento filosofico.

[Nota 5] Cf. TOMMASO d'AQUINO. *Summa theologiae* I q.48 a.1; *Contra gentiles* III, 7 ss.; *De malo* q.1 a.1. Per la storia di questa concezione, cf. F. BILLICHSICH, *Das Problem des Übels in der Philosophie des Abendlands*, 3 vol., Wien 1952-59; critico nei confronti della definizione tradizionale del *malum* è L.OEING-HANHOFF, *Die Philosophie und das Phänomen des Bösen*, in *Realität und Wirklichkeit des Bösen* (Studien und Berichte d. kath. Akad. in Bayern, 34), Würzburg 1965, 1-30.

[Nota 6] Per questa interpretazione di *Mt* 5,37, cf. E.JÜNGEL, *Geistesgegenwart. Predigten*, München 1974, 39-47. [Nota 7]

Cf. *Gv* 8,44.

[Nota 8] Cf. al proposito J.RATZINGER, *Abschied vom Teufel?*, in Id., *Dogma und Verkündigung*, München-Freiburg 1973, 225-234, qui 233 s. [trad. it., *Dogma e predicazione*, Queriniana, Brescia]. Dubito comunque che la categoria del 'fra', che in tale contesto Ratzinger introduce, risulti sufficiente. Questa categoria, desunta da M.Buber, è più adatta ad interpretare la realtà qualificata con il concetto di peccato originale che a definire in modo categoriale il diavolo o i demoni.

[Nota 9] Cf. *Rom* 8,38; *1Cor* 15,24; *Ef* 1,21; 3,10; 6,12; *Col* 1,16; 2,10-15.

[Nota 10] Ciò risulta soprattutto dalle discussioni sul problema della carne sacrificata agli idoli a Corinto (cf. *1Cor* 8,1 ss.) e pure dalle polemiche sulla libertà dalla legge (cf. *Gal.* 4,8 ss.) e con le correnti (probabilmente) gnostiche (cf. *Col* 2,8 ss.).

[Nota 11] Vittorio Possenti, *Essere e libertà*, Rubbettino, Soveria Mannelli, 2004.

[Nota 12] *Sull'insuccesso di ogni tentativo di teodicea*, trad. di A. Massolo, Studi Urbinati, n. 29, 1955. p

[Nota 13] *Spirito e Libertà*, Ed. di Comunità, Milano 1947, p.235.

[Nota 14] L.Pareyson, *Pensiero ermeneutico e pensiero tragico* in AA.VV., *Dove va la filosofia italiana?* , a cura di J.Jacobelli, Laterza, Bari 1986, p.137s. Di Höffe si veda *Recuperare un tema: Kant sul male*, in F.W.J.Schelling, *Ricerche filosofiche sull'essenza della libertà umana* , commentario a cura di A.Pieper e O.Höffe, Guerini, Milano 1997, pp.113- 115.

[Nota 15] Soprattutto Auschwitz, presentando l'abisso del male, chiama in causa Dio: o per negarlo e annunciarne la morte, nel senso che la creazione è un dramma in cui Dio infine è sconfitto (in Dopo Auschwitz, 1966, il rabbino americano Richard Rubinstein domanda che si accetti il fatto brutto della pura e semplice morte o fine di Dio ad Auschwitz); oppure per ripensare e alterare la natura di Dio, come propone Hans Jonas. per il quale la bontà divina si accompagna ad una sua assoluta impotenza ad intervenire nella storia del mondo; o infine attraverso una più approfondita riflessione sul male che si appoggi ai dati biblici e alle più sicure tradizioni teologico-filosofiche.

[Nota 16] A.Neher, *Chiavi per l'ebraismo* , Marietti, Genova 1988, p.124.

[Nota 17] H.Blumenberg, *La legittimità dell'epoca moderna* , Marietti, Genova 1992, p.133.

[Nota 18] Cfr. *Da Bergson a Tommaso d'Aquino* , Vita e Pensiero, Milano, 1980; *Breve trattato dell'esistenza e dell'esistente* , Morcelliana, Brescia, 1965; *Dio e la permissione del male* , Morcelliana, Brescia, 1973; *Le péché de l'Ange* , in AA.VV. *Le péché de l'Ange* , Beauchesne, Paris, 1961, pp.43-86.

[Nota 19] Cfr. *Contra Gentiles* , 1. III, c.71.

[Nota 20] G.Leibniz, *Discours de métaphysique* , Vrin, Paris 1975, p. 92 ; J.Maritain, *Dio e la permissione del male* , p.14.

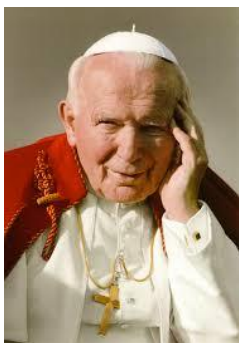
[Nota 21] *La religione entro i limiti della sola ragione* , Laterza, Roma-Bari 1980, p.45s. [Nota

22] *De Malo* , q.I, a.3.

[Nota 23] *Ivi*.

[Nota 24] P.Ricoeur, *Il conflitto delle interpretazioni* , Jaca Book, Milano 1986, p. 311.

[Nota 25] In queste riflessioni ci siamo ispirati al bel libro di A.Gesché, *Le mal* , Cerf, Paris, 1993. Dal canto suo Ricoeur avalla la posizione del contra malum: "Prima di accusare Dio o di speculare su un'origine demonica del male in Dio stesso. agiamo eticamente e politicamente contro il male", *Il male* , Morcelliana, Brescia 1993, p.49.



PAPA GIOVANNI PAOLO II

UDIENZA GENERALE

Mercoledì, 9 novembre 1988

“Se il chicco di grano . . . muore, produce molto frutto” (Gv 12, 24).

1. La redenzione compiuta da Cristo a prezzo della passione e della morte di croce, è un avvenimento decisivo e determinante nella storia dell'umanità, non soltanto perché compie il supremo disegno divino di giustizia e di misericordia, ma anche perché svela alla coscienza dell'uomo un nuovo significato della sofferenza. Sappiamo che non c'è problema che gravi più di questo sull'uomo, anche e soprattutto nel suo rapporto con Dio. Sappiamo che dalla soluzione del problema della sofferenza è condizionato il valore dell'esistenza dell'uomo sulla terra. Sappiamo che in certa misura esso coincide col problema del male, la cui presenza nel mondo è così difficile accettare.

La croce di Cristo - la passione - getta su questo problema una luce completamente nuova, conferendo un altro senso alla sofferenza umana in generale.

2. Nell'antico testamento la sofferenza viene, tutto sommato, considerata come pena che l'uomo deve subire, da parte di Dio giusto, per i suoi peccati. Tuttavia, rimanendo nell'ambito di un tale orizzonte di pensiero, fondato su di una iniziale rivelazione divina, l'uomo si trova in difficoltà nel render ragione della sofferenza di chi non ha colpa, diciamo pure dell'innocente. Problema tremendo, la cui espressione “classica” si trova nel libro di Giobbe. Va aggiunto però che nel libro di Isaia il problema è già visto in una luce nuova, quando la figura del servo di Jahvè sembra costituire una preparazione particolarmente significativa ed efficace in rapporto al mistero pasquale, nel cui centro verrà a trovar posto, accanto all'“uomo dei dolori” Cristo, l'uomo sofferente di tutti i tempi e di tutti i popoli.

Il Cristo che soffre è, come ha cantato un moderno poeta, “il santo che soffre”, l'innocente che soffre, e proprio per questo la sua sofferenza ha una profondità ben maggiore in rapporto a quella di tutti gli altri uomini, anche di tutti i Giobbe, ossia di tutti coloro che nel mondo soffrono senza propria colpa. Perché Cristo è l'unico che veramente è senza peccato, e che, anzi, non può neppur peccare.

È quindi colui - l'unico - che assolutamente non merita la sofferenza. Eppure è anche colui che l'ha accettata nel modo più pieno e risoluto, l'ha accettata volontariamente e con amore. Ciò significa quel suo desiderio, e quasi quella sua tensione interiore di bere totalmente il calice del dolore (cf. Gv 18, 11), e questo “per i nostri peccati; non soltanto per i nostri, ma anche per quelli di tutto il mondo”, come spiega l'apostolo Giovanni (1 Gv 2, 2). In tale desiderio, che si comunica anche ad un'anima senza colpa, si trova la radice della redenzione del mondo mediante la croce. La potenza redentrice della sofferenza sta nell'amore.

3. E così, ad opera di Cristo, cambia radicalmente il senso della sofferenza. Non è più sufficiente vedere in essa una punizione per i peccati. È necessario scorgervi la potenza redentrice, salvifica dell'amore. Il male della sofferenza, nel mistero della redenzione di Cristo, viene superato e, in ogni caso, trasformato: esso diventa la forza per la liberazione dal male, per la vittoria del bene. Ogni sofferenza umana, unita a quella di Cristo, completa "quello che manca ai patimenti di Cristo nella persona che soffre, a favore del suo corpo" (cf. *Col* 1, 24): e il corpo è la Chiesa quale universale comunità salvifica.

4. Nel suo insegnamento che si suol dire pre-pasquale, Gesù fece conoscere più di una volta che il concetto della sofferenza, intesa esclusivamente come pena per il peccato, è insufficiente e perfino improprio. Così, quando gli riferirono circa alcuni galilei "il cui sangue Pilato aveva mescolato con quello dei loro sacrifici", Gesù pose la questione: "Credete che quei galilei fossero più peccatori di tutti i galilei, per aver subito tale sorte? . . . O quei diciotto sopra i quali rovinò la torre di Siloe e li uccise, credete che fossero più colpevoli di tutti gli abitanti di Gerusalemme?" (*Lc* 13, 1-2. 4). Gesù qui mette chiaramente in questione un tale modo di pensare, diffuso e comunemente accettato in quel tempo, e fa comprendere che la "disgrazia" che porta sofferenza non può essere intesa esclusivamente come una punizione per i peccati personali. "No, vi dico" - dichiara Gesù, e aggiunge: "Ma se non vi convertirete, perirete tutti allo stesso modo" (*Lc* 13, 3-4). Nel contesto, confrontando queste parole con quelle precedenti, è facile scoprire che Gesù intende sottolineare la necessità di evitare il peccato, perché questo è il vero male, il male in se stesso e, stante la solidarietà che lega fra loro gli esseri umani, la radice ultima di ogni sofferenza. Non basta evitare il peccato soltanto per paura della punizione che può derivarne a chi lo commette. Occorre veramente "convertirsi" al bene, così che la legge della solidarietà possa invertire la sua efficacia e sviluppare, grazie alla comunione con la sofferenza di Cristo, un influsso positivo sugli altri membri della famiglia umana.

5. In tale senso suonano le parole pronunziate da Gesù mentre guariva un cieco nato. Quando i discepoli gli chiesero: "Rabbi, chi ha peccato, lui o i suoi genitori, perché egli nascesse cieco?", Gesù rispose: "Né lui ha peccato né i suoi genitori, ma è così perché si manifestassero in lui le opere di Dio" (*Gv* 9, 1-3). Dando la vista al cieco, Gesù fece conoscere le "opere di Dio", che dovevano rivelarsi in quell'uomo handicappato, a vantaggio di lui e di quanti sarebbero venuti a conoscenza dell'evento. La guarigione miracolosa del cieco fu un "segno" che condusse il guarito a credere in Cristo e introdusse nell'animo di altri un salutare germe di inquietudine (cf. *Gv* 9, 16). Nella professione di fede del miracolato si manifestò l'essenziale "opera di Dio", il dono salvifico che egli ricevette insieme al dono di vedere: "Tu credi nel Figlio dell'uomo? . . . E chi è, Signore, perché io creda in lui? . . . Tu l'hai visto: colui che parla con te è proprio lui . . . Io credo Signore!" (*Gv* 9, 35- 38).

6. Sullo sfondo di quest'avvenimento intravediamo qualche aspetto della verità del dolore alla luce della croce. In realtà, un giudizio che veda la sofferenza esclusivamente come punizione del peccato, va contro l'amore dell'uomo. È quanto appare già nel caso degli interlocutori di Giobbe, che lo accusano sulla base di argomenti desunti da una concezione della giustizia priva di ogni apertura sull'amore (cf. *Gb* 4 ss). Lo si vede ancor meglio nel caso del cieco nato: "Chi ha peccato, lui, o i suoi genitori, perché egli nascesse cieco?" (*Gv* 9, 2). È come un puntare il dito contro qualcuno. È un sentenziare che passa dalla sofferenza vista come tormento fisico, a quella intesa come castigo per il peccato: qualcuno in quel caso deve aver peccato, l'interessato o i suoi genitori. È una stigmatizzazione morale: soffre, perciò deve essere stato colpevole!

Per porre fine a questo modo meschino e ingiusto di pensare, era necessario che si rivelasse nella sua radicalità il mistero della sofferenza dell'Innocente, del Santo, dell'"Uomo dei dolori"! Da quando Cristo ha scelto la croce ed è morto Sul Golgota, tutti coloro che soffrono, particolarmente quelli che soffrono senza colpa, possono incontrarsi col volto del "Santo che

soffre”, e trovare nella sua passione la piena verità sulla sofferenza, il suo senso pieno, la sua importanza.

7. Alla luce di questa verità, tutti quelli che soffrono possono sentirsi chiamati a partecipare all’opera della redenzione compiuta per mezzo della croce. Partecipare alla croce di Cristo vuol dire credere nella potenza salvifica del sacrificio che ogni credente può offrire insieme al Redentore. Allora la sofferenza viene liberata dall’ombra dell’assurdità che sembra ricoprirla, e acquista una dimensione profonda, rivela il suo significato e valore creativo. Allora si direbbe che cambia lo scenario dell’esistenza, da cui si allontana sempre più la potenza distruttiva del male, proprio perché la sofferenza porta i suoi frutti copiosi. Gesù stesso ce lo rivela e promette, quando dice: “È giunta l’ora che sia glorificato il Figlio dell’uomo. In verità, in verità vi dico: se il chicco di grano caduto in terra non muore, rimane solo; se invece muore, produce molto frutto” (Gv 12, 23-24). Dalla croce alla gloria!

8. Un altro aspetto della verità della sofferenza occorre mettere in luce con l’aiuto del Vangelo. Ci dice Matteo che “Gesù andava attorno . . . predicando il vangelo del Regno e curando ogni malattia e infermità” (Mt 9, 35). A sua volta Luca narra che quando interrogarono Gesù sul giusto significato del comandamento dell’amore, egli rispose con la parabola del buon samaritano (cf. Lc 10, 30-37). Da questi testi si deduce che, secondo Gesù, la sofferenza deve incitare in modo particolare all’amore del prossimo e all’impegno nel rendergli i servizi necessari. Un tale amore e tali servizi, svolti in ogni forma possibile, costituiscono un fondamentale valore morale, che “accompagna” la sofferenza. E anzi Gesù, parlando dell’ultimo giudizio, ha messo in particolare rilievo il concetto che ogni opera di amore compiuta a favore dell’uomo sofferente è rivolta al Redentore stesso: “Ho avuto fame e mi avete dato da mangiare, ho avuto sete e mi avete dato da bere; ero forestiero e mi avete ospitato, nudo e mi avete vestito, malato e mi avete visitato, carcerato e siete venuti a trovarmi” (Mt 25, 35-36). Su queste parole si basa tutta l’etica cristiana dei servizi, anche sociali, e la definitiva valorizzazione della sofferenza accettata alla luce della croce.

Non potrebbe trarsi di qui la risposta che anche oggi l’umanità attende? Essa si può ricevere soltanto da Cristo crocifisso, “il santo che soffre”, il quale può penetrare nel cuore stesso dei più tormentosi problemi umani, perché sta già accanto a tutti coloro che soffrono e chiedono a lui l’infusione di una nuova speranza.

PAPA GIOVANNI PAOLO II

Lettera Apostolica “Salvifici Doloris”

....

Così dunque la realtà della sofferenza provoca l'interrogativo sull'essenza del male: che cosa è il male?

Questo interrogativo sembra, in un certo senso, inseparabile dal tema della sofferenza. La risposta cristiana ad esso è diversa da quella che viene data da alcune tradizioni culturali e religiose, le quali ritengono che l'esistenza sia un male, dal quale bisogna liberarsi. Il cristianesimo proclama l'essenziale *bene dell'esistenza* e il bene di ciò che esiste, professa la bontà del Creatore e proclama il bene delle creature. L'uomo soffre a causa del male, che è una certa mancanza, limitazione o distorsione del bene. Si potrebbe dire che l'uomo soffre *a motivo di un bene* al quale egli non partecipa, dal quale viene, in un certo senso, tagliato fuori, o del quale egli stesso si è privato. Soffre in particolare quando « dovrebbe » aver parte-nell'ordine normale delle cose-a questo bene, e non l'ha.

Così dunque nel concetto cristiano la realtà della sofferenza si spiega per mezzo del male, che è sempre, in qualche modo, in riferimento ad un bene.

La sofferenza umana costituisce in se stessa quasi uno specifico « *mondo* » che esiste insieme all'uomo, che appare in lui e passa, e a volte non passa, ma in lui si consolida ed approfondisce. Questo mondo della sofferenza, diviso in molti, in numerosissimi soggetti, esiste *quasi nella dispersione*. Ogni uomo, mediante la sua personale sofferenza, costituisce non solo una piccola parte di quel « mondo », ma al tempo stesso quel « mondo » è in lui come un'entità finita e irripetibile. Di pari passo con ciò va, tuttavia, la dimensione interumana e sociale. Il mondo della sofferenza possiede quasi una sua *propria compattezza*. Gli uomini sofferenti si rendono simili tra loro mediante l'analoga della situazione, la prova del destino, oppure mediante il bisogno di comprensione e di premura, e forse soprattutto mediante il persistente interrogativo circa il senso di essa. Benché dunque il mondo della sofferenza esista nella dispersione, al tempo stesso contiene in sé una singolare sfida *alla comunione e alla solidarietà*. Cercheremo anche di seguire un tale appello nella presente riflessione.

Pensando al mondo della sofferenza nel suo significato personale ed insieme collettivo, non si può, infine, non notare il fatto che un tal mondo, in alcuni periodi di tempo ed in alcuni spazi dell'esistenza umana, *quasi si addensa in modo particolare*. Ciò accade, per esempio, nei casi di calamità naturali, di epidemie, di catastrofi e di cataclismi, di diversi flagelli sociali: si pensi, ad esempio, a quello di un cattivo raccolto e legato ad esso - oppure a diverse altre cause - al flagello della fame.

Si pensi, infine, alla guerra. Parlo di essa in modo speciale. Parlo delle ultime due guerre mondiali, delle quali la seconda ha portato con sé una messe molto più grande di morte ed un cumulo più pesante di umane sofferenze. A sua volta, la seconda metà del nostro secolo - *quasi in proporzione agli errori ed alle trasgressioni* della nostra civiltà contemporanea - porta in sé una minaccia così orribile di guerra nucleare, che non possiamo pensare a questo periodo se non in termini di *un accumulo incomparabile di sofferenze*, fino alla possibile auto-distruzione dell'umanità. In questo modo quel

mondo di sofferenza, che in definitiva ha il suo soggetto in ciascun uomo, sembra trasformarsi nella nostra epoca - forse più che in qualsiasi altro momento - in una particolare « sofferenza del mondo »: del mondo che come non mai è trasformato dal progresso per opera dell'uomo e, in pari tempo, come non mai è in pericolo a causa degli errori e delle colpe dell'uomo.

ALLA RICERCA DELLA RISPOSTA ALL' INTERROGATIVO SUL SENSO DELLA SOFFERENZA

All'interno di ogni singola sofferenza provata dall'uomo e, parimenti, alla base dell'intero mondo delle sofferenze appare inevitabilmente *l'interrogativo: perché?* E' un interrogativo circa la causa, la ragione, ed insieme un interrogativo circa lo scopo (*perché?*) e, in definitiva, circa il senso. Esso non solo accompagna l'umana sofferenza, ma sembra addirittura determinarne il contenuto umano, ciò per cui la sofferenza è propriamente sofferenza umana.

Ovviamente il dolore, specie quello fisico, è ampiamente diffuso nel mondo degli animali. Però solo l'uomo, soffrendo, sa di soffrire e se ne chiede il perché; e soffre in modo umanamente ancor più profondo, se non trova soddisfacente risposta. Questa è *una domanda difficile*, così come lo è un'altra, molto affine, cioè quella intorno al male. Perché il male? Perché il male nel mondo? Quando poniamo l'interrogativo in questo modo, facciamo sempre, almeno in una certa misura, una domanda anche sulla sofferenza.

L'uno e l'altro interrogativo sono difficili, quando l'uomo li pone all'uomo, gli uomini agli uomini, come anche quando l'uomo li *pone a Dio*. L'uomo, infatti, non pone questo interrogativo al mondo, benché molte volte la sofferenza gli provenga da esso, ma lo pone a Dio come al Creatore e al Signore del mondo. Ed è ben noto come sul terreno di questo interrogativo si arrivi non solo a molteplici frustrazioni e conflitti nei rapporti dell'uomo con Dio, ma capiti anche che si giunga *alla negazione stessa di Dio*. Se, infatti, l'esistenza del mondo apre quasi lo sguardo dell'anima umana all'esistenza di Dio, alla sua sapienza, potenza e magnificenza, allora il male e la sofferenza sembrano offuscare quest'immagine, a volte in modo radicale, tanto più nella quotidiana drammaticità di tante sofferenze senza colpa e di tante colpe senza adeguata pena. Perciò, questa circostanza - forse ancor più di qualunque altra - indica quanto sia importante *l'interrogativo sul senso della sofferenza*, e con quale acutezza occorra trattare sia l'interrogativo stesso, sia ogni possibile risposta da darvi.

.....

Il Libro di Giobbe pone in modo acuto il « perché » della sofferenza, mostra pure che essa colpisce l'innocente, ma non dà ancora la soluzione al problema.

Già nell'Antico Testamento notiamo un orientamento che tende a superare il concetto, secondo cui la sofferenza ha senso unicamente come punizione del peccato, in quanto si sottolinea nello stesso tempo il valore educativo della pena sofferenza. Così dunque, nelle sofferenze inflitte da Dio al popolo eletto è racchiuso un invito della sua misericordia, la quale corregge per condurre alla conversione: « Questi castighi non vengono per la distruzione, ma per la correzione del nostro popolo »(26).

Così si afferma la dimensione personale della pena. Secondo tale dimensione, la pena ha senso non soltanto perché serve a ripagare lo stesso male oggettivo della trasgressione con un altro male, ma prima di tutto perché essa crea la possibilità di ricostruire il bene nello stesso soggetto sofferente.

Questo è un aspetto estremamente importante della sofferenza. Esso è profondamente radicato nell'intera Rivelazione dell'Antica e, soprattutto, della Nuova Alleanza. La sofferenza deve servire *alla conversione*, cioè *alla ricostruzione del bene* nel soggetto, che può riconoscere la misericordia divina in questa chiamata alla penitenza. La penitenza ha come scopo di superare il male, che sotto

diverse forme è latente nell'uomo, e di consolidare il bene sia in lui stesso, sia nei rapporti con gli altri e, soprattutto, con Dio.

Ma per poter percepire la vera risposta al « perché » della sofferenza, dobbiamo volgere il nostro sguardo verso la rivelazione dell'amore divino, fonte ultima del senso di tutto ciò che esiste. L'amore è anche la fonte più ricca del senso della sofferenza, che rimane sempre un mistero: siamo consapevoli dell'insufficienza ed inadeguatezza delle nostre spiegazioni. Cristo ci fa entrare nel mistero e ci fa scoprire il « perché » della sofferenza, in quanto siamo capaci di comprendere la sublimità dell'amore divino.

Per ritrovare il senso profondo della sofferenza, seguendo la Parola rivelata di Dio, bisogna aprirsi largamente verso il soggetto umano nella sua molteplice potenzialità. Bisogna, soprattutto, accogliere la luce della Rivelazione non soltanto in quanto essa esprime l'ordine trascendente della giustizia, ma in quanto illumina questo ordine con l'amore, quale sorgente definitiva di tutto ciò che esiste. L'Amore è anche la sorgente più piena della risposta all'interrogativo sul senso della sofferenza. Questa risposta è stata data da Dio all'uomo nella Croce di Gesù Cristo.

GESU' CRISTO: LA SOFFERENZA VINTA DALL'AMORE

« Dio infatti ha tanto amato il mondo che ha dato il suo Figlio unigenito, perché chiunque crede in lui non muoia, ma abbia la vita eterna »(27).

Queste parole, pronunciate da Cristo nel colloquio con Nicodemo, ci introducono nel centro stesso *dell'azione salvifica di Dio*. Esse esprimono anche l'essenza stessa della soteriologia cristiana, cioè della teologia della salvezza. Salvezza significa liberazione dal male, e per ciò stesso rimane in stretto rapporto col problema della sofferenza. Secondo le parole rivolte a Nicodemo, Dio dà il suo Figlio al « mondo » per liberare l'uomo dal male, che porta in sé la definitiva ed assoluta prospettiva della sofferenza. Contemporaneamente, la stessa parola « dà » («ha dato ») indica che questa liberazione deve essere compiuta dal Figlio unigenito mediante la sua propria sofferenza. E in ciò si manifesta l'amore, l'amore infinito sia di quel Figlio unigenito, sia del Padre, il quale « dà » per questo il suo Figlio. Questo è l'amore per l'uomo, l'amore per il « mondo »: è l'amore salvifico.

Ci troviamo qui - occorre rendersene conto chiaramente nella nostra comune riflessione su questo problema - in una dimensione completamente nuova del nostro tema. E' dimensione diversa da quella che determinava e, in un certo senso, chiudeva la ricerca del significato della sofferenza entro i limiti della giustizia. Questa è *la dimensione della Redenzione*, alla quale nell'Antico Testamento già sembrano preludere, almeno secondo il testo della Volgata, le parole del giusto Giobbe: « Io so infatti che il mio Redentore vive, e che nell'ultimo giorno... vedrò il mio Dio... »(28). Mentre finora la nostra considerazione si è concentrata prima di tutto e, in un certo senso, esclusivamente sulla sofferenza nella sua molteplice forma temporale (come anche le sofferenze del giusto Giobbe), invece le parole, ora riportate dal colloquio di Gesù con Nicodemo, riguardano *la sofferenza nel suo senso fondamentale e definitivo*. Dio dà il suo Figlio unigenito, affinché l'uomo « non muoia », e il significato di questo « non muoia » viene precisato accuratamente dalle parole successive: « ma abbia la vita eterna ».

L'uomo « muore », quando perde « la vita eterna ». Il contrario della salvezza non è, quindi, la sola sofferenza temporale, una qualsiasi sofferenza, ma la sofferenza definitiva: la perdita della vita eterna, l'essere respinti da Dio, la dannazione. Il Figlio unigenito è stato dato all'umanità per proteggere l'uomo, prima di tutto, contro questo male definitivo e contro *la sofferenza definitiva*. Nella sua missione salvifica egli deve, dunque, toccare il male alle sue stesse radici trascendentali, dalle quali esso si sviluppa nella storia dell'uomo. Tali radici trascendentali del male sono fissate nel peccato e

nella morte: esse, infatti, si trovano alla base della perdita della vita eterna. La missione del Figlio unigenito consiste nel *vincere il peccato e la morte*. Egli vince il peccato con la sua obbedienza fino alla morte, e vince la morte con la sua risurrezione.

Quando si dice che Cristo con la sua missione tocca il male alle sue stesse radici, noi abbiamo in mente non solo il male e la sofferenza definitiva, escatologica (perché l'uomo « non muoia, ma abbia la vita eterna »), ma anche - almeno indirettamente - il *male e la sofferenza* nella loro *dimensione temporale e storica*. Il male, infatti, rimane legato al peccato e alla morte. E anche se con grande cautela si deve giudicare la sofferenza dell'uomo come conseguenza di peccati concreti (ciò indica proprio l'esempio del giusto Giobbe), tuttavia essa non può essere distaccata dal peccato delle origini, da ciò che in san Giovanni è chiamato « il peccato del mondo »(29), *dallo sfondo peccaminoso* delle azioni personali e dei processi sociali nella storia dell'uomo. Se non è lecito applicare qui il criterio ristretto della diretta dipendenza (come facevano i tre amici di Giobbe), tuttavia non si può neanche rinunciare al criterio che, alla base delle umane sofferenze, vi è un *multiforme coinvolgimento* nel peccato.

Similmente avviene quando si tratta della *morte*. Molte volte essa è attesa persino come una liberazione dalle sofferenze di questa vita. Al tempo stesso, non è possibile lasciarsi sfuggire che essa costituisce quasi una definitiva sintesi della loro opera distruttiva sia nell'organismo corporeo che nella psiche. Ma, prima di tutto la morte comporta la *dissociazione* dell'intera personalità psicofisica dell'uomo. L'anima sopravvive e sussiste separata dal corpo, mentre il corpo viene sottoposto ad una graduale decomposizione secondo le parole del Signore Dio, pronunciate dopo il peccato commesso dall'uomo agli inizi della sua storia terrena: « Tu sei polvere e in polvere ritornerai »(30). Anche se dunque la morte non è una sofferenza nel senso temporale della parola, anche se *in un certo modo* si trova *al di là di tutte le sofferenze*, contemporaneamente il male, che l'essere umano sperimenta in essa, ha un carattere definitivo e totalizzante. Con la sua opera salvifica il Figlio unigenito libera l'uomo dal peccato e dalla morte. Prima di tutto egli *cancella* dalla storia dell'uomo il *dominio del peccato*, che si è radicato sotto l'influsso dello Spirito maligno, iniziando dal peccato originale, e dà poi all'uomo la possibilità di vivere nella Grazia santificante. Sulla scia della vittoria sul peccato egli toglie anche il dominio *della morte*, dando, con la sua risurrezione, l'avvio alla futura risurrezione dei corpi. L'una e l'altra sono condizione essenziale della « vita eterna », cioè della definitiva felicità dell'uomo in unione con Dio; ciò vuol dire, per i salvati, che nella prospettiva escatologica la sofferenza è totalmente cancellata.

In conseguenza dell'opera salvifica di Cristo l'uomo esiste sulla terra *con la speranza* della vita e della santità eterne. E anche se la vittoria sul peccato e sulla morte, riportata da Cristo con la sua croce e risurrezione, non abolisce le sofferenze temporali dalla vita umana, né libera dalla sofferenza l'intera dimensione storica dell'esistenza umana, tuttavia su tutta questa dimensione e su ogni sofferenza essa *getta una luce nuova*, che è la luce della salvezza. E' questa la luce del Vangelo, cioè della Buona Novella. Al centro di questa luce si trova la verità enunciata nel colloquio con Nicodemo: « Dio infatti ha tanto amato il mondo da dare il suo Figlio unigenito »(31). Questa verità cambia dalle sue fondamenta il quadro della storia dell'uomo e della sua situazione terrena: nonostante il peccato che si è radicato in questa storia e come eredità originale e come « peccato del mondo » e come somma dei peccati personali, Dio Padre ha amato il Figlio unigenito, cioè lo ama in modo durevole; nel tempo poi, proprio per quest'amore che supera tutto, egli « dà » questo Figlio, affinché tocchi le radici stesse del male umano e così si avvicini in modo salvifico all'intero mondo della sofferenza, di cui l'uomo è partecipe.

Nella sua attività messianica in mezzo a Israele Cristo si è avvicinato incessantemente *al mondo dell'umana sofferenza*. « Passò facendo del bene »(32), e questo suo operare riguardava, prima di tutto, i sofferenti e coloro che attendevano aiuto. Egli guariva gli ammalati, consolava gli afflitti, nutriva gli affamati, liberava gli uomini dalla sordità, dalla cecità, dalla lebbra, dal demonio e da

diverse minorazioni fisiche, tre volte restituì ai morti la vita. Era sensibile a ogni umana sofferenza, sia a quella del corpo che a quella dell'anima. E al tempo stesso ammaestrava, ponendo al centro del suo insegnamento *le otto beatitudini*, che sono indirizzate agli uomini provati da svariate sofferenze nella vita temporale. Essi sono « i poveri in spirito » e « gli afflitti », e « quelli che hanno fame e sete della giustizia » e « i perseguitati per causa della giustizia », quando li insultano, li perseguitano e mentendo, dicono ogni sorta di male contro di loro per causa di Cristo(33)... Così secondo Matteo; Luca menziona esplicitamente coloro « che ora hanno fame »(34).

Ad ogni modo Cristo si è avvicinato soprattutto al mondo dell'umana sofferenza per il fatto di aver assunto egli stesso *questa sofferenza su di sé*. Durante la sua attività pubblica provò non solo la fatica, la mancanza di una casa, l'incomprensione persino da parte dei più vicini, ma, più di ogni cosa, venne sempre più ermeticamente circondato da un cerchio di ostilità e divennero sempre più chiari i preparativi per toglierlo di mezzo dai viventi. Cristo è consapevole di ciò, e molte volte parla ai suoi discepoli delle sofferenze e della morte che lo attendono: « Ecco, noi saliamo a Gerusalemme e il Figlio dell'uomo *sarà consegnato* ai sommi sacerdoti e agli scribi: lo condanneranno a morte, lo consegneranno ai pagani, lo scherniranno, gli sputeranno addosso, lo flagelleranno e lo uccideranno; ma dopo tre giorni risusciterà »(35). Cristo va incontro alla sua passione e morte con tutta la consapevolezza della missione che ha da compiere proprio in questo modo. Proprio *per mezzo di questa sua sofferenza* egli deve far sì « che l'uomo non muoia, ma abbia la vita eterna ». Proprio per mezzo della sua Croce deve toccare le radici del male, piantate nella storia dell'uomo e nelle anime umane. Proprio per mezzo della sua Croce deve compiere *l'opera della salvezza*. Quest'opera, nel disegno dell'eterno Amore, ha un carattere redentivo.

E perciò Cristo rimprovera severamente Pietro, quando vuole fargli abbandonare i pensieri sulla sofferenza e sulla morte di Croce(36). E quando, durante la cattura nel Getsemani, lo stesso Pietro tenta di difenderlo con la spada, Cristo gli dice: « Rimetti la spada nel fodero... Ma come allora *si adempirebbero le Scritture*, secondo le quali così deve avvenire? »(37). Ed inoltre dice: « Non devo forse bere il *calice che il Padre mi ha dato*? »(38). Questa risposta - come altre che ritornano in diversi punti del Vangelo - mostra quanto profondamente Cristo fosse penetrato dal pensiero che già aveva espresso nel colloquio con Nicodemo: « Dio infatti ha tanto amato il mondo da dare il suo Figlio unigenito, perché chiunque crede in lui non muoia, ma abbia la vita eterna »(39). Cristo s'incammina verso la propria sofferenza, consapevole della sua forza salvifica, va obbediente al Padre, ma prima di tutto è *unito al Padre in quest'amore*, col quale Egli ha amato il mondo e l'uomo nel mondo. E per questo San Paolo scriverà di Cristo: « Mi ha amato e ha dato se stesso per me »(40).

.....

Cristo soffre volontariamente e soffre innocentemente. Accoglie con la sua sofferenza quell'interrogativo, che - posto molte volte dagli uomini - è stato espresso, in un certo senso, in modo radicale dal Libro di Giobbe. Cristo, tuttavia, non solo porta con sé la stessa domanda (e ciò in modo ancor più radicale, poiché egli non è solo un uomo come Giobbe, ma è l'unigenito Figlio di Dio), ma porta anche il *massimo della possibile risposta a questo interrogativo*. La risposta emerge, si può dire, dalla stessa materia, di cui è costituita la domanda. Cristo dà la risposta all'interrogativo sulla sofferenza e sul senso della sofferenza non soltanto col suo insegnamento, cioè con la Buona Novella, ma prima di tutto con la propria sofferenza, che con un tale insegnamento della Buona Novella è integrata in modo organico ed indissolubile. E questa è *l'ultima*, sintetica parola di questo *insegnamento*: « la parola della Croce », come dirà un giorno San Paolo(44).

...

La risurrezione di Cristo ha rivelato « la gloria del secolo futuro » e, contemporaneamente, ha confermato « il vanto della Croce »: quella *gloria che è contenuta nella sofferenza stessa* di Cristo, e

quale molte volte si è rispecchiata e si rispecchia nella sofferenza dell'uomo, come espressione della sua spirituale grandezza. Bisogna dare testimonianza di questa gloria non solo ai martiri della fede, ma anche a numerosi altri uomini, che a volte, pur senza la fede in Cristo, soffrono e danno la vita per la verità e per una giusta causa. Nelle sofferenze di tutti costoro viene confermata in modo particolare la grande dignità dell'uomo.

Tuttavia, le esperienze dell'Apostolo, partecipe delle sofferenze di Cristo, vanno ancora oltre. Nella Lettera ai Colossesi leggiamo le parole, che costituiscono quasi l'ultima tappa dell'itinerario spirituale in relazione alla sofferenza. San Paolo scrive: « Perciò sono lieto delle sofferenze che sopporto per voi e *completo* nella mia carne *quello che manca ai patimenti* di Cristo, in favore del suo corpo che è la Chiesa »(78). Ed egli in un'altra Lettera interroga i suoi destinatari: « Non sapete che i vostri corpi sono membra di Cristo? »(79).

Nel mistero pasquale Cristo ha dato inizio *all'unione con l'uomo nella comunità della Chiesa*. Il mistero della Chiesa si esprime in questo: che già all'atto del Battesimo, che configura a Cristo, e poi mediante il suo Sacrificio - sacramentalmente mediante l'Eucaristia - la Chiesa di continuo si edifica spiritualmente come corpo di Cristo. In questo corpo Cristo vuole essere unito con tutti gli uomini, ed in modo particolare egli è unito con coloro che soffrono. Le citate parole della Lettera ai Colossesi attestano l'eccezionale carattere di questa unione. Ecco, infatti, *colui che soffre in unione con Cristo* - come in unione con Cristo sopporta le sue « tribolazioni » l'apostolo Paolo - non solo attinge da Cristo quella forza, della quale si è parlato precedentemente, ma anche « completa » con la sua sofferenza « quello che manca ai patimenti di Cristo ». In questo quadro evangelico è messa in risalto, in modo particolare, la verità *sul carattere creativo della sofferenza*. La sofferenza di Cristo ha creato il bene della redenzione del mondo. Questo bene in se stesso è inesauribile ed infinito. Nessun uomo può aggiungervi qualcosa. Allo stesso tempo, però, nel mistero della Chiesa come suo corpo, Cristo in un certo senso ha aperto la propria sofferenza redentiva ad ogni sofferenza dell'uomo. In quanto l'uomo diventa partecipe delle sofferenze di Cristo - in qualsiasi luogo del mondo e tempo della storia -, in tanto *egli completa a suo modo* quella sofferenza, mediante la quale Cristo ha operato la redenzione del mondo.

Questo vuol dire, forse, che la redenzione compiuta da Cristo non è completa? No. Questo significa solo che la redenzione, operata in forza dell'amore soddisfattorio, rimane *costantemente aperta ad ogni amore* che si esprime *nell'umana sofferenza*. In questa dimensione - nella dimensione dell'amore - la redenzione già compiuta fino in fondo, si compie, in un certo senso, costantemente. Cristo ha operato la redenzione completamente e sino alla fine; al tempo stesso, però, non l'ha chiusa: in questa sofferenza redentiva, mediante la quale si è operata la redenzione del mondo, Cristo si è aperto sin dall'inizio, e costantemente si apre, ad ogni umana sofferenza. Sì, sembra far parte *dell'essenza stessa della sofferenza redentiva di Cristo* il fatto che essa richieda di essere incessantemente completata.

In questo modo, con una tale apertura ad ogni umana sofferenza, Cristo ha operato con la propria sofferenza la redenzione del mondo. Infatti, al tempo stesso, questa redenzione, anche se compiuta in tutta la pienezza con la sofferenza di Cristo, vive e si sviluppa a suo modo nella storia dell'uomo. Vive e si sviluppa come corpo di Cristo, che è la Chiesa, ed in questa dimensione ogni umana sofferenza, in forza dell'unione nell'amore con Cristo, completa la sofferenza di Cristo. La completa *così come la Chiesa completa l'opera redentrice di Cristo*. Il mistero della Chiesa - di quel corpo che completa in sé anche il corpo crocifisso e risorto di Cristo - indica contemporaneamente quello spazio, nel quale le sofferenze umane completano le sofferenze di Cristo. Solo in questo raggio e in questa dimensione della Chiesa-corpo di Cristo, che continuamente si sviluppa nello spazio e nel tempo, si può pensare e parlare di « ciò che manca » ai patimenti di Cristo. L'Apostolo, del resto, lo mette chiaramente in rilievo, quando scrive del completamento di « quello che manca ai patimenti di Cristo, in favore del suo corpo che è la Chiesa ».

Proprio *la Chiesa*, che attinge incessantemente alle infinite risorse della redenzione, introducendola nella vita dell'umanità, è *la dimensione*, nella quale la sofferenza redentrice di Cristo può essere costantemente completata dalla sofferenza dell'uomo. In ciò vien messa in risalto anche la natura divino-umana della Chiesa. La sofferenza sembra partecipare in un qualche modo alle caratteristiche di questa natura. E perciò essa ha pure un valore speciale davanti alla Chiesa. Essa è un bene, dinanzi al quale la Chiesa si inchina con venerazione, in tutta la profondità della sua fede nella redenzione. Si inchina, insieme, in tutta la profondità di quella fede, con la quale essa abbraccia in se stessa l'inesprimibile mistero del corpo di Cristo.

CONCLUSIONE

Questo è il senso veramente soprannaturale ed insieme umano della sofferenza. E'*soprannaturale*, perché si radica nel mistero divino della redenzione del mondo, ed è, altresì, profondamente *umano*, perché in esso l'uomo ritrova se stesso, la propria umanità, la propria dignità, la propria missione.

La sofferenza certamente appartiene al mistero dell'uomo. Forse essa non è avvolta quanto lui da questo mistero, che è particolarmente impenetrabile. Il Concilio Vaticano II ha espresso questa verità che « in realtà, solamente nel mistero del Verbo Incarnato trova vera luce il mistero dell'uomo. Infatti..., *Cristo* che è il nuovo Adamo, proprio rivelando il mistero del Padre e del suo amore, *svela* anche *pienamente l'uomo all'uomo* e gli fa nota la sua altissima vocazione »(100). Se queste parole si riferiscono a tutto ciò che riguarda il mistero dell'uomo, allora certamente si riferiscono in modo particolarissimo *all'umana sofferenza*. Proprio in questo punto lo « svelare l'uomo all'uomo e fargli nota la sua altissima vocazione » è particolarmente *indispensabile*. Succede anche - come prova l'esperienza - che ciò sia particolarmente *drammatico*. Quando però si compie fino in fondo e diventa luce della vita umana, ciò è anche particolarmente *beato*. « Per Cristo e in Cristo si illumina l'enigma del dolore e della morte »(101).

In definitiva...

Nel 2011 Benedetto XVI rispose così a una bambina che gli chiese spiegazioni al dolore dei suoi coetanei: «*Non abbiamo le risposte, ma sappiamo che Gesù ha sofferto come innocente vittima sacrificale...* Questo mi sembra molto importante, anche se non abbiamo risposte, se rimane la tristezza: Dio sta dalla nostra parte». Papa Francesco, qualche anno dopo, disse sul medesimo quesito: «Questa domanda è una delle più difficili a cui rispondere. **Non c'è risposta**». E poi aggiunse: «Cosa posso fare io perché un bambino soffra di meno? Stargli vicino. La società dia aiuti anche palliativi per le sofferenze dei bambini».

La risposta di Dio alla domanda sul perché della sofferenza del giusto, non è una spiegazione, ma una Presenza. È Cristo sulla croce.

La sofferenza e la morte rimangono enigmi irrisolti razionalmente, ma con la fede in Cristo questo mistero si illumina di un senso anch'esso misterioso ma reale, esso sarà pienamente svelato solo nell'al di là.

Il male, pur essendo reale, non ha il potere di distruggere il significato ultimo della vita. Il cristianesimo annuncia che Dio si è fatto uomo in Cristo proprio per affrontare il male e la morte. Quindi il male non viene eliminato con argomenti, ma sconfitto da una presenza.

Il cristianesimo non elimina il male, ma introduce un fattore di vittoria dentro il male: la presenza di Cristo risorto.”

Affermare che il male è un mistero non significa che non si possa dire nulla, ma che la risposta definitiva è l'incontro con Cristo, che vive il male fino in fondo (passione e croce) e lo trasfigura nella resurrezione.

A conclusione di queste riflessioni ecco la mia sintesi.

L'esistenza del male è un mistero.

Esso è presente nella creazione, è l'Angelo decaduto, che con le sue tentazioni accettate volontariamente dall'uomo perpetua il male nella storia.

Esso però è stato sconfitto dalla Croce di Cristo. Per mezzo della sofferenza e della morte accettate per Amore, Cristo ci offre la salvezza, liberandoci così dalla definitività del male la cui sua massima espressione è la morte, infatti Egli afferma:

“ Chi crede in me avrà la vita eterna” che significa vita tutta dentro la Presenza di Dio, Bene Sommo, nella comunione con tutti i beati.

Dopo queste riflessioni sul problema del male è ineludibile la domanda delle domande: cosa è la vita dell'uomo?

Cos'è la vita? La vita è una fregatura? Qual è il suo senso se ce l'ha? Ogni uomo della storia ha avvertito nel suo cuore tale domanda, occorrerà dunque impiegare tutte le energie nella risposta a questa fondamentale domanda.

La fede cristiana afferma che vita non è una fregatura, ma un dono, essa proclama che Dio è il creatore di tutto ciò che esiste e dunque anche della nostra vita e che nella persona di Gesù Cristo si compie definitivamente la vita dell'uomo.

PAPA FRANCESCO

Meditazione mattutina nella Cappella Sanctae Marthae

6 aprile 2013

La fede non è né una alienazione né una truffa, ma è un cammino concreto di bellezza e di verità, tracciato da Gesù, per preparare i nostri occhi a fissare senza occhiali «il volto meraviglioso di Dio» nel posto definitivo che è preparato per ciascuno. È un invito a non farsi prendere dalla paura e a vivere la vita come una preparazione a vedere meglio, ascoltare meglio e amare di più quello che Papa Francesco ha pronunciato nell'omelia della messa celebrata venerdì mattina, 26 aprile, nella cappella della Domus Sanctae Marthae.

Papa Francesco ha centrato l'omelia sul passo evangelico di san Giovanni (14, 1-6): «Non sia turbato il vostro cuore. Abbiate fede in Dio e abbiate fede anche in me. Nella casa del Padre mio vi sono molte dimore. Se no, vi avrei mai detto: “Vado a prepararvi un posto”? Quando sarò andato e vi avrò preparato un posto, verrò di nuovo e vi prenderò con me, perché dove sono io siate anche voi. E del luogo dove io vado, conoscete la via».

Pronunciare queste parole, secondo la narrazione evangelica di san Giovanni, Gesù — ha detto il Papa — «comincia a parlare: di che? Del cielo, della patria definitiva. “Abbiate fede anche in me: io

rimango fedele” è come se dicesse questo». E utilizzando la metafora, «la figura dell’ingegnere, dell’architetto dice loro quello che andrà a fare: “Vado a prepararvi un posto, nella casa del Padre mio vi sono molte dimore”. E Gesù va a prepararci un posto».

«Com’è — si è chiesto Papa Francesco — questa preparazione? Come avviene? Com’è quel posto? Cosa significa preparare il posto? Affittare una stanza lassù?». Preparare il posto significa «preparare la nostra possibilità di godere, la nostra possibilità di vedere, di sentire, di capire la bellezza di quello che ci aspetta, di quella patria verso la quale noi camminiamo».

«E tutta la vita cristiana — ha proseguito il Pontefice — è un lavoro di Gesù, dello Spirito Santo per prepararci un posto, prepararci gli occhi per poter vedere». «“Ma, Padre, io vedo bene! Non ho bisogno degli occhiali!”. Ma quella è un’altra visione. Pensiamo a quelli che sono malati di cataratta e devono farsi operare la cataratta: loro vedono, ma dopo l’intervento cosa dicono? “Mai ho pensato che si potesse vedere così, senza occhiali, tanto bene!”. Gli occhi nostri, gli occhi della nostra anima hanno bisogno, hanno necessità di essere preparati per guardare quel volto meraviglioso di Gesù». Si tratta, allora, di «preparare l’udito per poter sentire le cose belle, le parole belle. E principalmente preparare il cuore: preparare il cuore per amare, amare di più».

«Nel cammino della vita — ha spiegato il Pontefice — il Signore sempre fa questo: con le prove, con le consolazioni, con le tribolazioni, con le cose buone. Tutto il cammino della vita è un cammino di preparazione. Alcune volte il Signore deve farlo in fretta, come ha fatto con il buon ladrone: aveva soltanto pochi minuti per prepararlo e l’ha fatto. Ma la normalità della vita è andare così: lasciarsi preparare il cuore, gli occhi, l’udito per arrivare a questa patria. Perché quella è la nostra patria».

Papa Francesco ha messo in guardia dal perdere di vista questa dimensione fondamentale della nostra vita e del cammino di fede e dalle obiezioni di chi non riconosce una prospettiva di eternità: «“Ma, Padre, io sono andato da un filosofo e mi ha detto che tutti questi pensieri sono una alienazione, che noi siamo alienati, che la vita è questa, il concreto, e di là non si sa cosa sia ...”. Alcuni la pensano così. Ma Gesù ci dice che non è così e ci dice: “abbiate fede anche in me. Questo che io ti dico è la verità: io non ti truffo, io non ti inganno”. Siamo in cammino verso la patria, noi figli della stirpe di Abramo, come dice san Paolo nella prima lettura» (*Atti degli apostoli* 13, 26-33).

«E dal tempo di Abramo — ha affermato il Papa — siamo in cammino, con quella promessa della patria definitiva. Se noi andiamo a leggere il capitolo undicesimo della lettera agli Ebrei troveremo quella bella figura dei nostri antenati, dei nostri padri, che hanno fatto questo cammino verso la patria e la salutavano da lontano. Prepararsi al cielo è incominciare a salutarlo da lontano». E «questa non è alienazione: questa è la verità, questo è lasciare che Gesù prepari il nostro cuore, i nostri occhi per quella bellezza tanto grande. È il cammino della bellezza. Anche il cammino del ritorno alla patria».

Il Papa ha concluso l’omelia auspicando «che il Signore ci dia questa speranza forte» e «ci dia anche il coraggio di salutare la patria da lontano». E infine «ci dia l’umiltà di lasciarci preparare, cioè di lasciare il Signore preparare la dimora, la dimora definitiva, nel nostro cuore, nei nostri occhi e nel nostro udito».

La vita

A volte mi vien a pensar
alla vita;
il tempo inafferrabile
il presente inesistente.
Tutto ciò mi fa
inorridire; ma non più!
ora ci sei Tu.
Tu che mi ami ed io che, lo so, non muoio più.

Gian (1971)

Visione

Cos'è l'uomo senza di Te? O mio Dio?
Una esile canna sbattuta dal vento
impetuoso degli uomini malvagi.
Una foglia che in autunno ingiallisce e cade,
per essere calpestata dal primo passante.
Una nuvola sbiadita che subito svanisce nel cielo.
Una creatura che si crede grande, potente, forte,
e non sa che Grande, Potente, Forte lo sarà solo con Te.

Gian (1975)

La vita è un cammino



Il fatto di esistere è un miracolo che ci riempie di stupore nel momento in cui ce ne rendiamo conto.

Prima di esistere infatti non c'eravamo. Come è avvenuto questo passaggio dal nulla all'essere?

Quale è la causa che l'ha determinato? Chi lo ha deciso? Dal momento che il nulla che ero non poteva "produrre" alcunché?

Chi ha voluto che io esistessi in questo momento storico e non in un altro?

Avrei potuto essere un uomo preistorico e invece sto ammirando l'orizzonte dall'alto di un grattacielo. Avrei potuto nascere all'equatore o al polo nord, eccomi invece a godermi il dolce tepore di un clima mite.

Avrei potuto nascere in un'altra civiltà, nutrirmi di una cultura diversa, parlare una lingua che non conosco, essere educato da altri genitori, avere qualità diverse da quelle che mi caratterizzano.

Mi trovo ad esistere qui e ora, in questo modo e non in un altro per decisione misteriosa del Creatore.

E' Lui che mi ha fatto e che continuamente mi fa.

E la vita allora è un cammino verso la meta della felicità piena; ma non da soli, si cammina bene quando si è in una compagnia (la sua Chiesa, o meglio il pezzo di Chiesa che ci ha raggiunto), che ci garantisce che si tratta della strada giusta che ci conduce alla meta desiderata: la nostra pienezza umana.

Che la coscienza di essere figlio del Mistero buono che ci ha fatti e che continuamente ci fa, e che ci aspetta alla fine del pellegrinaggio terreno nella sua casa, dove potremo finalmente vederlo così come Egli è, dove potremo vivere una vita in cui il Male sarà scomparso...vita beata, una vita in comunione con tutti quelli che abbiamo amato, dove potremo sciogliere tutto il nostro essere nel suo abbraccio misericordioso, ci accompagni ogni giorno della nostra vita.

